

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-85-557

Ю. П. Иванов

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ КХД

1985

Вопросы сравнения предсказаний КХД с наблюдаемым на эксперименте поведением структурных функций $F_k(x, Q^2)$ глубокоэластичного рассеяния требуют решения эволюционных уравнений /ЭУ/ для входящих в $F_k(x, Q^2)$ функций распределения /ФР/ $f(x, Q^2)$ кварков и глюонов вида /1,2/

$$\frac{df(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P(x, \alpha_s(Q^2)) \otimes f(x, Q^2) \quad /1/$$

с начальным условием /НУ/

$$f(x, Q_0^2) = f_0(x). \quad /2/$$

Здесь $\alpha_s(Q^2)$ - бегущая константа сильной связи,

$$P(x, \alpha_s) = P^{(0)}(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P^{(1)}(x) + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 P^{(2)}(x) + \dots \quad /3/$$

функция расщепления /в общем случае P является матрицей и /1/ представляет собой систему для ФР кварков и глюонов/, а символ \otimes обозначает свертку:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y). \quad /4/$$

Переход к моментам

$$\langle f \rangle_n = \int_0^1 dx \cdot x^{n-1} \cdot f(x), \quad /5/$$

в силу

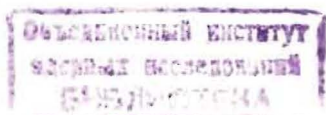
$$\langle f \otimes g \rangle_n = \langle f \rangle_n \cdot \langle g \rangle_n. \quad /6/$$

переводит /1/ в обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого

$$\langle f(Q^2) \rangle_n = R_n(Q^2; Q_0^2) \langle f(Q_0^2) \rangle_n, \quad /7/$$

легко находится в каждом конкретном порядке по α_s . Обращение моментов

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dn}{x^n} \langle f \rangle_n. \quad /8/$$



приводит к представлению решения ЭУ /1/ с НУ /2/ в виде

$$f(x, Q^2) = R(x, Q^2; Q_0^2) \circledast f(x, Q_0^2), \quad /9/$$

где

$$R(x, Q^2; Q_0^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dn}{x^n} R_n(Q^2; Q_0^2). \quad /10/$$

К сожалению, получить /9/, /10/ /т.е. совершить переход от эволюции моментов /7/ к x -представлению/ в явном виде не удастся. Для нахождения $f(x, Q^2)$ и $R(x, Q^2; Q_0^2)$ были развиты различные, как точные /3-7/, основанные, например, на представлении решения в виде ряда по тем или иным ортогональным полиномам

$$f(x, Q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(Q^2) P_k(x). \quad /11/$$

коэффициенты $f_k(Q^2)$ которого выражаются через $\langle f(Q^2) \rangle_n$, так и приближенные методы /8-15/. Из приближенных методов наиболее популярен вариационный метод пробных функций /8,10,11,13,14/: решение ищется в виде параметризации

$$f(x, Q^2) = f(x, \{a(Q^2)\}). \quad /12/$$

зависимость параметров которой $\{a(Q^2)\}$ определяется условием наилучшего воспроизведения Q^2 -эволюции, т.е., например, по минимуму

$$\phi(\{a(Q^2)\}) = \sum_n \left(\frac{\langle f(Q^2) \rangle_n - \langle f(\{a(Q^2)\}) \rangle_n}{\langle f(Q^2) \rangle_n} \right)^2, \quad /13/$$

где $\langle f(Q^2) \rangle_n$ дается /7/, а $\langle f(\{a(Q^2)\}) \rangle_n$ - моменты от /12/. Развитые методы зачастую оказываются довольно громоздкими и требуют значительных затрат времени при вычислении на ЭВМ.

Таким образом, путь от формулировки задачи до получения конкретного ответа выглядит так: задача \rightarrow аналитическое решение /точное или приближенное/ \rightarrow реализация на ЭВМ. Отметим, что при этом сколь угодно точное аналитическое выражение на ЭВМ вычисляется приближенно /с любой требуемой точностью/: функции заменяются соответствующими рядами, ряды и интегралы - конечными суммами и т.д. Поэтому вполне естественно возникает сомнение в необходимости промежуточного этапа /т.е. использования точных аналитических выражений/: может оказаться, что формулировка задачи сразу на языке вычислительных методов приведет к существенному упрощению и самого решения. В нашем случае основная проблема состоит в переходе от моментов, эволюция которых вычисляется явно, к самим функциям распределения /т.е.

в x -представление/. На ЭВМ вычисление момента /интеграла/ сводится к

$$\langle f \rangle_n = \int_0^1 dx \cdot x^{n-1} \cdot f(x) \approx \sum_{i=1}^N w_i x_i^{n-1} \cdot f(x_i), \quad /14/$$

где w_i и x_i - веса и узлы используемой квадратурной формулы /КФ/. Таким образом, задача формулируется в терминах значений $f(x_i)$ в узловых точках, а следовательно, и решение будет получено для этих значений. /Увеличивая N , можно сколь угодно близко подойти к любому желаемому x /. Далее, очевидно, следует рассмотреть N моментов, что дает систему линейных уравнений

$$\langle f \rangle = A \bar{f}, \quad /15/$$

где

$$\langle f \rangle = (\langle f \rangle_{n_1}, \dots, \langle f \rangle_{n_N}), \quad \bar{f} = (f(x_1), \dots, f(x_N)), \quad /16/$$

$$A_{ij} = w_i x_i^{n_j - 1}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad /17/$$

Решение этой системы $\bar{f}(x_i)$ и представляет собой приближенное решение для $f(x_i)$, причем любая требуемая точность может быть достигнута с увеличением N :

$$\max_i |f(x_i) - \bar{f}(x_i)| \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty. \quad /18/$$

Реально выбор N ограничен точностью представления чисел на ЭВМ, поскольку

$$\det A \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty. \quad /19/$$

т.е. с увеличением N задача переходит в разряд некорректных. Желание не привлекать достаточно громоздких методов регуляризации некорректных задач /16/ приводит к требованию высокой точности выбираемой КФ для сравнительно небольших N , где хорошо работают обычные способы обращения матрицы A . С этой точки зрения весьма естественно использование КФ типа Гаусса, точных для полиномов степени $2N-1$ с некоторым весом $\rho(x)^*$:

$$\int_0^1 dx \cdot \rho(x) \cdot P_{2N-1}^2(x) = \sum_{i=1}^N w_i P_{2N-1}^2(x_i). \quad /20/$$

* Можно, например, учитывая достаточно плавный характер эволюции по Q^2 , выбрать $\rho(x) = f(x, Q_0^2)$.

где веса w_i и узлы x_i определяются системой $2N$ уравнений

$$\sum_{i=1}^N w_i x_i^k = \rho_k \equiv \int_0^1 dx \cdot \rho(x) \cdot x^k, \quad k = 0, \dots, 2N - 1. \quad /21/$$

Отметим, что при таком выборе квадратурной формулы частный случай системы /15/ с $n = 2, \dots, N + 1$ эквивалентен нахождению решения в виде

$$\bar{f}(x) = \rho(x) P_{N-1}(x) \quad /22/$$

$P_{N-1}(x)$ единственным образом определяется по N значениям $\bar{f}(x_i)$, т.е., по сути дела, использованию представления /11/ при практическом применении которого суммирование, естественно, ограничено: $k = 0, \dots, N - 1$.

Итак, переход от моментов к x -представлению выглядит достаточно просто: для выбранных из условия достижения максимальной точности в требуемом диапазоне по x /см. ниже/ КФ /20/ и набора $\{n\}$

$$\bar{f} = A^{-1} \langle f \rangle, \quad /23/$$

где A^{-1} - матрица, обратная к /17/.

Приведем, для примера, результаты, полученные с использованием квадратурной формулы Гаусса ($\rho(x) \equiv 1$). Необходимые для вычисления /20/ веса w_i и узлы x_i определяются полиномами Лежандра $P_N(x)$ /17/:

$$w_i = \frac{1}{(1 - \bar{x}_i^2) (P'_N(\bar{x}_i))^2}, \quad x_i = \frac{\bar{x}_i + 1}{2}, \quad /24/$$

где \bar{x}_i - i -й нуль полинома $P_N(x)$. На рис. 1 и 2 представлены результаты восстановления функций вида

$$f(x) = x^\alpha (1-x)^\beta, \quad /25/$$

характерного для кварковых и глюонных распределений, по их моментам

$$\langle f \rangle_n = B(\alpha + n, \beta + 1), \quad /26/$$

соответствующие сравнительно небольшому значению $N = 10^*$. На рис. 1 приведены полученные значения $\bar{f}(x_i)$ и отношения $\gamma(x_i) = \bar{f}(x_i)/f(x_i)$. Видно, что для средних x точность не хуже 1%.

* Использование двойной точности /при 60-битовом машинном слове/ позволяет работать без регуляризаций вплоть до $N_{\max} \approx 20$.

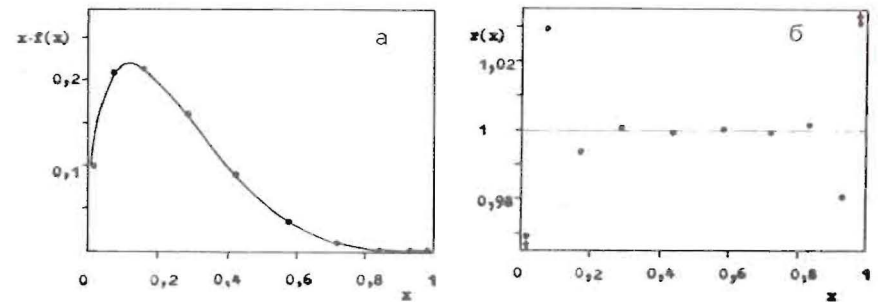


Рис. 1. Результаты восстановления функции /25/ по моментам /26/ с $n = 2, 4, \dots, 20$ / $\alpha = -0,5$, $\beta = 3,6$ /. Приведены абсолютные значения /а/ и отношения γ /б/.

Выбор $\{n\}$ определяет диапазон по x , в котором достигается максимальная точность: с увеличением n область по x смещается к 1. На рис. 2 изображены средние погрешности восстановления функций в диапазоне $0,05 \leq x_i \leq 0,9$ /экспериментально измеренные значения $0,05 \leq x \leq 0,7$ /

$$\epsilon = \left[\frac{1}{N_{x_i}} \sum_{x_i} \left(\frac{f(x_i) - \bar{f}(x_i)}{f(x_i)} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad /27/$$

для различных α и β при двух выборах $\{n\}$: $a/n = 2j$ и $b/n = j + 1$ / $j = 1, \dots, N$ /. Из рисунка видно, что разные $\{n\}$ дают хорошую точность в различных областях параметров α и β . Использование больших n в варианте /а/ позволяет продвинуться в область меньших α и больших β /т.е. функций с заметным подавлением области $x \rightarrow 1$, что типично для реальных ФР/ по сравнению с характерными для варианта /б/.

Таким образом, решение эволюционных уравнений сводится к восстановлению по моментам, Q^2 -эволюция которых имеет явный вид, функций распределения в узловых точках. Матрица перехода в x -представление не зависит от вида конкретной эволюции, что удобно для приложений: вычисления, например, в различных порядках по α_s проводятся с использованием универсальной /для выбранной квадратурной формулы и набора $\{n\}$ / матрицы A^{-1} .

В заключение несколько слов о "дискретности" подхода. Тот факт, что решения получаются в фиксированных точках x_i не является сильным ограничением: во-первых, как уже отмечалось, увеличивая N , можно приблизиться к любому x /в крайнем случае, воспользоваться подходящей интерполяцией/, а во-вторых, экспериментальные данные, приводящиеся обычно усредненными по достаточно широким интервалам x в "круглых" значениях /типа 0,05, 0,25 и т.д./, можно с тем же успехом сводить в "узловые" значения выбранной квадратурной формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липатов Л.Н. ЯФ, 1974, 20, с.181.
2. Altarelli G., Parisi G. Nucl.Phys., 1977, B126, p.298.
3. Gonzalez-Arroyo A., Lopez G., Yndurain F.J. Nucl.Phys., 1979, B153, p.161.
4. Gonzalez-Arroyo A., Lopez C. Nucl.Phys., 1980, B166, p.429.
5. Furmanski W., Petronzio R. Phys.Lett., 1980, 97B, p.437.
6. Curci G., Furmanski W., Petronzio R. Nucl.Phys., 1980, B175, p.27.
7. Furmanski W., Petronzio R. Nucl.Phys., 1982, B195, p.237.
8. Buras A.J., Gaemers K. Nucl.Phys., 1978, B132, p.249.
9. Field R.D. Preprint CALT-68-739, Pasadena, 1979.
10. Kato K., Shimizu Y. Preprint UT-336, Tokyo, 1980.
11. Bialas A., Buras A.J. Phys.Rev., 1980, D21, p.1825.
12. Lopez C., Yndurain F.J. Nucl.Phys., 1981, B183, p.157.
13. Златев И.С. и др. ЯФ, 1982, 35, с.454.
14. Бедняков В.А. и др. ЯФ, 1982, 36, с.745.
15. Gabellini Y. et al. Preprint N TH 82/3, Nice, 1982.
16. Тихонов А.Н. ДАН СССР, 1963, 151, с.501.
17. Справочник по специальным функциям. /Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган/. "Наука", М., 1979.

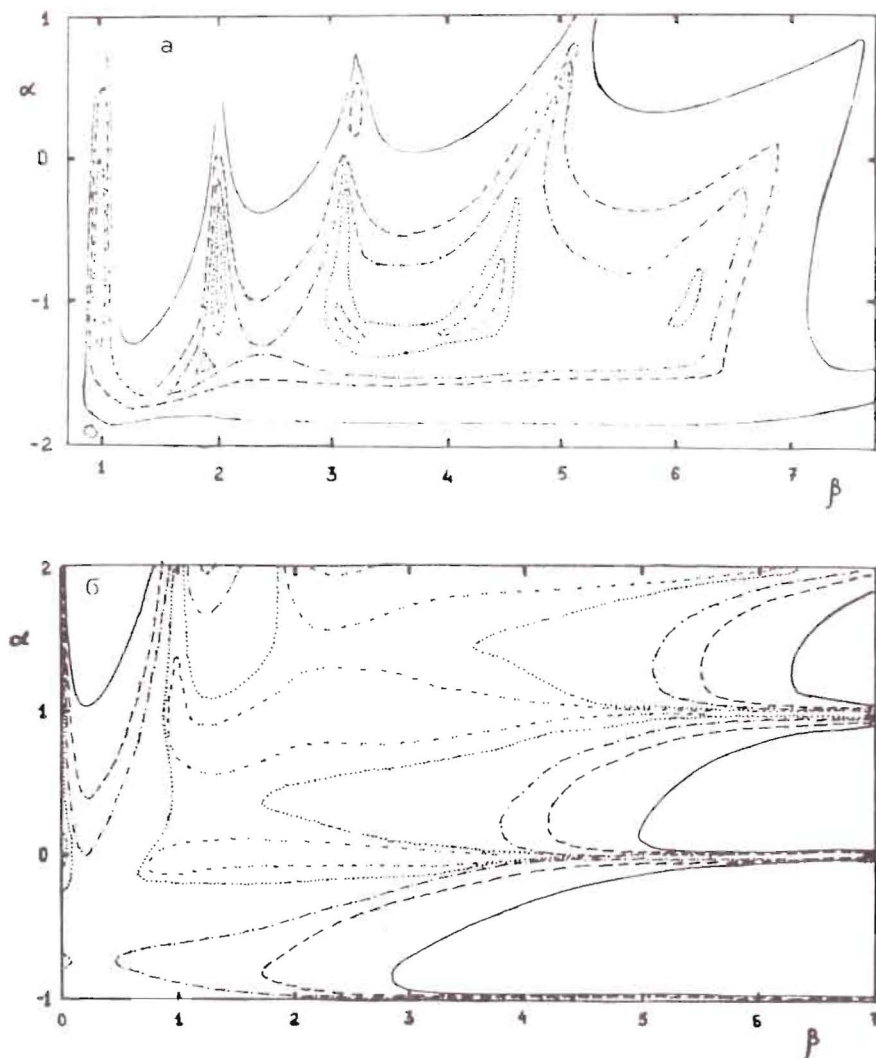


Рис.2. Средняя погрешность $\epsilon(a, \beta)$ для вариантов /а/ и /б/ выбора $\{n\}$ /см. текст/: — $\epsilon = 5\%$, - - - $\epsilon = 1\%$, - · - · - $\epsilon = 0,5\%$, ····· $\epsilon = 0,1\%$, - - - - $\epsilon = 0,05\%$.

Автор благодарит В.А.Беднякова, П.С.Исаева и С.Г.Коваленко за постоянный интерес к работе, а также Н.Б.Скачкова и Г.Тодорову за стимулирующие обсуждения.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июля 1985 года.