объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-481

О.К.Пашаев, С.А.Сергеенков*

НЕЛИНЕЙНЫЕ σ-МОДЕЛИ С НЕКОМПАКТНОЙ ГРУППОЙ СИММЕТРИИ И ТЕОРИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

Направлено в "Physica A"

* Днепропетровский государственный университет

1985

Среди огромного числа работ по исследованию σ-моделей в последнее время большой интерес вызывают поля, принимающие значения на некомпактных многообразиях[1]. Они возникают в теории гравитации[2] и расширенной супергравитации[3], в теории андерсоновской локализации[4] и в струнных моделях[5]. Как известно, гамильтониан гайзенберговского магнетика имеет вид $O(3)$ нелинейной σ-модели[6]. Возникает вопрос: если сформулировать аналог модели Гайзенберга на некомпактном многообразии в виде, скажем, простейшей $O(2,1)$ σ-модели, то какой физический системе она могла бы соответствовать ? Проще всего исследование этого вопроса провести для случая одного пространственного измерения, так как при этом изотропная модель Гайзенберга становится интегрируемой системой[7]. Изучение классических интегрируемых систем показывает, что, как правило, квазиклассический спектр возбуждений системы совпадает с точным квантовым, а также позволяет применить технику квантового метода обратной задачи[29]. Кроме того, в теории интегрируемых систем имеется замечательное понятие калибровочной эквивалентности, которое позволяет связать между собой ряд интегрируемых систем. В рамках калибровочной эквивалентности была установлена связь $O(3)$ континуальной модели Гайзенберга, описываемой изотропным уравнением Ландау-Лифшица, с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) притягивающегося типа[8,9]. Для модели, описываемой уравнением Ландау-Лифшица с одноосной анизотропией типа "легкая ось", можно показать калибровочную эквивалентность с изотропной моделью Гайзенберга[10] и с НУШ притягивающегося типа[11-13]. При такой эквивалентности, однако, многообразие для "спинового" вектора $\vec{S}$ в изотропной модели Гайзенберга зависит от знака анизотропии в соответствующей анизотропной модели[10]. Например, при рассмотрении анизотропной модели с анизотропией типа "легкая плоскость" (при условии $\vec{S}^2 = 1$), калибровочно-эквивалентная ей изотропная модель Гайзенберга определена на некомпактном многообразии $M \subset SL(2,C)/U(1)$ [10], а соответствующее НУШ описывает смесь двух бозе-газов притягивающегося и отталкивающегося типов[14,15]. При этом притягивающийся газ образует конфигурации, подстраивающиеся под отталкивающийся газ, что приводит к экзотической модификации НУШ[16]. Возникает резонный вопрос, какая модель Гайзенберга отвечает НУШ отталкивающегося типа ? Как было показано в работах[17,18], соответствующая модель, описываемая изотропным уравнением Ландау-Лифшица, определена на некомпактном многообразии постоянной отрицательной кривизны $SU(1,1)/U(1)$.

В настоящей работе мы покажем, как, используя калибровочную эквивалентность, можно найти классические решения $SU(1,1)/U(1)$ изотропной модели Гайзенберга. Мы приведем решения в виде "спиновых волн", описывающие прецессию вектора $\vec{S}$ на поверхности гиперболоида вокруг оси z, а также отклонения от плоскости вращения, описываемые солитонами дырочного типа. Будут вычислены интегралы движения числа частиц, импульса и энергии и соответствующие спектры. Покажем, что спектр спиновых волн определяется боголюбовской дисперсией (как в теории слабонеидеального бозе-газа), а солитонный спектр имеет два интересных предельных случая. В одном из них (когда движение происходит вблизи минимума верхней полы гиперболоида) воспроизводится спектр солитона из $O(3)$ модели Гайзенберга, совпадающий с полученным Бете[6]. В другом (отвечающем неограниченной длине вектора $\vec{S}$), наш спектр совпадает со спектром спиновых волн в антиферромагнетике[19]. Это дает основание считать, что рассматриваемая ниже модель имеет и более непосредственный физический смысл*). Аналогия с антиферромагнетиком при растущих значениях $|\vec{S}|$ еще более подкрепляется тем, что в этом случае полная намагниченность системы равна нулю. Кроме того, как показано в недавней работе Маханькова и авторов[20], классическая динамика линеаризованного двухподрешеточного антиферромагнетика реализуется в виде гармонического движения в плоскости Лобачевского - пространстве постоянной отрицательной кривизны.

I. Уравнения движения для рассматриваемой модели имеют вид изотропного уравнения Ландау-Лифшица для матрицы S :

$$S_t = \frac{1}{2i}\left[S, S_{xx} \right], \tag{1}$$

где

$$S(x,t) = \begin{pmatrix} S^z & iS^- \\ iS^+ & -S^z \end{pmatrix} \in SU(1,1),$$

$$S^{\pm} = S^x \pm i S^y ,$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\det S = -1, \quad S^2 = I . \tag{2}$$

*) Как известно, двухподрешеточные ферримагнетики устанавливают непрерывный переход между ферро- и антиферромагнетиками.

Отсюда следует, что конец вектора намагниченности $\vec{S}(S^x, S^y, S^z)$ лежит на поверхности двухполостного гиперболоида (псевдосфера $S^{1,1}$)

$$(S^z)^2 - (S^x)^2 - (S^y)^2 = 1. \tag{3}$$

Уравнения движения для компонент вектора $\vec{S}$ получаются из разложения $S(x,t)$ по базисным матрицам алгебры $su(1,1)$:

$$S(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{3} S^{\alpha}(x,t)\,\tau_\alpha , \tag{4}$$

где

$$\tau_\alpha \tau_\beta = g_{\alpha\beta} + i f_{\alpha\beta\gamma}\tau_\gamma ; \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;$$

$g_{\alpha\beta} = diag(-1,-1,1)$ – метрика Киллинга,

$f_{\alpha\beta\gamma}$ – структурные константы алгебры Ли $su(1,1)$:

$$\begin{cases} Tr\,(\tau_\alpha \tau_\beta) = 2 g_{\alpha\beta} , \\ [\tau_\alpha , \tau_\beta] = 2i f_{\alpha\beta\gamma}\tau_\gamma . \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение (I) принимает вид

$$\dot{S}^{\alpha} = f^{\alpha\beta\gamma} S_\beta S_{\gamma xx} \tag{6}$$

(всюду по повторяющимся индексам идет суммирование). Чтобы записать систему (6) в гамильтоновом виде, введем скобки Пуассона, связанные с алгеброй ЛИ $su(1,1)$:

$$\{ S^{\alpha}(x)\; S^{\beta}(y) \} = - f^{\alpha\beta\gamma} S_\gamma (x)\, \delta(x-y) \tag{7}$$

или

$$\{ S^{z}(x) , S^{\pm}(y) \} = \pm i S^{\pm}(x)\, \delta(x-y) ,$$

$$\{ S^{+}(x) , S^{-}(y) \} = 2i\, S^{z}(x)\, \delta(x-y) .$$

Гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{S}_{\alpha}(x,t) = \{ H , S_\alpha(x,t) \}$$

совпадают с системой (6), если H имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, S^{\alpha}_x g_{\alpha\beta} S^{\beta}_x = \frac{1}{4}\, Tr \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (S_x)^2 . \tag{8}$$

Введя угловые переменные θ и φ:

$$\begin{cases} S^x(x,t) = sh\,\theta(x,t) \cos\varphi(x,t) , \\ S^y(x,t) = sh\,\theta(x,t) \sin\varphi(x,t) , \\ S^z(x,t) = ch\,\theta(x,t) , \end{cases} \tag{9}$$

гамильтониан (8) можно переписать в виде энергии свободного статического скалярного поля $\ell(x)$:

$$H = \frac{1}{2}\int dx \left(\frac{d\ell}{dx}\right)^2 ,$$

где

$-d\ell^2 = d\theta^2 + sh^2\theta\, d\varphi^2$ – элемент длины в метрике Лобачевского на гиперболоиде (3).

Интерпретация модели в терминах неидеального бозе-газа более естественна , однако, в переменных псевдосферической проекции. Комплексное поле $\xi(x,t)$ определено на плоскости ($Re\,\xi$, $Im\,\xi$) через соотношения

$$S^{+} = \frac{2\sqrt{\rho}\;\xi}{\rho - |\xi|^2} , \qquad S^{z} = \frac{\rho + |\xi|^2}{\rho - |\xi|^2} , \tag{10}$$

где ρ – произвольная постоянная ($\rho > 0$).

При этом верхняя пола гиперболоида $S^z = +\sqrt{1+S^+S^-} > 0$ проектируется во внутренность круга радиуса $\sqrt{\rho}$: $D_+ = \{\xi(x,t) : |\xi|^2 < \rho\}$, а нижняя пола $S^z = -\sqrt{1+S^+S^-} < 0$ – во внешнюю часть круга $D_- = \{\xi(x,t) : |\xi|^2 > \rho\}$. Верхний полюс $S^z = +1$ проектируется в точку $\xi = 0$, а нижний $S^z = -1$ уходит в бесконечность ($|\xi|^2 \to \infty$). При $S^z \to \infty$ величина $|\xi| \to \sqrt{\rho} - 0$ (изнутри круга), а при $S^z \to -\infty$, $|\xi| \to \sqrt{\rho} + 0$ (извне круга). Таким образом, в точках окружности радиуса $\sqrt{\rho}$ на комплексной плоскости ξ (в которую проектируется "световой конус"), мы можем доопределить намагниченность так, что средние намагниченности верхней и нижней пол компенсируют друг друга. Скобка Пуассона для полей $\xi(x)$ и $\xi^*(x)$ имеет вид

$$\{ \xi(x), \xi^*(y) \} = (\rho - |\xi|^2)^2\, \delta(x-y). \tag{11}$$

Интересная особенность (11) состоит в том, что при $|\xi|^2 \ll \rho$ она приобретает канонический вид, как и в компактном случае $SU(2)$. Однако в отличие от последнего наличие в правой части уравнения (11) знака минус приводит к еще одной нетривиальной возможности. При $|\xi|^2 \simeq \rho$ скобка Пуассона (11) обращается в нуль. На квантовом уровне это означало бы появление в системе макроскопического (классического) объекта, такого, как бозе-конденсат в теории Боголюбова /21/.

Уравнения движения в терминах $\xi(x,t)$ имеют вид модифицированного НУШ,

$$i\,\xi_t + \xi_{xx} + 2\,\frac{\xi^*(\xi_x)^2}{\rho - |\xi|^2} = 0, \tag{12}$$

являющегося (как и исходное уравнение Ландау-Лифшица (I)) интегрируемым в рамках метода обратной задачи (см. ниже). А гамильтониан (8) принимает вид, аналогичный лагранжиану Эрнста в аксиально-симметричной теории гравитации,

$$H = -2\rho \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{|\xi_x|^2}{(\rho - |\xi|^2)^2} = -2\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(\xi, \xi^*) |\xi_x|^2 , \tag{13}$$

где

$g(\xi, \xi^*) = (\rho - |\xi|^2)^{-2}$ – метрика модели Пуанкаре в пространстве $D_+ (|\xi|^2 < \rho)$. Интересно отметить, что гамильтониан (13) имеет вид энергии свободного комплексного скалярного поля $\xi(x,t)$ в искривленном зарядовом пространстве постоянной отрицательной кривизны.

2. Установим связь между НУШ отталкивающегося типа

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - 2(|\Psi|^2 - \rho)\Psi = 0 \tag{14}$$

и $SU(1,1)$ -уравнением Ландау-Лифшица (1). Линейная задача (U, V -пара), соответствующая уравнению (14), имеет вид/15/

$$\begin{aligned} \Phi_{1x} &= U_1(x,t;\lambda)\Phi_1 , \\ \Phi_{1t} &= V_1(x,t;\lambda)\Phi_1 , \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$U_1(x,t;\lambda) = -i\lambda\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & i\Psi^* \\ -i\Psi & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_1(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} 2i\lambda^2 + i(|\Psi|^2 - \rho), & -2i\lambda\Psi^* + \Psi_x^* \\ 2i\lambda\Psi + \Psi_x , & -2i\lambda^2 - i(|\Psi|^2 - \rho) \end{pmatrix}.$$

Условие совместимости для системы (15),

$$U_{1t} - V_{1x} + [U_1, V_1] = 0,$$

приводит к НУШ (14). Совершим калибровочное преобразование к новым переменным:

$$\begin{cases} U_2 = g^{-1} U_1 g - g^{-1} g_x , \\ V_2 = g^{-1} V_1 g - g^{-1} g_t , \\ \Phi_2 = g^{-1}\Phi_1 , \end{cases} \tag{16}$$

удовлетворяющим системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi_{2x} &= U_2(x,t;\lambda)\Phi_2 , \\ \Phi_{2t} &= V_2(x,t;\lambda)\Phi_2 . \end{aligned} \tag{17}$$

Выберем в качестве функции калибровочного преобразования $g(x,t;\lambda_0)$ нормированное решение Иоста для системы (15) при фиксированном значении спектрального параметра λ_0 :

$$g(t,x;\lambda_0) \equiv \Phi_1(x,t;\lambda = \lambda_0). \tag{18}$$

Тогда операторы (16) примут вид

$$\begin{cases} U_2 = -i(\lambda - \lambda_0) S , \\ V_2 = 2i(\lambda^2 - \lambda_0^2) S - (\lambda - \lambda_0) S_x , \end{cases} \tag{19}$$

где

$$S(x,t) = g^{-1}(x,t)\sigma_3 g(x,t), \tag{20}$$

а условие совместимости системы (17) перейдет в уравнение Ландау-Лифшица:

$$S_t = \frac{1}{2i}[S, S_{xx}] - 4\lambda_0 S_x . \tag{21}$$

Это уравнение сводится к исходному уравнению (1) переходом к новым переменным (преобразование Галилея):

$$t' = t , \quad x' = x - 4\lambda_0 t \tag{22}$$

с соответствующим изменением граничных условий. Поэтому в дальнейшем мы будем работать с более простым уравнением в форме (1).

Физически интересная постановка задачи об отталкивающемся бозе-газе отвечает газу конечной плотности $\rho = \lim \frac{N}{L}$, $N \to \infty$, $L \to \infty$. (т.е. описанию системы в термодинамическом пределе). На классическом уровне это приводит к введению нетривиальных (константных) граничных условий на переменные $\Psi(x,t)$ уравнения (14):

$$\begin{cases} \Psi(x,t) \to \Psi_\pm , \\ \Psi_x(x,t) \to 0 , \end{cases} \quad x \to \pm\infty ,$$

где $|\Psi_+|^2 = |\Psi_-|^2 = \rho$ – плотность конденсата/15/.

Используя асимптотики решений Иоста линейной спектральной задачи (15)/23/, получим недиагональные граничные условия на $S(x,t)$:

$$S(k,t) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} S_\pm(x,t) = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} \sqrt{k^2+4\rho} , & \Psi_\pm e^{i\tilde\theta(x,t)} \\ -\Psi_\pm^* e^{-i\tilde\theta(x,t)} , & -\sqrt{k^2+4\rho} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где $\quad \tilde{\theta}(x,t) = \kappa(x + v t), \quad v = \sqrt{\kappa^2 + 4\rho}$,

$\kappa = 2\sqrt{\lambda_0^2 - \rho}$ – волновое число,

λ_0 – точка нормировки из непрерывного спектра ($|\lambda_0| \geq \sqrt{\rho}$). Граничные условия (23) описывают равномерную прецессию вектора $\vec{S}$ вокруг оси z с частотой $\omega = \kappa\sqrt{\kappa^2 + 4\rho}$, отвечающей боголюбовской дисперсии в теории слабонеидеального бозе-газа конечной плотности ρ. Проекция $\vec{S}$ на ось z при этом остается неизменной, и все изменения при переходе от $-\infty$ к $+\infty$ сводятся к появлению фазы α, такой, что $\Psi_- = \Psi_+ e^{i\alpha}$. Вектор $\vec{S}$ прецессирует в пространстве в виде "спиновой волны", распространяющейся со скоростью v, амплитуда которой зависит от волнового вектора κ. Отметим здесь два обстоятельства. Во-первых, постановка граничных условий (23) на $\pm\infty$ по x возможна только в том случае, когда матрица рассеяния для вспомогательной линейной задачи (приводящей к НУШ (14)) имеет "безотражательный" вид. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать лишь решения Иоста, описывающие рассеяние плоской волны на "безотражательном" потенциале (солитоне НУШ). Во-вторых, постановка нетривиальных граничных условий типа (23) для полной матрицы S приводит (как и в случае плоской волны) к классическим решениям с бесконечной энергией. Лишь в пределе $\kappa \gg \sqrt{\rho}$, $S_\pm \to \sigma_3$ (отсутствие конденсата) энергия может быть конечной. Аналогичная ситуация имеет место в НУШ с отталкиванием, где число частиц и энергия кинка расходятся. Конечный результат возникает при подходящем вычитании из энергии кинка бесконечной энергии конденсата.

Используя калибровочную эквивалентность, можно каждому решению уравнения (I) поставить в соответствие решения уравнения (14) по формуле

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}(\theta_x + i\,\mathrm{sh}\,\theta\cdot\varphi_x)\,e^{i\tilde{\alpha}(x,t)}, \tag{24}$$

где
$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_t = \mathrm{ch}\,\theta\cdot\varphi_t - \frac{1}{2}(\theta_x^2 + \mathrm{sh}^2\theta\cdot\varphi_x^2 - 4\rho), \\ \tilde{\alpha}_x = \mathrm{ch}\,\theta\cdot\varphi_x, \end{cases}$$

θ, φ – угловая параметризация (9) вектора $\vec{S}$.

Из формулы (24) видно, что получение решений НУШ по решениям уравнения ЛЛ сводится к простым операциям дифференцирования, в то время как обратная процедура значительно сложнее и связана с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений. В связи с этим мы применим другой, более простой, метод, фактически отвечающий решению этой обратной задачи. Использование калибровочной эквивалентности двух нелинейных интегрируемых систем позволяет, зная решения Иоста для одного

уравнения, построить солитонные решения для другого. Для построения односолитонного решения уравнений Ландау-Лифшица на $SU(1,1)$-псевдосфере (I) используем односолитонное решение Иоста для НУШ вида /23/:

$$\Phi(x,t;\lambda,\lambda_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где
$$a(x,t;\lambda,\lambda_0) = e^{-i\zeta_0(x-2\lambda_0 t)}\left(\Psi_+^* - \frac{\nu\Psi_+^*[\rho + (\lambda - i\nu)(\lambda_0 - \zeta_0)]}{\rho(\nu + i\zeta_0)(1 + e^{2z})}\right),$$

$$b(x,t;\lambda,\lambda_0) = e^{i\zeta_0(x-2\lambda_0 t)}\left((\lambda_0 - \zeta_0) - \frac{\nu[(\lambda_0 - \zeta_0) + (\lambda - i\nu)]}{(\nu - i\zeta_0)(1 + e^{2z})}\right),$$

$$z = \nu(x - 2(\lambda - 2\lambda_0)t + x_0).$$

Здесь, λ – спектральный параметр, определяющий скорость и амплитуду кинка в модели НУШ,

$$\nu = \sqrt{\rho - \lambda^2}, \quad |\lambda| \leq \sqrt{\rho}; \quad \zeta_0 = \sqrt{\lambda_0^2 - \rho}, \quad |\lambda_0| \geq \sqrt{\rho}.$$

Непосредственной подстановкой (25) в уравнение (20) получаем

$$S^z = \frac{\lambda_0}{\zeta_0} - \frac{\nu^2}{2\zeta_0(\lambda_0 - \lambda)}\,\mathrm{sech}^2 z,$$

$$S^+ = i\,\frac{\Psi_+^*(\rho + \lambda\lambda_0 + i\nu\zeta_0)}{2\rho\zeta_0(\nu + i\zeta_0)^2}\left[(\lambda - \lambda_0)^2 + (\nu\,\mathrm{th}\,z + i\zeta_0)^2\right]e^{-2i\zeta_0(x+2\lambda_0 t)}. \tag{26}$$

Нетрудно убедиться, что это решение удовлетворяет граничным условиям (23), если

$$e^{i\alpha} = \frac{\rho - \lambda\lambda_0 + i\nu\zeta_0}{\rho - \lambda\lambda_0 - i\nu\zeta_0}.$$

3. Как интегрируемая система, уравнение (I) обладает бесконечным числом интегралов движения. Нас будут интересовать лишь первые три из них, имеющие непосредственный физический смысл, – намагниченность (проекция на ось z), импульс и энергия:

$$M_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,(S^z(x,t) - S_0^z)\,,$$
$$\Pi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,(\pi(x,t) - \pi_0)\,, \qquad (27)$$
$$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,(\mathcal{H}(x,t) - \mathcal{H}_0)\,,$$

где

$$\pi(x,t) = \frac{i}{2}\cdot\frac{S_x^+ S^- - S_x^- S^+}{1 + S^z}\,,$$
$$\mathcal{H}(x,t) = \frac{1}{2}\left[(S_x^z)^2 - S_x^+ S_x^-\right],$$
$$A_0 = \lim_{|x|\to\infty} A(x,t)\,, \qquad A(x,t) = (S^z, \pi, \mathcal{H}).$$

Величины S_0^z , π_0 и $\mathcal{H}_0$ описывают "классическое вакуумное состояние" (конденсат).

Динамические переменные (27) на солитоне (26) имеют вид

$$M_z = \frac{\nu}{\xi_0(\lambda_0 - \lambda)}\,,$$
$$\Pi = 4\arcsin\frac{\nu}{\sqrt{2(\lambda_0-\lambda)(\lambda_0+\xi_0)}}\,, \qquad (28)$$
$$E = 4\nu = 4\sqrt{\rho - \lambda^2}\,,$$

причем

$$S_0^z = \frac{\lambda_0}{\xi_0}\,, \quad \pi_0 = -2(\lambda_0 - \xi_0)\,, \quad \mathcal{H}_0 = -2\rho. \qquad (29)$$

Более удобно для дальнейшего анализа выразить эти динамические переменные через волновое число K , значение которого определяет проекцию вектора намагниченности в спиновой волне (23). В этом случае имеем

$$\begin{cases} M_z(K,\lambda) = \dfrac{4\sqrt{\rho-\lambda^2}}{K(\sqrt{K^2+4\rho}-2\lambda)}\,, \\ \Pi(K,\lambda) = 4\arcsin\sqrt{\dfrac{2(\rho-\lambda^2)}{(\sqrt{K^2+4\rho}-2\lambda)(\sqrt{K^2+4\rho}+K)}}\,, \\ E(K,\lambda) = 4\sqrt{\rho-\lambda^2}\,, \end{cases} \qquad (30)$$

и соответственно:

$$S_0^z = \frac{\sqrt{K^2+4\rho}}{K}\,, \qquad (31)$$
$$\pi_0 = -(\sqrt{K^2+4\rho} - K)\,,$$
$$\mathcal{H}_0 = -2\rho\,.$$

Проанализируем полученные выражения. Решение (23) описывает спиновую волну с боголюбовским законом дисперсии:

$$\omega(K) = K\sqrt{K^2+4\rho}\,. \qquad (32)$$

При $K \gg \sqrt{\rho}$ плотность намагниченности S_0^z стремится к единице, что соответствует минимуму верхней полы гиперболоида (и означает отсутствие конденсата). Дисперсия спиновой волны в этом случае носит квадратичный характер $\omega(K) \simeq K^2$. В другом предельном случае $K \ll \sqrt{\rho}$ ($K \to 0$) S_0^z расходится как $\frac{2\sqrt{\rho}}{K} \to \infty$, т.е. ведет себя как среднее число частиц в бозе-конденсате [24]:

$$\langle a_K^+ a_K \rangle \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{\sqrt{\rho}}{K} \to \infty\,.$$

Дисперсия спиновой волны при этом становится линейной $\omega(K) \simeq 2\sqrt{\rho}\,K$ и описывает коллективизированное движение частиц со скоростью $|v| \geqslant |v_{зв}|$, где скорость звука есть

$$v_{зв} = \left(\frac{d\omega}{dK}\right)_{K=0} = 2\sqrt{\rho}\,.$$

Отметим, что в отличие от нелинейной спиновой волны с конечной амплитудой в $SU(2)$ -магнетике Гайзенберга [25,26]

$$S^+(x,t) = \sqrt{1-(S^z)^2}\, e^{i(Kx-\omega t)}\,, \qquad \omega = S^z K^2\,,$$

являющейся неустойчивой и разваливающейся на набор солитонов, в нашем случае аналогичная волна становится устойчивой. Другая особенность спиновой волны (23) связана с тем, что плотность энергии для нее (31) есть просто плотность конденсата и не зависит от K (вследствие компенсации двух расходимостей, как и в случае $U(1,1)$ НУШ [18]).

Таким образом, решение с наименьшей энергией в нашей системе бесконечно вырождено по волновому вектору K , что связано с некомпактностью группы симметрии и со сложной структурой вакуума соответствующей квантовой системы.

Проанализируем теперь дисперсионную формулу для солитона (26). Исключая из соотношений (30) параметр λ , получим связь:

$$E \cdot M_z = 8\left(1+\sqrt{1+\frac{4\rho}{K^2}}\right)\sin^2\frac{\Pi}{4} \;. \qquad (33)$$

При этом параметр K показывает, над каким "вакуумом" (спиновой волной) рассматривается возбуждение. Если плотность конденсата в системе мала, т.е. $K \gg \sqrt{\rho}$, то дисперсия солитона вблизи минимума верхней полы гиперболоида есть

$$E(\Pi) = \frac{16}{M_z}\sin^2\frac{\Pi}{4} \;, \qquad (34)$$

что совпадает с полученной в рамках $SU(2)$-модели Гайзенберга /25/, а также с точным результатом для спинового комплекса Бете /6/. В этом случае M_z характеризует внутреннее квантовое число солитонов и равно эффективной массе частицы, отвечающей солитону при $\Pi \simeq 0$:

$$E(\Pi) \simeq \frac{\Pi^2}{M_z} \;.$$

В другом предельном случае $K \ll \sqrt{\rho}$ высоких плотностей частота прецессии стремится к нулю, и $M_z \to \infty$. При этом формула (33) не допускает предельного перехода $K \to 0$, т.к. M_z перестает быть динамической переменной (частота прецессии обращается в нуль). Поэтому, исключая из второго и третьего уравнений в формуле (30) параметр λ, мы получим дисперсионную формулу для солитона (26) в этом случае:

$$E(\Pi) = 4\sqrt{\rho}\,\sin\frac{\Pi}{2} \;, \qquad (35)$$

где $0 \le \frac{\Pi}{2} \le \pi$.
Эта зависимость E от Π (с точностью до коэффициента) совпадает с точной дисперсией антиферромагнона, полученной де Клуазо и Пирсоном /19/, и при малых Π переходит в спектр одного магнона*):

$$E(\Pi) \simeq 2\sqrt{\rho}\,\Pi \;.$$

Таким образом, аналогично тому, как боголюбовская дисперсия в двух предельных случаях описывает частицы с квадратичной и линейной дисперсией, наше солитонное решение (26) описывает дисперсию ферромагнитного и антиферромагнитного типов соответственно. Как известно, такого типа поведением на уровне линеаризованной теории обладают ферримагнетики. Точное совпадение спектров, калибровочная эквивалентность с отталкивающимся бозе-газом, компенсация намагниченностей верхней и нижней пол гиперболоида при $K \to 0$ указывают на возможную связь рассматриваемой модели с антиферромагнетиком. Как известно, антиферромагнетику в XXZ-модели соответствует решеточный бозе-газ с отталкиванием /27/, а его поведение вблизи критической температуры допускает также описание в рамках теории слабонеидеального бозе-газа /28/. Более того, как показано недавно в работе авторов и В.Г.Маханькова /20/, динамической симметрией линеаризованного двухподрешеточного антиферромагнетика является некомпактная группа $\prod_K \otimes [SU(1,1)]_K$, соответствующая классическая динамика модели описывается гармоническим движением в плоскости Лобачевского. Совпадение квазиклассических спектров с точным квантовым является в настоящее время одной из загадок вполне интегрируемых систем. Известно, что гайзенберговская модель изотропного антиферромагнетика является точно интегрируемой /29/. Поэтому совпадение спектров интегрируемых моделей (как, например, в случае уравнения Sine-Gordon и модели Тирринга) могло бы указывать на имеющуюся между ними связь.

---

*) Отметим, что двухподрешеточная модель Ландау-Лифшица дает для спиновой волны только линейный закон дисперсии /6/.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.Г.Маханькову за обсуждение постановки задачи и внимание к работе, а также И.Гочеву и А.М.Косевичу за ряд полезных и критических замечаний.

Литература

1. Geroch R., J.Math. Phys., 1971, 12, p.918.
   D'Hoker E., Freedman D., Jackiw R., Preprint MIT, CTP =1072, 1983.
   Van Holten J.W., Preprint Wuppertel, WUB 84-3, 1984.
2. Ernst F., Phys. Rev., 1968, 167, p.1175.
   Maison D., MPI-PAE/PPh 14/78, München, 1978.
3. Cremmer E., Julia B., Phys. Lett., 1978, B 80, p. 48;
   Nucl. Phys., 1979, B 159, p. 141.
   Ellis J., Gaillard M.K., Günaydin M., Zumino B.,
   Nucl. Phys., 1983, B 224, p. 427.
4. Wegner F.J., Z. Phys., 1979, B 35, p. 207.
   Hikami S., Phys. Rev., 1981, B 24, p. 2671.
   Pruisken A., Schaffer L., Nucl. Phys., 1982, B 200, p.20.
5. Желтухин А.А. ТМФ, 1982, 52, с.73.
   Nesterenko V.V., Lett. Math. Phys., 1983, 7, p. 287.
6. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны, "Наукова думка", Киев, 1983.
7. Takhtajan L.A., Phys. Lett., 1977, A 64, p. 235.
8. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., ТМФ, 1979, 38, с.26.
9. Lakshmanan M., Phys. Lett., 1977, A 61, p.53.
10. Kundu A., Pashaev O.K., J. Phys., C: Solid State Phys., 1983, 16, p. L585.
11. Котляров В.П. ДАН УССР, серия А, 1981, 10, с.9.

12. Quispel G.R., Capel H.W., Phys. Lett., 1982, A 88, p. 371.
13. Nakamura K., Sasada T., J. Phys. C: Solid State Phys., 1982, 15, p. L915.
14. Пашаев О.К. ОИЯИ, 2-83-230, Дубна, 1983.
15. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Сергеенков С.А. ОИЯИ, Р2-84-513, Дубна, 1984.
16. Kotlyarov V.P., J. Phys. C: Solid State Phys., 1984, 17 , p. L139.
17. Makhankov V.G., Pashaev O.K., Phys. Lett., 1983, A 95, p. 95.
18. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. В сб.:"Теоретико-групповые методы в физике". Труды международного семинара, Звенигород, 24-26 ноября 1982 г., "Наука", М., 1983, т.II, с.349.
19. Des Cloizeaux J., Pearson J.J., Phys. Rev., 1962, 128 , p. 2131.
Anderson P.W., Phys. Rev., 1952, 86, p. 694.
20. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Сергеенков С.А. Краткие сообщения ОИЯИ, № 3, 1985.
21. Боголюбов Н.Н. Известия АН СССР, 1947, 11, с.77.
22. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1973, 64, с.1627.
23. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Сергеенков С.А. ОИЯИ, Р2-83-186, Дубна, 1983.
24. Беляев С.Т. В сб.: " The Many Body Problem ", ed. by C. De Witt (John Wiley & Sons, Inc., N.Y.) 1958 .
25. Fogedby H.C., J. Phys. A: Math. Gen., 1980, 13, p. 1467.
26. Lakshmanan M., Ruijgrok T.W., Thompson C.J., Physica A, 1976, 84, p. 577.
27. Yang C.N., Yang C.P., Phys. Rev., 1966, 150 , p. 321.
28. Батыев Э.Г., Брагинский Л.С. ЖЭТФ, 1984, 87, с.1361.
29. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Записки научных семинаров ЛОМИ, т.109, с.134, "Наука", Л., 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1985 года

Пашаев О.К., Сергеенков С.А. Р2-85-481

Нелинейные σ-модели с некомпактной группой симметрии и теория неидеального бозе-газа

Построена непрерывная классическая модель магнетика Гайзенберга на некомпактном многообразии $SU(1,1)/U(1)$, калибровочно-эквивалентная нелинейному уравнению Шредингера /НУШ/ отталкивающего типа. Показано, что выбор функции калибровочного преобразования в виде решений Иоста для линейной задачи НУШ позволяет строить решения соответствующей σ-модели магнетика. Представлено два типа решений в виде "спиновых" волн и солитонов. Вычислены интегралы энергии, импульса и намагниченности. Спиновые волны определяются боголюбовской дисперсией и описывают прецессию на поверхности гиперболоида с фиксированным значением M_z. Солитонное решение описывает выход вектора намагниченности из плоскости прецессии. Когда плотность конденсата $\rho \to 0$, спектр совпадает с результатом для $SU(2)$ ферромагнетика Гайзенберга и с точным результатом для спинового комплекса Бете. В случае, отвечающем неограниченной длине вектора $\vec{S}$, спектр солитона совпадает с дырочным спектром антиферромагнетика, а намагниченности верхней и нижней полы гиперболоида компенсируют друг друга.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Pa
No
Gr

SU
It
to
σ-
ma
mo
to
so
th
ma
ti
of

Te