объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-504

М.И.Широков

ОБ АКАУЗАЛЬНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ФЕРМИОНА

Направлено в журнал
"Foundations of Physics"

1985

Введение

В релятивистской квантовой теории есть трудность, которая наиболее известна как проблема мгновенного расплывания пакета частицы. Если частица при $t=0$ была как-то локализована в конечной области V_s, то сразу же после этого, в момент $t>0$, она может быть в принципе обнаружена в области $V_{\mathcal{D}}$, удаленной от V_s на любое расстояние R, см., напр., /1–4/. Однако вероятность найти частицу в $V_{\mathcal{D}}$ при $t<R/c$ оказывается заметной лишь при t таком, что $|ct-R|$ по порядку величины равно комптоновской длине волны частицы λ, см. /3,4/, а также далее раздел 2. Поэтому проблема актуальна только для таких частиц, как фотон или нейтрино. Скорость распространения фотона исследовалась с 1930 г., причем в более реалистическом аспекте, чем в /1–4/. Например, вместо начального пакета фотона рассматривался атом, испускающий фотоны, начиная с $t=0$. Список соответствующих работ и их обсуждение см. в обзоре /5/. Сделанное в /5/ заключение таково: с некоторыми оговорками показано, что фотон не опережает световой фронт. Одна из оговорок гласит, что можно говорить лишь об опережении на комптоновскую длину волны электрона λ_e, если приход фотона в $V_{\mathcal{D}}$ регистрируется по изменению состояния электрона в $V_{\mathcal{D}}$ (см., напр., конец последнего приложения в /5/).

Здесь исследуется распространение легкого фермиона (нейтрино). Средствами локальной теории поля описывается источник нейтрино, локализованный в V_s, и детектор, регистрирующий нейтрино в $V_{\mathcal{D}}$. Показано, что результат получается качественно таким же, как для фотона: акаузальность связана только с характеристиками детектора (но не нейтрино) и ненаблюдаемо мала. Таким образом, оказывается принципиально важным включать в теорию распространения частицы описание детектора.

В разделе 4 обсуждается парадокс, связанный с толкованием плотности заряда. В других формах он был известен и раньше, но особенно резко проявляется в задаче о распространении. Источником его является то обстоятельство, что локальные заряженные поля распространяются не быстрее скорости света, а его кванты несколько опережают световой фронт.

1. Формулировки критерия релятивистской причинности

Простейшая формулировка критерия релятивистской причинности связана с расплыванием пакета.

Пусть φ_s описывает одну частицу, локализованную при $t=0$ в объеме V_s (в том смысле, что ее плотность вероятности равна нулю вне V_s). Тогда

$$|\langle \varphi_{\mathcal{D}} | \varphi_s(t)\rangle|^2 = \langle \varphi_s(t) | \varphi_{\mathcal{D}}\rangle \langle \varphi_{\mathcal{D}} | \varphi_s(t)\rangle = \langle \varphi_s(t) | P_{\mathcal{D}} | \varphi_s(t)\rangle \qquad (1)$$

есть вероятность того, что в момент $t>0$ можно обнаружить эту частицу в состоянии $\varphi_{\mathcal{D}}$, локализованном в $V_{\mathcal{D}}$. В (1) имеем $\varphi_s(t) = exp(-iHt)\,\varphi_s$, а $P_{\mathcal{D}} = |\varphi_{\mathcal{D}}\rangle\langle\varphi_{\mathcal{D}}|$ есть проектор на одночастичное состояние $\varphi_{\mathcal{D}}$. Согласно принципу релятивистской причинности, (1) должно равняться нулю при $t<R/c$.

Дадим обобщения этого критерия, которые используем в дальнейшем.

а). $P_{\mathcal{D}}$ в (1) можно заменить другими операторами $X_{\mathcal{D}}$. В теории поля они могут быть построены из операторов полей и их частей, рождающих и уничтожающих частицы (можно показать, что через них можно выразить и $P_{\mathcal{D}}$). $X_{\mathcal{D}}$ может быть, например, оператором числа частиц в $V_{\mathcal{D}}$ (см. раздел 3), интегралом по $V_{\mathcal{D}}$ от плотности заряда, от плотности гамильтониана и т.п. С такой заменой $\langle \varphi_s(t) | X_{\mathcal{D}} | \varphi_s(t)\rangle$ имеет смысл среднего числа частиц в $V_{\mathcal{D}}$ в момент t и т.д. Все эти средние тоже должны обращаться в нуль при $t<R/c$.

в). В более общем случае вероятность обнаружить частицу (или среднее число частиц и т.д.) в $V_{\mathcal{D}}$ в момент t может не равняться нулю, даже если вначале частицы в V_s не было. Например, частица может виртуально родиться в $V_{\mathcal{D}}$, если она взаимодействует с другими частицами. Такая вероятность будет называться фоном /5/. В дальнейшем под φ_s мы подразумеваем состояние, отличающееся от начального фонового φ_0 тем, что в V_s дополнительно имеется вначале одна частица. Отличие от нуля разности

$$\Delta X_{\mathcal{D}} = \langle \varphi_s(t) | X_{\mathcal{D}} | \varphi_s(t)\rangle - \langle \varphi_0(t) | X_{\mathcal{D}} | \varphi_0(t)\rangle \qquad (2)$$

целиком обязано начальной частице, локализованной в V_s. При $t<R/c$ (2) должно равняться нулю.

с). Можно переписать (2) в виде

$$\Delta X_{\mathcal{D}} = \langle \varphi_s | X_{\mathcal{D}}(t) | \varphi_s\rangle - \langle \varphi_0 | X_{\mathcal{D}}(t) | \varphi_0\rangle, \quad X_{\mathcal{D}}(t) = e^{iHt} X_{\mathcal{D}} e^{-iHt}, \qquad (3)$$

где $X_{\mathcal{D}}(t)$ есть гейзенберговский оператор. Форма (3) приспособлена для вычислений посредством решения гейзенберговских уравнений, а не уравнения Шредингера.

d). Состояние "Одна частица, локализованная в V_s" получается в результате некоторой процедуры его приготовления, идеализированное описание которой можно включить в теорию задачи /5/. В этой работе в уравнение для поля частицы вводится внешний источник η :

$$\left(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi(x,t) = \eta(x,t)\ , \quad \eta(x,t)=0\ ,\ t<0,\ x\notin V_S. \tag{4}$$

Источник начинает рождать частицы в V_S после момента $t=0$. Изменение наблюдаемой $X_\mathcal{D}$ в $V_\mathcal{D}$ теперь вычисляется по формуле

$$\Delta X_\mathcal{D} = \langle \varphi_0 \mid X'_\mathcal{D}(t) \mid \varphi_0 \rangle - \langle \varphi_0 \mid X_\mathcal{D}(t) \mid \varphi_0 \rangle, \tag{5}$$

где $X'_\mathcal{D}(t)$ есть гейзенберговский оператор в случае, когда в гейзенберговские уравнения введен член с источником η , $X_\mathcal{D}(t)$ – когда η не введено.

е). Приход начальной частицы ν в $V_\mathcal{D}$ может быть зарегистрирован по изменению состояния каких-то других частиц, которое происходит вследствие их взаимодействия с ν . Например, нейтральные частицы регистрируются с помощью заряженных. Можно в (3) и (5) заменить $X_\mathcal{D}$ операторами $Y_\mathcal{D}$, построенными из операторов других частиц. Конечно, $Y_\mathcal{D}$ должно быть в каком-то смысле локализовано в $V_\mathcal{D}$.

$$\Delta Y_\mathcal{D} = \langle \varphi_S \mid Y_\mathcal{D}(t) \mid \varphi_S \rangle - \langle \varphi_0 \mid Y_\mathcal{D}(t) \mid \varphi_0 \rangle \tag{3'}$$

$$\Delta Y_\mathcal{D} = \langle \varphi_0 \mid Y'_\mathcal{D}(t) - Y_\mathcal{D}(t) \mid \varphi_0 \rangle . \tag{5'}$$

Равенство нулю (3') и (5') при $t< R/c$ является общим критерием релятивистской причинности: никаких изменений в $V_\mathcal{D}$ по сравнению с фоновыми не должно быть до момента R/c .*)

Постановка задачи в форме (5') отличается от первоначальной (I) тем, что в теорию включено описание процедур приготовления частицы в V_S и ее регистрации в $V_\mathcal{D}$.

2. Скорость распространения нейтрино

Критерий релятивистской причинности в форме (I) непригоден для дираковского фермиона. Дело в том, что свободная дираковская частица не может быть локализована так, что ее плотность вероятности равна нулю вне конечного объема, см. приложение А. Относительно сходной трудности для фотона см. обзор /8/. При исследовании распространения фотона использовался, в частности, внешний ток, локализованный в V_S,

---

*) Литературная справка. Равенство нулю разностей (3) или (3') при $t< R/c$ предлагалось Найтом в/7/, но не в качестве критерия причинности, а как определение класса начальных состояний φ_S ("строго локализованные" состояния), которые не ведут к нарушению причинности. При этом Найт в качестве $X_\mathcal{D}$ или $Y_\mathcal{D}$ использовал только локальные операторы, построенные из $\psi(\bar x, t)$, $\bar x \in V_\mathcal{D}$, но не из частей $\psi(\bar x, t)$, рождающих частицы. В качестве φ_0 в /7/ использовалось только состояние физического вакуума.

как источник фотонов /5/. Здесь употребляется спинорный внешний источник η , см. (4).

а). Что касается детектора нейтрино в $V_\mathcal{D}$, то предположим сначала, что он описывается с помощью оператора

$$N_\mathcal{D} = \int_{V_\mathcal{D}} d^3x \sum_{\alpha=1}^{4} A^+_\alpha(x) A_\alpha(x) \quad , \quad \psi_\alpha(x) = A_\alpha(x) + B^+_\alpha(x), \tag{6}$$

где A_α есть часть оператора нейтринного поля ψ , уничтожающая нейтрино. Выясним физический смысл $N_\mathcal{D}$.

Нетрудно проверить, что среднее от $N_\mathcal{D}$ в произвольном однофермионном состоянии

$$\varphi_1 = \int d^3q \sum_{r=1,2} C(q,r)\, a^+_{q,r} |0\rangle = \int d^3x \sum_{\alpha=1}^{4} \varphi_\alpha(\bar x) A^+_\alpha(\bar x) |0\rangle \tag{7}$$

$$\varphi_\alpha(\bar x) = \int d^3p \sum_{r=1,2} C(p,r)\, u_\alpha(pr) \exp i(\bar p \bar x) \tag{8}$$

равно $\int_{V_\mathcal{D}} d^3x \sum_\alpha \varphi^*_\alpha(\bar x) \varphi_\alpha(\bar x)$, т.е. вероятности нахождения фермиона в $V_\mathcal{D}$. Точно такое же значение имеет среднее от $N_\mathcal{D}$ в состоянии, где есть один фермион и произвольное количество других частиц (в том числе антифермионов). Наконец, среднее от $N_\mathcal{D}$ в произвольном состоянии характеризует полное число фермионов этого состояния в $V_\mathcal{D}$, независимо от присутствия других частиц в состоянии.

Вычислим разность (5) в случае $X_\mathcal{D} = N_\mathcal{D}$

$$\Delta N_\mathcal{D} = \langle \varphi_0 \mid N'_\mathcal{D}(t) - N_\mathcal{D}(t) \mid \varphi_0 \rangle \tag{9}$$

$$N'_\mathcal{D}(t) = \int_{V_\mathcal{D}} d^3x\ A^+_\eta(\bar x,t) A_\eta(\bar x,t) \quad , \quad A_{\eta\alpha}(\bar x,t) = \int d^3x'\, \Pi_{\alpha\beta}(\bar x,\bar x')\, \psi_{\eta\beta}(\bar x',t), \tag{10}$$

$$(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m)\, \psi_\eta(x,t) = \eta(x,t). \tag{11}$$

Проектор Π выделяет из $\psi(x)$ часть $A(x)$, уничтожающую нейтрино. Его можно выразить через известную функцию S^+ , см. напр., гл. 8 в /6/.

$$\Pi(\bar x,\bar x') = -i\, S^+(\bar x,t;\bar x' t)\gamma_0 \ ; \quad \left[-i\, S^+(x,y)\gamma_0\right]_{\alpha\beta} =$$

$$= \int d^3p \sum_{r=1,2} u_\alpha(pr)\, u^*_\beta(pr) \exp i\bar p(\bar x - \bar y) \exp\left[-i\sqrt{p^2+m^2}\,(x_0-y_0)\right]. \tag{12}$$

Здесь $x \equiv (\bar x, x_0)$. "Фоновый" оператор $N_\mathcal{D}(t)$ в (9) образован из гейзенберговских операторов $\psi(\bar x,t)$, подчиняющихся свободному уравнению Дирака.

Для вычисления (9) нам нужно решение $\psi_\eta(\bar x,t)$ уравнения (II), выраженное через шредингеровские операторы $\psi_{Ш}(\bar x)$, $\forall \bar x$ или, что эквивалентно, через шредингеровские операторы рождения-уничтожения a^+_{pr}, $a_{pr}, \ldots$, поскольку $\psi_ш(\bar x)$ по ним разлагается (отметим, что $\psi_\eta(\bar x, t)$ и $\psi(x,t)$ при $t=0$ должны совпадать с одним и тем же шредингеровским оператором). Действительно, имея такое решение, мы можем вычислить (9), поскольку знаем, как действуют a^+_{pr}, a_{pr} на начальный вектор Φ_0, являющийся состоянием с определенным числом частиц, например, безнейтринным. Такое решение (II) можно записать в виде

$$\psi_\eta(x,t) = \psi^f(x,t) - \int_0^t dy_0 \int d^3y\, S^R(x-y)\,\eta(y), \tag{I3}$$

где $\psi^f(x,t)$ – решение свободного уравнения, выражающееся через a^+_{pr}, a_{pr} и антинейтринные операторы; S^R – запаздывающая функция. Действительно, (I3) удовлетворяет (II) с начальным условием $\psi_\eta(\bar x, 0) = \psi^f(\bar x, 0) = \psi_ш(\bar x)$.

Используя (I3) и соотношение $\psi(\bar x, t) = \psi^f(\bar x, t)$, получаем для (9)

$$\Delta N_D = \sum_{\alpha=1}^{4} \int_{V_D} d^3x \left| \int d^3x'\, \Pi_{\alpha\beta}(\bar x, \bar x') \int_0^t dy_0 \int_{V_S} d^3y\, S^R_{\beta\gamma}(x'-y)\,\eta_\gamma(y) \right|^2, \tag{I4}$$

если Φ_0 – безнейтринное состояние или любое такое (нормированное на единицу), что $\langle \Phi_0, \psi^f \Phi_0 \rangle = 0$.

Назовем "конусом V_S" (кратко C_S) множество точек x' таких, что все интервалы $(x'_\mu - x_{S\mu})^2$ временно-подобны по отношению к точкам $x_{S\mu} = (\bar x_S, x_0 = 0)$, $\bar x_S \in V_S$ и, кроме того, $x'_0 > 0$ (C_S – будущий конус V_S). Границу сечения C_S плоскостью $x'_0 = t$ назовем световым фронтом в момент t. Ввиду известных свойств S^R выражение $\int S^R(x'-y)\eta(y)d^4y$ не равно нулю только внутри C_S. При $t < R/c$ световой фронт не захватывает V_D, но функция $\Pi(\bar x, \bar x')$ не равна нулю при $\bar x \in V_D$ и x', принадлежащих сечению конуса C_S плоскостью $x'_0 = t$ (размер этого сечения превышает размер V_S на ct, так что $\min|\bar x' - \bar x_D| = R - ct$). Действительно,

$$\Pi(\bar x, \bar x') = i(i\gamma_\mu \partial_\mu + m_\nu)\gamma_0 \mathcal{D}^+(x-x') \big|_{x_0 = x'_0 = t}. \tag{I5}$$

При пространственно-подобных x и x', т.е. при $\Lambda = (x_0 - x'_0)^2 - (\bar r - \bar x')^2 < 0$ имеем /9/

$$\mathcal{D}^+(x-x') = \frac{i m_\nu}{4\pi^2 |\Lambda|} K_1(m_\nu \sqrt{|\Lambda|}). \tag{I6}$$

Отсюда при $x_0 = x'_0 = t < R/c$, когда $|\Lambda| \geq R - ct$, и при условии $|R - ct| >> \lambda_\nu = 1/m_\nu$ получаем

$$\mathcal{D}^+(x-x') \cong \frac{i}{4\pi\sqrt{2\pi}} \frac{1}{R-ct} \sqrt{\frac{1}{\lambda_\nu (R-ct)}} \exp[-(R-ct)/\lambda_\nu]. \tag{I7}$$

Таким образом, хотя разность $A^+_\eta A_\eta - A^+ A$, см. (9)-(I0), не равна нулю всюду вне светового фронта при $t < R/c$, однако заметную величину она имеет только на расстоянии порядка λ_ν вне его, убывая далее быстрее экспоненты, см. (I5)-(I7). Поэтому ΔN_D при $t < R/c$ имеет заметную величину, только если $R - ct$ сравнимо с λ_ν (см. также приложение Б).

в). Из предыдущего следует, что релятивистская причинность не нарушается, если в V_D измеряются локальные наблюдаемые, выражающиеся через $\psi(\bar x, t)$, $\bar x \in V_D$. Например, пусть измеряется нейтринный "заряд", соответствующий оператору

$$Q_D = \int_{V_D} d^3x\, \rho(\bar x, t), \qquad \rho(x) = \frac{1}{2} \sum_\alpha [\psi^+_\alpha(x)\psi_\alpha(x) - \psi_\alpha(x)\psi^+_\alpha(x)]. \tag{I8}$$

Тогда для ΔQ_D получается формула, отличающаяся от (I4) только отсутствием $\int d^3x'\, \Pi(\bar x, \bar x')$ под знаком модуля. В результате $\Delta Q_D = 0$ при $t < R/c$.

с). В действительности нейтрино наблюдаются только с помощью их взаимодействий, в результате которых получаются заряженные частицы, наблюдаемые по их трэкам. Введем в расчет описание детектора, который регистрирует именно нейтрино, не реагируя на антинейтрино. Примером может служить детектор, использующий реакцию

$$\nu + Cl \to Ar + e^-. \tag{I9}$$

Он применялся для регистрации солнечных нейтрино, см. напр., гл. II.2 в /I0/. Мы опишем простейшую реакцию вида (I9): $\nu + n \to p + e^-$, нейтрино регистрируются по протонам или электронам. В отличие от Cl, свободный нейтрон нестабилен, но протоны и электроны от $n \to p + e^- + \bar\nu$ составляют фон, который нами учитывается (вычитается).

Будем предполагать, что число протонов (или электронов), наблюдаемых в V_D, описывается с помощью формул (6), (I0), (I2) *). Как и в пункте а), это означает использование корпускулярной интерпретации, основанной на свободных уравнениях для частиц. Но теперь она применяется к полям ψ_p и ψ_e частиц заряженных и тяжелых (по сравнению с нейтрино).

Теперь теория должна содержать кроме нейтринного поля ψ_ν еще поля нейтронное ψ_n, протонное ψ_p, электронное ψ_e и взаимодействие, ответственное за $\nu + n \to p + e^-$. Для наших целей достаточно взять его в феноменологическом четырехфермионном виде /I0/

---

*) Невозможно обойтись без тех или иных предположений о регистрирующем приборе. Из квантовой теории измерений известно, что средствами квантовой механики можно только частично описать его устройство.

$$H_I = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar\psi_p Q \psi_n \; \bar\psi_e O \psi_\nu + \bar\psi_n Q \psi_p \; \bar\psi_\nu O \psi_e \right] \tag{20}$$

(имеется в виду $V-A$ вариант). Нейтрино рождается в V_s внешним источником, как и раньше (в гамильтониан введены члены $\bar\eta \psi_\nu + \bar\psi_\nu \eta$). Пусть Φ_0 описывает состояние "Один нейтрон, других частиц нет". Вычислим изменение $\Delta N_{\mathcal{D}}^p$ числа протонов в $V_{\mathcal{D}}$, происходящих от $\nu + n \to p + e^-$

$$\Delta N_{\mathcal{D}}^p = \langle \Phi_0 \,|\, N_{\mathcal{D}\eta}^p(t) - N_{\mathcal{D}}^p(t) \,|\, \Phi_0 \rangle = \int d^3x \int d^3x' \int d^3x'' \tag{21}$$

$$\Pi_p^+(\bar x, \bar x') \, \Pi_p(\bar x, \bar x'') \, \langle \Phi_0 \,|\, \psi_{p\eta}^+(x') \psi_{p\eta}(x'') - \psi_p^+(x') \psi_p(x'') \,|\, \Phi_0 \rangle$$

(здесь $x_0' = x_0'' = x_0 = t$). Гейзенберговские уравнения имеют вид

$$(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m_\nu) \psi_{\nu\eta} = \eta - G/\sqrt{2} \; O \psi_{e\eta} \left[\bar\psi_{n\eta} Q \psi_{p\eta} \right], \tag{22}$$

$$(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m_p) \psi_{p\eta} = - G/\sqrt{2} \; Q \psi_{n\eta} \left[\bar\psi_{e\eta} O \psi_{\nu\eta} \right]. \tag{23}$$

Уравнения для $\psi_{e\eta}$ и $\psi_{n\eta}$ аналогичны (23). Уравнения для фоновых операторов отличаются от выписанных только отсутствием члена η в уравнении для ψ_ν. Перепишем (22), (23) в интегральной форме, см., напр.,/II,I2/

$$\psi_{\nu\eta}(x) = \psi_\nu^f(x) - \int_0^t dy_0 \int d^3y \; S_\nu^R(x-y) \eta(y) + \tag{22'}$$

$$+ g \int_0^t dy_0 \int d^3y \; S_\nu^R(x-y) O \psi_{e\eta}(y) \left[\bar\psi_{n\eta}(y) Q \psi_{p\eta}(y) \right],$$

$$\psi_{p\eta}(x) = \psi_p^f(x) + g \int d^4y \; S_p^R(x-y) Q \psi_{n\eta}(y) \left[\bar\psi_{e\eta}(y) O \psi_{\nu\eta}(y) \right]. \tag{23}$$

Здесь ψ^f есть решения соответствующих свободных уравнений Дирака и $g = + G/\sqrt{2}$. Для решения (22'), (23'), (т.е. для выражения ψ через ψ^f, см. пункт а) применяем теорию возмущений. Разложения

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^\infty g^n \psi^{(n)}(x)$$

подставляются в (22'), (23') и т.п. и собираются члены при одинаковых степенях g (Г.Чаллен, ср. конец § 23 книги /I3/). Получаем

$$\psi_{\nu\eta}^{(0)} = \psi_\nu^f + \int S_\nu^R \eta \,, \qquad \psi_\nu^{(0)} = \psi_\nu^f \tag{24}$$

$$\psi_{p\eta}^{(0)} = \psi_p^f = \psi_p^{(0)} \,, \qquad \psi_{e\eta}^{(0)} = \psi_e^f = \psi_e^{(0)} \tag{25}$$

$$\psi_{\nu\eta}^{(1)} = \int S_\nu^R \, O \psi_e^f \left[\bar\psi_n^f Q \psi_p^f \right] = \psi_\nu^{(1)} \tag{26}$$

$$\psi_{p\eta}^{(1)} = \int S_p^R \, Q \psi_n^f \left[\bar\psi_e^f O \psi_{\nu\eta}^{(0)} \right]. \tag{27}$$

Поскольку $\psi_{\nu\eta}^{(0)}$ не совпадает с $\psi_\nu^{(0)}$ см. (24), то $\psi_{p\eta}^{(1)}$ отличается от $\psi_p^{(1)}$:

$$\psi_{p\eta}^{(1)}(x) - \psi_p^{(1)}(x) = \int d^4y \; S_p^R(x-y) Q \psi_n^f(y) \left[\bar\psi_e^f(y) O \int d^4z \; S_\nu^R(y-z) \eta(z) \right]. \tag{28}$$

Здесь $\bar z \in V_s$ и $\bar x \in V_{\mathcal{D}}$. Функция $S_\nu^R(y-z)$ не равна нулю только при $y \in C_s$. При таких y функция $S_p^R(x-y)$ не равна нулю только при x, принадлежащих тому же конусу C_s. Поэтому (28) равно нулю вне C_s. Аналогично получаем, что $\psi_{n\eta}^{(1)} = \psi_n^{(1)}$ и $\psi_{e\eta}^{(1)} = \psi_e^{(1)}$ вне C_s. Пользуясь при $n \geq 2$ формулами вида

$$\psi_\nu^{(n)} = \int S_\nu^R \sum_{i+k+l=n-1} O \psi_e^{(i)} \left[\bar\psi_n^{(k)} Q \psi_p^{(l)} \right], \tag{29}$$

по индукции доказываем, что $\psi_\eta^{(n)} = \psi^{(n)}$ вне C_s при $n = 1, 2,$ Поэтому изменение $\rho_{p\eta}(x) - \rho_p(x)$ плотности

$$\rho_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^4 \left[\psi_{p\alpha}^+(x) \psi_{p\alpha}(x) - \psi_{p\alpha}(x) \psi_{p\alpha}^+(x) \right] \tag{30}$$

при $\bar x \in V_{\mathcal{D}}$ и, соответственно изменение протон-антипротонного заряда $\Delta Q_{\mathcal{D}}$ равны нулю при $t < R/c$ во всех порядках теории возмущений.

Для обсуждения изменения числа протонов $\Delta N_{\mathcal{D}}^p$, см. (2I), мы должны учесть не только наличие Π_p в (2I), ср. пункт а, но и присутствие нейтрона в Φ_0. Ограничимся первым неисчезающим приближением теории возмущений. Вставляя в (2I) разложения

$$\psi_{p\eta} = \psi_p^f + g \psi_{p\eta}^{(1)} + g^2 \psi_{p\eta}^{(2)} \,, \quad \psi_p = \psi_p^f + g \psi_p^{(1)} + g^2 \psi_p^{(2)},$$

получаем, что $\Delta N_{\mathcal{D}}^p$ состоит из суммы нескольких членов порядка g^2. Обсудим только один член, для вычисления которого достаточно знать $\psi_{p\eta}^{(1)}$ и $\psi_p^{(1)}$, см. (27) и (28). Он имеет вид

$$g^2 \langle \Phi_0 \,|\, R_p^+ R_p \,|\, \Phi_0 \rangle, \tag{31}$$

$$R_p = \int d^3y \; S_p^+(x-y) Q \psi_n^f(y) \left[\bar\psi_e^f(y) O \int d^4z \; S_\nu^R(y-z) \eta(z) \right]. \tag{32}$$

Мы заменили $\Pi_p S_p^R$ на S_p^+, см. дополнение Б. Главный вклад в (3I) дает часть оператора ψ_n^f из R_p, уничтожающая нейтрон в Φ_0. Этот вклад содержит интеграл

$$\int_0^t dy_0 \exp(i\sqrt{p^2+m_p^2}\, y_0) \exp(-iE_n y_0) \exp(i\sqrt{s^2+m_e^2}\, y_0) \ldots \tag{33}$$

E_n – энергия нейтрона, не выписаны факторы от $S_\nu^R(y-z)$. Интеграл (33) дает приблизительное выполнение сохранения энергии $E_\nu + E_n \cong E_p + E_e$ (при $ct \gg 1/m_p$, ср. § 29 в /I4/). Поэтому обсуждаемый вклад гораздо больше, чем то, что дает часть ψ_n^f, рождающая антинейтрон (и что фактически не зависит от присутствия начального нейтрона).

Эта часть ответственна за появление p и e^- за счет процесса $\nu \to \bar{n} + p + e^-$. Заметим, что в нашей задаче законы сохранения энергии-импульса не запрещают этот процесс, но только подавляют его. Действительно, рожденные в V_S нейтрино не обладают определенным импульсом, включаемый источник η может испускать нейтрино больших энергий.

Если начальный нейтрон описывается плоской волной, то главный вклад в (3I) описывает появление протонов в $V_{\mathcal{D}}$ при $t < R/c$ за счет следующего "механизма": протон появляется от реакции $\nu + n \to p + e^-$ в точках $y \in C_S$ и акаузально распространяется в $V_{\mathcal{D}}$ посредством функции Π_p в (2I) или $S_p^+(x-y)$ в (32).

Если начальный нейтрон в основном сосредоточен внутри $V_{\mathcal{D}}$, то реакция $\nu + n \to p + e^-$ происходит не ранее, чем конус C_S накроет нейтрон (ввиду наличия функции $S_\nu^R(y-z)$ в (32)). Акаузальное появление протонов в $V_{\mathcal{D}}$ теперь обусловлено только тем, что вероятность нахождения нейтрона вне $V_{\mathcal{D}}$ не может быть нулевой. Она может только экспоненциально быстро спадать вне $V_{\mathcal{D}}$, причем скорость спадания определяется комптоновской длиной волны нейтрона λ_n, см. приложение А.

В обоих случаях результаты качественно совпадают: получается опережение светового фронта на комптоновскую длину волны нуклона, т.е. $\Delta N_{\mathcal{D}}^p$ гораздо меньше, чем $\Delta N_{\mathcal{D}}^\nu$, см. пункт а.

Аналогично вычисляется изменение числа электронов в $V_{\mathcal{D}}$ от реакции $\nu + n \to p + e^-$. Если начальный нейтрон описывается плоской волной, то электроны опережают световой фронт эффективно на $\lambda_e \ll \lambda_\nu$.

Итак, в проведенном расчете распространение нейтрино от V_S к $V_{\mathcal{D}}$ описывается фактически функцией S_ν^R, а не S_ν^+, см. приложение Б. Вся акаузальность теперь связана с характеристиками частиц, с помощью которых детектируется нейтрино (n, p, e).

г). В этой работе не обсуждается еще одна возможная причина акаузальности. А именно, в случае распространения фотона показано (см. /I5/ и конец раздела 2 в /5/), что если источник фотонов в V_S таков, что испускается в основном один фотон (φ_S описывает возбужденный атом), то в $V_{\mathcal{D}}$ изменяются ранее момента R/c даже такие локальные величины, как электрическое поле или плотность заряда.

3. О толковании $\rho(x)$ как плотности заряда

Из расчетов предыдущего раздела вытекает следующий парадокс. Изменение плотности (30) строго равняется нулю при $\vec{x} \in V_{\mathcal{D}}$ и $t < R/c$. Изменение же числа $\Delta N_{\mathcal{D}}^p$ протонов в $V_{\mathcal{D}}$ гораздо больше, чем изменение числа антипротонов $\Delta N_{\mathcal{D}}^{\bar{p}}$. Действительно, протоны появляются

за счет $\nu + n \to p + e^-$, антипротоны же могут появляться только с малой вероятностью за счет $\tilde{\nu} \to n + \bar{p} + e^+$, например, (напомним, что локальный источник η рождает как ν, так и $\tilde{\nu}$). Проиллюстрируем, как неравенство $\Delta N_{\mathcal{D}}^p \gg \Delta N_{\mathcal{D}}^{\bar{p}}$ следует из наших расчетов. Разность $\Delta N_{\mathcal{D}}^{\bar{p}}$ содержит соответствующий (3I) член, в котором вместо R_p фигурирует оператор $R_{\bar{p}}$, отличающийся от R_p только заменой $S_p^+(x-y)$ на $S_p^-(x-y)$, в результате чего вместо (33) будем иметь

$$\int_0^t dy_0 \exp\left[-i\sqrt{p^2+m_p^2}\, y_0 - iE_n y_0 + i\sqrt{s^2+m_e^2}\, y_0\right] \ldots \qquad (34)$$

Подынтегральное выражение в (34) осциллирует гораздо быстрей, чем в (33), и поэтому (34) гораздо меньше, чем (33).

Такой же парадокс имеет место и для электронов: при $t < R/c$ имеем $\Delta N_{\mathcal{D}}^{e^-} \gg \Delta N_{\mathcal{D}}^{e^+}$, хотя изменение электрон-позитронного заряда в $V_{\mathcal{D}}$ равно нулю.

Это теоретическое противоречие имеет аналогии. Дирак в /I6/ указал, что хотя среднее от $\rho(x)$ в вакууме $|0\rangle$ равно нулю, среднее квадратичное отклонение от него не может равняться нулю, поскольку $|0\rangle$ не является собственным вектором $\rho(x) = A^+A + A^+B^+ - AB - B^+B$. Дирак замечает: "мы получили явно парадоксальный результат: хотя состояние вакуума определено как состояние без электронов и позитронов, все же оно имеет ненулевую плотность заряда".

Другой пример: возьмем состояние $\varphi = |0\rangle + |e^+e^-\rangle$, являющееся суперпозицией вакуумного состояния и состояния из пары плоских волн электрона и позитрона. Можно ожидать, что φ описывает состояние такое, что заряд в любой малой области V равен нулю. Однако $\langle\varphi|\rho(x)|\varphi\rangle \neq 0$.

Известна попытка объяснения этих парадоксов флуктуационными явлениями (см., напр., гл. 7 6 в /6/ и 7 в /I7/): если в акте измерения система концентрируется в малом объеме, то порождаются пары. Не останавливаясь на критике этого объяснения, заметим, что оно неприменимо к нашему примеру: в $V_{\mathcal{D}}$ при $t < R/c$ есть избыток частиц над античастицами, а полный заряд в $V_{\mathcal{D}}$ равен нулю.

Предлагается следующее логическое разрешение этих теоретических противоречий: толкование $\rho(x)$ как оператора плотности заряда несовместимо с существующей корпускулярной интерпретацией теории, в частности, с толкованием $A^+(x)A(x)$ и $B^+(x)B(x)$ как плотностей числа фермионов и антифермионов соответственно (совместны только толкования $\int d^3x\, \rho(x)$ как полного заряда и $\int d^3x\, A^+A$, $\int d^3x\, B^+B$ как полных чисел фермионов и антифермионов). Относительно толкования $A^+(x)A(x)$ см. выше пункт 2а и /I8/.

Заключение

В этой работе осуществлено описание "приготовления" нейтрино в V_1 и его регистрации в V_2. Получен практически причинный результат: можно говорить об опережении светового фронта только на величину λ, комптоновскую длину волны частиц, применяемых для локализации нейтрино в V_2 (нейтрон, протон, электрон).

В теоретическом аспекте существенным и естественным представляется тот факт, что величина акаузального эффекта зависит от прибора, локализующего распространяющуюся частицу. Поэтому можно думать, что нельзя обсуждать свойства локализуемости частицы (и в частности ее оператор координаты), ограничиваясь рамками свободного уравнения для частицы (или, что эквивалентно, неприводимого представления группы Пуанкаре с определенной массой). Следует включить в рассмотрение какое-то идеализированное описание локализующего прибора (настоящая работа является примером такого подхода). Это мнение подкрепляется опытом сотен работ, в которых показывалось, что невозможно удовлетворить всем естественным требованиям к понятию координаты в рамках свободного уравнения, см. обзоры /8,19/. Пространственное расположение локализующего прибора описывалось здесь с помощью обычной координаты $\bar{x}$ пространства Минковского (ср. /20/), которая одновременно используется в обозначении $\psi(\bar{x})$ для оператора поля.

Приложение А

Покажем, что вне некоторого конечного объема V не могут одновременно равняться нулю все четыре компоненты $\varphi_\alpha(\bar{x})$ произвольного положительно-энергетического дираковского спинора (8). Имеем, см. (8),

$$\begin{pmatrix} u_3(pr) \\ u_4(pr) \end{pmatrix} = \frac{\bar{\sigma}\bar{p}}{\sqrt{p^2+m^2}+m} \begin{pmatrix} u_1(pr) \\ u_2(pr) \end{pmatrix}. \tag{A.I}$$

Если первые две компоненты $\varphi_{1,2}(x)$ обращаются в нуль вне V, то их фурье-образы $\sum_r c(p,r)u_{1,2}(pr)$, см. (8), должны быть целыми функциями комплексных переменных p_x, p_y, p_z. Но $c(pr)u_{3,4}$ отличаются от $c(pr)u_{1,2}$ неаналитическим множителем, см. (A.I), и поэтому $\varphi_{3,4}(x)$ не могут обращаться в нуль вне V. Подбором $c(p,r)$ можно сделать $\varphi_{3,4}$ финитными функциями, но тогда не могут быть финитными $\varphi_{1,2}$. Поэтому плотность вероятности $\rho(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha^*(x)\varphi_\alpha(x)$ не может обращаться в нуль вне конечного объема.

Выясним, какая максимальная локализация $\rho(x)$ достижима. С помощью формулы (8) и ее обращения выразим $\varphi_{3,4}(x)$ в виде свертки $\varphi_{1,2}(y)$ с производными (по x_1, x_2, x_3) от $G(\bar{x}-\bar{y})$:

$$G(\bar{x}) = \int d^3p\, e^{i\bar{p}\bar{x}} \left[\sqrt{p^2+m^2}+m\right]^{-1}. \tag{A.2}$$

После интегрирования по углам $\bar{p}$ получаем

$$G(\bar{x}) = G(r) = -\frac{2\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipr}\left[\sqrt{p^2+m^2}+m\right]^{-1}, \quad r \equiv |\bar{x}|. \tag{A.3}$$

Замена пути интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на участок $(im, i\infty)$ мнимой полуоси (ср. раздел 2 в /4/) приводит к неосциллирующему подынтегральному выражению

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipr}\left[\sqrt{p^2+m^2}+m\right]^{-1} = 2\int_m^\infty dq\, e^{-qr}\sqrt{q^2-m^2}/q^2, \tag{A.4}$$

для которого можно дать простые оценки сверху и снизу с помощью неравенств $(q-m)/q^2 < \sqrt{q^2-m^2}/q^2 < 1/q$. При $mr \gg 1$ имеем

$$e^{-mr}/(mr)^2 < \int_m^\infty dq\, e^{-qr}\sqrt{q^2-m^2}/q^2 < e^{-mr}/mr. \tag{A.5}$$

Ввиду этого, если $\varphi_{1,2}(\bar{x}) = 0$ вне малого объема V около начала координат, то $\varphi_{3,4}(\bar{x})$ не могут убывать вне V быстрее $\exp(-m|\bar{x}|)/(m|\bar{x}|)^3$. В этом смысле можно сказать, что $\rho(x)$ не может быть "эффективно локализована" в области с размером, меньшим, чем $\lambda = 1/m$.

Приложение Б.

Выражение (14) для ΔN_2 может быть упрощено. Поскольку по y_0 мы интегрируем от 0 до t, то можно заменить под интегралом S^R на S. Далее имеем

$$\begin{aligned}\int d^3x'\, \Pi(\bar{x},\bar{x}')S(x'-y) &= \int d^3x' \left[-iS^+(\bar{x},t;\bar{x}',t)\gamma_0\right]\left[S^+(x'-y)+S^-(x'-y)\right] = \\ &= -iS^+(\bar{x},t;\bar{y},y_0).\end{aligned} \tag{Б.1}$$

Здесь использовано (12), аналогичное соотношение

$$\left[-iS^-(x-y)\gamma_0\right]_{\alpha\beta} = \int d^3p \sum_{r=1,2} v_\alpha(pr)v_\beta^*(pr)\exp\left[-i\bar{p}(\bar{x}-\bar{y}) + i\sqrt{p^2+m^2}(x_0-y_0)\right] \tag{Б.2}$$

и соотношения ортонормировки для u и v. Поэтому

$$\Delta N_2 = \sum_{\alpha=1}^4 \int_{V_2} d^3x \left|\int_0^t dy_0 \int d^3y\, S^+_{\alpha\beta}(x-y)\eta_\beta(y)\right|^2. \tag{Б.3}$$

Используя далее формулу $S^{+} = -(i\gamma_\mu \partial_\mu + m)\, \mathcal{D}^{+}$ и интегрирование по частям, можно сделать более явной пропорциональность ΔN_2 квадрату модуля функции $\mathcal{D}^{+}$.

Литература

1. G.Hegerfeldt, S.Ruijsenaars. Phys.Rev. 1980, D22, 377.
2. B.Skagerstam. Intern.Journ.Theor.Phys. 1976, 15, 213.
3. S.Ruijsenaars. Ann. of Phys. 1981, 137, 33.
4. М.И.Широков. ОИЯИ Е-1252, Дубна 1963.
5. М.И.Широков. УФН, 1978, 124, 697.
6. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИИЛ, М., 1963.
7. J.Knight. Journ.Math.Phys. 1961, 2, 459.
8. J.Niederle. Localizability of Particles, p. 329 in: Proc. Conf. on Hadron Structure 76, Smolenice, Bratislava VEDA 1976.
9. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1973, § 15.
10. E.Commins, P.Bucksbaum. Weak interactions of lepton and quarks. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1983.
11. G.Källen, p. 243 in: Lectures in Theor.Phys. Brandeis Summer Inst. 1961 v. 1, Benjamin N.Y. 1962.
12. И.В.Полубаринов, Сообщения ОИЯИ Р2-7896, Дубна 1974.
13. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз. М., 1959.
14. Л.Шифф. Квантовая механика, ИИЛ, М., 1957.
15. M.Shirokov. Found. of Phys. 1981, 11, 21.
16. П.Дирак. Принципы квантовой механики. "Наука", М., 1979, § 81.
17. В.Тирринг. Принципы квантовой электродинамики. "Высшая школа", М., 1964.
18. A.S.Wightman, S.S.Schweber. Phys.Rev. 1955, 98, 812.
19. A.J.Kalnay. The localization Problem, pp. 93-110 in: Problems in the Found. of Phys. ed. M.Bunge, Springer-Verlag, Berlin 1971.
20. A.Broyles. Phys.Rev. 1970, D1, 979.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1985 года

Широков М.И. Р2-85-504

Об акаузальном распространении фермиона

Исследуется распространение легкого фермиона /нейтрино/ с массой $m_\nu \neq 0$ из области V_s, где он начинает рождаться, начиная с $t=0$. Если используется стандартное описание локализации фермиона, то оказывается, что нейтрино можно найти в области V_D, удаленной от V_s на расстояние R, при $t<R/c$, хотя заметную вероятность это акаузальное явление имеет только, если $|ct-R| - \lambda_\nu = h/m_\nu c$. Оно известно как "мгновенное расплывание пакета". Рассмотрена локализация нейтрино в V_D с помощью реакции $\nu + n \to p + e^-$ и детектирования p и e^-. Показано, что акаузальность резко уменьшается: она проявляется только при $|ct-R| - \lambda_n$, где λ_n - комптоновская длина волны нуклона. Это ненаблюдаемо, если p и e^- регистрируются по их трекам, размеры которых $\gg \lambda_n$. Результат получен посредством решения гейзенберговских уравнений локальной релятивистской теории поля с четырехфермионным взаимодействием и с использованием приема вычитания "теоретического фона".

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой