сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-577

В.В.Курышкин*, Л.А.Севастьянов*, В.М.Филиппов*,
Э.Э.Энтральго

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

* Университет дружбы народов им.П.Лумумбы, Москва

1985

Курышкин В.В. и др. P2-85-577
О вариационных принципах
для нелинейных непотенциальных операторов

Рассматривается обратная задача вариационного исчисления для нелинейных операторных уравнений, определяющих состояния минимальной неопределенности физических величин в квантовой механике с неотрицательными координатно-импульсными распределениями. Предложен метод построения искомых функционалов, основанный на введении вспомогательных операторов. Метод может быть применен для операторных уравнений типа $\tilde{N}(\psi) = N(\psi) - f = 0$ с нелинейными непотенциальными операторами N.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Kuryshkin V.V. et al. P2-85-577
On the Variation Principles
for Nonlinear Nonpotential Operators

The inverse problem of the calculus of variations for nonlinear operator equations which determine the states of the minimum uncertainties of physical quantities in quantum mechanics with non-negative coordinate-momentum distributions is considered. A method to construct the sought functionals based on the introducing of auxiliary operators is proposed. The method can be applied for the operator equations of the type $\tilde{N}(\psi) = N(\psi) - f = 0$ with nonlinear nonpotential operators N.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985

—

I. Введение

В работе [I] было показано, что решение вопроса о возможности приведения квантовой механики к последовательной вероятностной схеме на основе совместных неотрицательных координатно-импульсных распределений существенно связано с поиском и анализом решений нелинейных операторных уравнений типа

$$N_A(\psi) = \Big\{ O(A^2) - \frac{(\psi/O(A^2)\psi)}{(\psi/\psi)} - 2\,\frac{(\psi/O(A)\psi)}{(\psi/\psi)}\Big[O(A) - \frac{(\psi/O(A)\psi)}{(\psi/\psi)}\Big]\Big\}\psi = 0.$$

Здесь $O(X)$ – оператор, установленный с помощью оператора вероятности $\hat{F}(q,p)$ координат $q=(q_1,\dots,q_n)$ и импульсов $p=(p_1,\dots,p_n)$, определенного в $L_2(R_n)$ ($\psi \in L_2(R_n)$, $(\cdot/\cdot)$ – скалярное произведение), по известной классической функции $X(q,p)$ согласно не-неймановскому правилу соответствия (подробнее см. [I-2]):

$$O(X) = \int X(q,p)\,\hat{F}(q,p)\,dq\,dp\,.$$

В наиболее интересных случаях, когда $A=H$ (энергия системы), указанное выше нелинейное интегродифференциальное уравнение содержит операторы $O(H)$ и $O(H^2)$, причем в общем случае $O(H^2) \neq O(H)O(H)$, что весьма затрудняет его решение в аналитическом виде.

Функционалы от ψ, экстремальные точки которых являются решениями обсуждаемых уравнений, известны [2]. Однако при $A=H$ эти функционалы содержат производные до 4-го порядка включительно, что приводит к неустойчивости алгоритмов при численном исследовании задачи с помощью ЭВМ.

Поэтому было бы весьма полезным построение иных функционалов, являющихся квазиклассическими решениями обратной задачи вариационного исчисления для рассматриваемых уравнений.

Один из возможных методов поиска таких функционалов, основанный на применении и обобщении полученных в [3] и [4] результатов, мы намереваемся рассмотреть в данной работе. Следует отметить, что рассматриваемый метод в принципе может быть применен для более широкого клас-

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

са нелинейных операторных уравнений типа $\tilde{N}(\psi) = N(\psi) - f = 0$, в том числе и с непотенциальными операторами N. Суть метода состоит во введении вспомогательных операторов (своих для каждого $\tilde{N}$), с помощью которых строится искомый функционал и доказывается существование решений.

2. Теорема Тонти [3]

Для операторных уравнений

$$\tilde{N}(u) = N(u) - f = 0, \tag{I}$$

где N – нелинейный оператор, действующий из области $D(N) \subseteq E$ вещественного банахова пространства E в область $R(N) \subseteq E^*$ сопряженного пространства E^*, Э.Тонти в работе [3] доказана следующая

Теорема. Предположим, что

1/ на $E \times E^*$ определен действительный симметричный невырожденный билинейный функционал $<\cdot,\cdot> : E \times E^* \to R_1$;

2/ $D(N)$ – плотное, выпуклое множество в E;

3/ существует производная Гато N'_u, и оператор $(N'_u)^*$ обратим для всех $u \in D(N)$.

Пусть существует линейный оператор K, удовлетворяющий условиям:

4/ $D(K) \supseteq R(N)$;

5/ $R(K) \subseteq D((N'_u)^*) \quad \forall u \in D(N)$;

6/ K – обратимый;

7/ K – симметричный относительно формы $<\cdot,\cdot>$.

Тогда оператор $\bar{N}$, определенный соотношением

$$\bar{N}(u) = (N'_u)^* K \tilde{N}(u), \tag{2}$$

обладает свойствами:

а/ $D(\bar{N}) = D(\tilde{N})$;

б/ $\bar{N}(u_0) = 0 \iff \tilde{N}(u_0) = 0$;

в/ оператор $\bar{N}$ потенциален, множество решений из $D(N)$ уравнения (I) совпадает со множеством критических точек функционала

$$F(u) = \frac{1}{2} < \tilde{N}(u), K\tilde{N}(u) >. \tag{3}$$

Замечание. Функционал (3) является обобщением функционала метода наименьших квадратов (МНК): $F_{МНК}(u) = < N(u)-f, N(u)-f >$. Использование вспомогательного оператора K позволяет не только ослабить условие $f \in D(N^*)$ в МНК, но и понизить, в случае дифференциального оператора N, порядок производных в функционале.

3. Вариационная задача для нелинейного операторного уравнения

Теорема Тонти указывает на возможность построения для уравнения (I) функционала (3) при условии существования линейного оператора K со свойствами 4/–7/. При этом нет каких-либо общих результатов, указывающих на существование такого оператора (в [3] приведен пример для обыкновенных дифференциальных уравнений).

Исследуем вопрос о существовании подобных операторов, ограничиваясь в дальнейшем нелинейными операторами N, действующими в пространстве $E = E^* = L_2(\Omega)$, так что указанный в теореме Тонти билинейный функционал $<\cdot,\cdot>$ есть просто скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ в $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset R_n$, $u = u(x)$, $x \in \Omega$, причем для N справедливо:

$$\exists\ (N'_u)^* \quad \forall u \in D(N); \tag{4а}$$

$$\exists\ \ell \geq 0 : D(N) \supseteq \overset{\circ}{C}{}^{\ell}(\Omega); \qquad R(N) \subseteq C(\bar{\Omega}). \tag{4б}$$

Теорема I. Для класса операторов N, определяемых соотношениями (I) и (4), существует линейный положительно определенный оператор K, удовлетворяющий условиям 4/–7/ теоремы Тонти.

Доказательство. Для построения линейного оператора K, удовлетворяющего условиям 6/ и 7/ такого, что (см. условия 4/ и 5/ теоремы Тонти)

$$D(K) \supseteq C(\bar{\Omega}), \qquad R(K) \subseteq \overset{\circ}{C}{}^{\ell}(\Omega), \tag{5}$$

рассмотрим задачу Дирихле для полигармонического уравнения

$$\mathcal{L}u(x) = (-1)^{\ell+1} \Delta^{\ell+1} u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{6}$$

с граничными условиями

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = \ldots = \frac{\partial^{\ell} u}{\partial n^{\ell}} = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Оператор $\mathcal{L}$ задачи (6), (7) симметричен и положительно определен на $D(\mathcal{L}) = C^{2\ell+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{C}{}^{\ell}(\Omega)$ и, как известно, для любого $\varphi(x) \in C(\bar{\Omega})$ существует решение $u(x) \in D(\mathcal{L})$ задачи (6),(7), которое может быть представлено в виде:

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\varphi(x) = \int_{\Omega} G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{8}$$

где $G(x,\xi)$ – функция Грина задачи (6),(7). Если теперь определить оператор K соотношением

$$Kv(x) \equiv \mathcal{L}^{-1}v(x) = \int_{\Omega} G(x,\xi)v(\xi)d\xi, \quad D(K) = C(\bar{\Omega}), \tag{9}$$

то такой оператор K будет симметричным, положительно определенным и обратимым в силу аналогичных свойств оператора $\mathcal{L}$, то есть оператор (9) удовлетворяет условиям 4/, 6/ и 7/ теоремы Тонти.

Если $\psi(x)\in R(K)$, то по построению функция $\psi(x)$ является решением из $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ задачи (6),(7), то есть с учетом (4), $\psi\in \overset{\circ}{C}{}^{\ell}(\Omega)\subseteq \mathcal{D}((N_u')^*)$ $\forall u\in \mathcal{D}(N)$, что и доказывает условие 5/.

Следствие I. Пусть нелинейный оператор N, удовлетворяющий условиям теоремы Тонти, действует в гильбертовом пространстве H, так что используемый в той же теореме билинейный функционал $\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть скалярное произведение в H. Если вспомогательный линейный оператор K удовлетворяет условиям 4/ – 7/ и является положительно определенным, то можно определить "негативное" [5] пространство H_K пополнением $\mathcal{D}(N)$ в норме

$$\|u\|_{H_K} = \left(\langle u,u\rangle_K\right)^{1/2}, \qquad \langle u,v\rangle_K = (u,Kv)_H \; . \qquad (10)$$

Тогда функционал (3) является функционалом метода наименьших квадратов в H_K:

$$F(u) = \frac{1}{2}\langle \tilde{N}(u), K\tilde{N}(u)\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(\tilde{N}(u), K\tilde{N}(u)\right)_H =$$

$$= \frac{1}{2}\langle \tilde{N}(u), \tilde{N}(u)\rangle_K = \frac{1}{2}\|\tilde{N}(u)\|^2_{H_K} \; , \qquad (11)$$

При этом очевидно, что $F(u)\geq 0$ $\forall u\in \mathcal{D}(N)$.

Таким образом, введенный нами оператор K (9) в дополнение к свойствам а/, б/, в/ теоремы Тонти обеспечивает еще свойство:

г/ функционал (3) ограничен снизу на $\mathcal{D}(N)$.

Для достаточно широких классов дифференциальных уравнений оператор K (9) может обеспечивать еще и свойство:

д/ функционал (3) содержит производные более низкого порядка, чем исходное уравнение (I).

Последнее свойство обуславливается тем, что пространство H_K, порождаемое функцией Грина задачи (6),(7), есть, как известно [5], некоторое пространство Соболева–Шварца $\overset{\circ}{W}{}_2^{-\ell}(\Omega)$.

Пример. Если для задачи

$$\tilde{N}(u) \equiv -\Delta u - f(x) = 0, \qquad x\in\Omega \qquad (12)$$

$$u(x) = 0 \; , \qquad x\in\partial\Omega \; , \qquad (13)$$

где Ω – ограниченная область в R_n с гладкой границей $\partial\Omega$, положить

$$N = -\Delta\,, \quad \mathcal{D}(N) = C^2(\bar{\Omega})\cap \overset{\circ}{C}(\Omega)\,, \qquad R(N)\subseteq C(\bar{\Omega})\,, \qquad (14)$$

то

$$N' = N = N^* = (N')^*, \qquad \mathcal{D}((N')^*) \supset \overset{\circ}{C}(\Omega). \qquad (15)$$

При этом, в силу (4) и (15), можно выбрать $\ell=0$, и оператор K определится функцией Грина задачи (6),(7), которая при $\ell=0$ совпадает с исследуемой задачей (12),(13). Поэтому, согласно (9), $K=N^{-1}$, и функционал (11) имеет вид

$$F(u) = \frac{1}{2}(Nu-f, K(Nu-f)) = \frac{1}{2}(Nu-f, u-N^{-1}f) =$$

$$= \int_\Omega \left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\right\}dx + C_f\,, \qquad C_f = \frac{1}{2}(f,Kf)\geq 0,$$

то есть только константой C_f отличается от известного функционала Дирихле для уравнения Лапласа (12).

4. Обоснование вариационного метода

Построения предыдущих параграфов можно рассматривать как получение квазиклассического решения обратной задачи вариационного исчисления для нелинейного уравнения (I), вообще говоря, с непотенциальным оператором N. Обоснование вариационного метода, основанного на минимизации функционала (11) с $N(0)=0$, определенного в некотором "негативном" пространстве H_K, проведем, обобщив результаты работы [4].

Предположение I. Предположим, что существует линейный оператор B, действующий в H_K, такой, что

$$\langle N(u_1)-N(u_2), B(u_1-u_2)\rangle_K \geq C_1\|u_1-u_2\|^2_{H_1}\;, \qquad (16)$$

$$\|Bu\|_{H_K} \leq C_2\|u\|_{H_1}\;, \qquad (17)$$

где H_1 – некоторое гильбертово пространство, $\mathcal{D}(N)\subseteq H_1\subseteq H_K$, C_1 и C_2 не зависят от u, $C_1>0$.

Следствие 2. Если оператор N имеет непрерывный (на любой прямой) дифференциал Гато

$$N'(u)\cdot h = \left(\frac{d}{d\alpha}\left[N(u+\alpha h)\right]\right)_{\alpha=0}\;,$$

то условие (16) следует из соотношения

$$\langle N'(u)h, Bh\rangle_K \geq C_1\|h\|^2_{H_1} \qquad \forall u,h\in \mathcal{D}(N). \qquad (16a)$$

Действительно, из определения дифференциала Гато следует:

$$N(u_1)-N(u_2) = \int_0^1 N'(tu_1+(1-t)u_2)\cdot(u_1-u_2)\,dt.$$

Отсюда, используя (16а), находим:

$$< N(u_1)-N(u_2), B(u_1-u_2) >_K = < \int_0^1 N'(tu_1+(1-t)u_2)\cdot(u_1-u_2)dt,\ B(u_1-u_2) >_K =$$

$$= \int_0^1 < N'(tu_1+(1-t)u_2)\cdot(u_1-u_2), B(u_1-u_2) >_K dt \ \geq \ C_1 \|u_1-u_2\|^2_{H_1}. \qquad (18)$$

<u>Следствие 3.</u> На $R(N)$ существует оператор N^{-1}, удовлетворяющий условию Липшица.

Для доказательства выберем произвольные элементы $v_1, v_2 \in R(N)$. Им соответствуют единственные элементы $u_1, u_2 \in D(N)$: $N(u_1)=v_1$, $N(u_2)=v_2$. (Единственность следует из условия (16), так как если $N(u_1)=N(\tilde{u}_1)$, то из (16) имеем

$$0 = < N(u_1)-N(\tilde{u}_1), B(u_1-\tilde{u}_1) >_K \geq C_1 \| u_1-\tilde{u}_1\|^2_{H_1} \geq 0,$$

то есть $u_1=\tilde{u}_1$). При этом из (18) с помощью (17) легко получается неравенство

$$\| u_1-u_2\|_{H_1} \leq \frac{C_2}{C_1} \|N(u_1)-N(u_2)\|_{H_K}. \qquad (19)$$

Отсюда заключаем:

$$\| N^{-1}(v_1)-N^{-1}(v_2)\|_{H_1} \leq \frac{C_2}{C_1} \| v_1-v_2\|_{H_K},$$

что дает оценку константы Липшица.

<u>Определение I</u>. Обобщенным решением из H_1 уравнения (I) будем называть решение вариационной задачи минимизации функционала (II), то есть элемент $u_0 \in H_1$, для которого существует последовательность $\{u_i\}$, $i=1,2,\ldots$, $u_i \in D(N)$, такая, что

$$\| u_i-u_0\|_{H_1} \longrightarrow 0, \qquad i \to \infty, \qquad (20а)$$

$$\| N(u_i)-f \|_{H_K} \longrightarrow 0, \qquad i \to \infty. \qquad (20б)$$

Пусть область $R(N)$ плотна в H_K, $\overline{D(N)}=H_1$, а $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ldots$ есть базис в пространстве H_1, $\varphi_i \in D(N)$. За приближенное решение уравнения (I) примем такую линейную комбинацию элементов $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$, на которой $\|N(u_m)-f\|_{H_K}$ достигает минимума. Тогда очевидно

<u>Следствие 4</u>. Для любого $f \in H_K$ существует последовательность $\{u_m\}$, $u_m \in D(N) \in H_1$, $m=1,2,\ldots$,

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i \quad \text{, такая, что} \quad \|N(u_m)-f\|_{H_K} \to 0. \qquad (21)$$

<u>Теорема 2.</u> При условиях (16) и (17) для любого $f \in H_K$ существует единственное обобщенное решение $u_0 \in H_1$ уравнения (I) (то есть существует единственное решение вариационной задачи минимизации функционала $F(u)$ (II)).

Доказательство. Следствие 4 гарантирует существование такой последовательности $\{u_m\}$, что

$$\| N(u_m)-f\|_{H_K} \to 0, \quad \| N(u_i)-N(u_j)\|_{H_K} \to 0, \quad m,i,j \to \infty. \qquad (22)$$

Эта последовательность сходится в H_1, так как аналогично (19) устанавливается оценка:

$$\| u_i-u_j\|_{H_1} \leq \frac{C_2}{C_1} \| N(u_i)-N(u_j)\|_{H_K}. \qquad (23)$$

Из (22) и (23) следует существование элемента $u_0 \in H_1$,

$$\| u_m-u_0\|_{H_1} \to 0, \qquad \|N(u_m)-f\|_{H_K} \to 0, \qquad m \to \infty,$$

то есть существование обобщенного решения уравнения (I).

Если существуют два обобщенных решения $u_0 \in H_1$ и $u_0' \in H_1$, то для любых двух последовательностей $\{u_i\}$ и $\{u_i'\}$, сходящихся соответственно к u_0 и u_0', из (21) получаем:

$$\| N(u_i)-f\|_{H_K} \to 0, \quad \|N(u_i')-f\|_{H_K} \to 0, \qquad i \to \infty.$$

Поэтому $\| N(u_i)-N(u_i')\|_{H_K} \to 0$, $i \to \infty$. Вместе с тем, аналогично (19), $\| u_i-u_i'\|_{H_1} \leq Const.\cdot \|N(u_i)-N(u_i')\|_{H_K}$, то есть последовательности $\{u_i\}$ и $\{u_i'\}$ определяют в H_1 один и тот же элемент $u_0=u_0'$, что и доказывает единственность решения вариационной задачи минимизации функционала (II).

<u>Следствие 5</u>. Если обобщенное решение $u_0 \in D(N)$, то имеет место оценка сходимости в метрике H_1 приближенных решений к точному:

$$\| u_0-u_m\|_{H_1} \leq \frac{C_2}{C_1} \| f-N(u_m)\|_{H_K}. \qquad (24)$$

Оценка (24) следует непосредственно из (19) при $u_1=u_0$ и $u_2=u_m$.

5. Построение минимизирующей последовательности

Перейдем теперь к вопросу об отыскании неизвестных коэффициентов a_i, $i=1,2,\ldots,m$, минимизирующей последовательности $\{u_m\}$ (21).

<u>Теорема 3</u>. Если выполняются условия (16),(17) и базис $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ ортонормирован в H_1, то при любом $f \in H_K$ существуют коэффициенты $a_1,\ldots,a_m$, минимизирующие функционал $\|N(u_m)-f\|^2_{H_K}$, причем неизвестные $a_1,\ldots,a_m$ определяются из системы алгебраических уравнений:

$$< N'(u_m)\varphi_p, N(u_m)-f >_K = 0, \qquad p=1,2,\ldots,m. \qquad (25)$$

Доказательство. Из необходимого условия минимума функции $\Phi(a_1,\dots,a_m) = \|N(u_m)-f\|^2_{H_K}$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial a_p}\|N(u_m)-f\|^2_{H_K} = 2 < \frac{\partial}{\partial a_p}(N(u_m)-f),\ N(u_m-f) >_K = 0,$$

откуда следует (25). При этом из (16) получаем

$$C_2\|N(u_m)\|_{H_K}\cdot\|u_m\|_{H_1} \geq \|N(u_m)\|_{H_K}\cdot\|Bu_m\|_{H_K} \geq < N(u_m), Bu_m>_K,$$

что с учетом (17) и ортонормированности базиса φ_i в последовательности $\{u_m\}$ (21) дает

$$\|N(u_m)\|_{H_K} \geq \frac{C_1}{C_2}\|u_m\|_{H_1} = \frac{C_1}{C_2}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\Big)^{1/2}. \tag{26}$$

Вместе с тем

$$\|N(u_m)-f\|^2_{H_K} \geq \|N(u_m)\|_{H_K}\cdot(\|N(u_m)\|_{H_K} - 2\|f\|_{H_K}) + \|f\|^2_{H_K}. \tag{27}$$

Теперь из соотношений (26) и (27) несложно заключить, что на сфере достаточно большого радиуса R_f имеем: $\|N(u_m)-f\|^2_{H_K} \geq \|f\|^2_{H_K}$. Поэтому дифференцируемая, ограниченная снизу (положительная) функция $\Phi(a_1,\dots,a_m)$ имеет в шаре $\sum a_i^2 \leq R_f^2$ минимум, для которого справедлива система алгебраических уравнений (25).

В заключение отметим, что полученные в работе [4] результаты являются частными случаями результатов разд.4,5 при $B = I$ (единичный оператор). Как показано в работе [6], выбор подходящего вспомогательного оператора $B \neq I$ в случае краевой задачи для волнового уравнения позволяет построить аналог функционала (II), вообще не содержащий производных от неизвестных функций.

Литература

1. Курышкин В.В., Сидорков Н.В., Энтральго Э.Э. ОИЯИ, Р4-85-496, Дубна, 1985.
2. Kuryshkin V.V., Lyabis I.A., Zaparovanny Yu.I. Ann. Fond. L. de-Broglie, 1978, 3, p. 45-56.
3. Tonti E. Hadronic Journal, 1982, 5, p. 1404-1450.
4. Лангенбах А.М. ДАН СССР, 1962, 143, № 1, с. 31-34.
5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, "Наукова думка", 1965.
6. Филиппов В.М. Дифференциальные уравнения, 1984, 20, с. 1961-1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июля 1985 года.