объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-478

В.Н.Капшай,[1] В.И.Саврин,[2] Н.Б.Скачков

О ЗАВИСИМОСТИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА ОТ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Направлено в журнал "ТМФ"

[1] Гомельский государственный университет

[2] НИИЯФ МГУ

1985

I. Введение

Одновременный подход к описанию систем частиц в квантовой теории поля, предложенный А.А.Логуновым и А.Н.Тавхелидзе /I/, нашел широкое применение в физике элементарных частиц. Особенно эффективен этот подход в задаче о связанных состояниях. На его основе рассчитываются такие характеристики составных систем, как спектры уровней энергии, упругие формфакторы, структурные функции глубоконеупругого рассеяния и т.д.

Релятивистская волновая функция системы двух частиц в одновременном подходе подчиняется трехмерному интегральному уравнению типа уравнения Шредингера в импульсном пространстве. Ядро уравнения - квазипотенциал является, вообще говоря, комплексной и параметрически зависящей от энергии системы величиной. Метод его построения на основе использования теоретико-полевой двухвременной функции Грина был сформулирован в работе /I/. В последующем для определения квазипотенциала применялся также и другой метод, основанный на использовании физической амплитуды рассеяния, которая считается при этом заданной, например, фейнмановскими диаграммами теории поля /2,3/.

Следует, однако, отметить, что построение квазипотенциала на основе амплитуды рассеяния требует доопределения, поскольку амплитуда рассеяния известна только на энергетической поверхности, а квазипотенциальное уравнение пишется вне ее. Таким образом, метод построения квазипотенциала с помощью двухвременной функции Грина, которая определяется и вне энергетической поверхности, является более последовательным.

В работе /4/ исходя из ядра уравнения Бете - Солпитера был рассчитан во втором порядке теории возмущений и первом приближении по v^2/c^2 квазипотенциал взаимодействия двух скалярных частиц. При этом также использовалось приближение малости энергии связи. Сделанные в /4/ приближения являются вполне обоснованными, если применять квазипотенциальные уравнения для исследования слабосвязанных систем типа позитрония или атома водорода.

В последнее время уравнения квазипотенциального подхода стали широко применяться для описания сильносвязанных составных систем, в которых релятивистские эффекты велики, например, для легких мезонов. В связи с этим становится актуальной задача построения квазипотенциала без обращения к разложению по степеням V^2/C^2.

Разумеется, следует ожидать, что построенное таким образом ядро окажется достаточно сложным с точки зрения нахождения точных либо приближенных аналитических решений квазипотенциального уравнения. Однако в последнее время получили развитие методы численного решения интегральных квазипотенциальных уравнений, в том числе уравнений, ядра которых зависят от спектрального параметра – полной энергии.

В настоящей работе мы, для простоты, рассматриваем систему двух бесспиновых частиц, взаимодействующих посредством обмена скалярным бозоном. Для указанной системы мы определим оператор квазипотенциала на основе полной, а также на основе запаздывающей функций Грина во втором порядке теории возмущений. Отметим, что используемый нами метод позволит установить зависимость квазипотенциала от энергии всей системы. Зависимость квазипотенциала от полной энергии составной системы, как это показано в работе /5/, существенным образом влияет и на условие нормировки волновой функции.

2. Основные определения

Двухчастичная функция Грина в квантовой теории поля определяется следующим образом:

$$G(x_1,x_2;y_1,y_2)=\langle 0|T\{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_2^*(y_2)\varphi_1(y_1)\}|0\rangle. \qquad (2.1)$$

Здесь $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$ – гейзенберговские операторы скалярных полей, описывающих частицы с одинаковой массой m; T – оператор хронологического упорядочивания, $|0\rangle$ – вектор вакуума. Лагранжиан взаимодействия выберем в виде

$$\mathcal{L}_{int}(x)=g:\varphi_1^*(x)\varphi_1(x)\Phi(x):+g:\varphi_2^*(x)\varphi_2(x)\Phi(x):, \qquad (2.2)$$

где $\Phi(x)$ – скалярное поле промежуточных бозонов с массой μ, g – размерная константа связи.

Ковариантно определенная двухвременная функция Грина в импульсном представлении записывается так /6,I/:

$$\tilde G(p_1,p_2;k_1,k_2;\lambda)=\int \exp\{ip_1x_1+ip_2x_2-ik_1y_1-ik_2y_2\}\cdot \qquad (2.3)$$

$$\cdot\delta(\lambda x_1-\lambda x_2)\,\delta(\lambda y_1-\lambda y_2)\,G(x_1,x_2;y_1,y_2)\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2.$$

Здесь λ – некоторый времениподобный единичный вектор ($\lambda^2=\lambda_0^2-\vec\lambda^2=1$). В силу справедливости следующего закона преобразования функции (2.3) при преобразованиях Лоренца,

$$\tilde G(p_1,p_2;k_1,k_2;\lambda)=\tilde G(L^{-1}p_1,L^{-1}p_2;L^{-1}k_1,L^{-1}k_2;L^{-1}\lambda),$$

будем рассматривать случай, когда $\lambda=(1,0,0,0)$.

Введем новые импульсные переменные (полный и относительный начальные и конечные импульсы двухчастичной системы)

$$P=p_1+p_2\,;\qquad K=k_1+k_2\,; \qquad (2.4)$$

$$p=\frac{p_1-p_2}{2}\,;\qquad k=\frac{k_1-k_2}{2}\,.$$

С помощью трансляционной инвариантности легко показать, что фурье-образ функции (2.I) имеет вид

$$G(p_1,p_2;k_1,k_2)=(2\pi)^4\,\delta(P-K)\,G(P;p,k). \qquad (2.5)$$

Аналогично, справедлива формула

$$\tilde G(p_1,p_2;k_1,k_2)=(2\pi)^4\,\delta(P-K)\,\tilde G(P;\vec p,\vec k), \qquad (2.5')$$

при этом

$$\tilde G(P;\vec p,\vec k)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int dp_0\,dk_0\,G(P;p,k). \qquad (2.6)$$

Используя представление T-произведения с помощью θ-функций и предполагая существование полного набора состояний $|n\rangle$, функцию (2.6) запишем в виде суммы запаздывающей и опережающей частей,

$$\tilde G(P;\vec p,\vec k)=\tilde G_{ret}(P;\vec p,\vec k)+\tilde G_{adv}(P;\vec p,\vec k). \qquad (2.7)$$

Для $\tilde G_{ret}$ спектральное представление имеет вид /1,6/

$$\tilde G_{ret}(P;\vec p,\vec k)=\int dM\,\frac{i}{P_0-\sqrt{\vec P^2+M^2}+i0}\cdot \qquad (2.8)$$

$$\cdot\sum_n\delta(M-M_n)(2\pi)^3\,\delta(\vec P-\vec K_n)\,\chi_{0n}(\vec p)\,\chi_{0n}^*(\vec k)$$

и аналогично для $\tilde G_{adv}$.

В выражение (2.8) входит одновременная волновая функция $\chi_{on}(\vec{p})$, которая определена формулой

$$\chi_{on}(\vec{p}) = \int exp(-i\vec{p}\vec{x})\langle 0|\varphi_1(0,\frac{\vec{x}}{2})\varphi_2(0,-\frac{\vec{x}}{2})|n\rangle . \qquad (2.9)$$

Определяя обратные к $G = i\widetilde{G}/(2\pi)^3$ и $G_{ret} = i\widetilde{G}_{ret}/(2\pi)^3$ операторы G^{-1} и G^{-1}_{ret}, зададим, согласно /I,7/, следующим образом квазипотенциалы:

$$V = \underline{G}^{-1}_{(0)} - \underline{G}^{-1}; \qquad V_{ret} = \underline{G}^{-1}_{(0)ret} - \underline{G}^{-1}_{ret}, \qquad (2.10)$$

где $G_{(0)}$ и $G_{(0)ret}$ - свободная двухвременная функция Грина и ее запаздывающая часть. Тогда, с помощью тождеств $\underline{G}^{-1}\underline{G} = 1$, $\underline{G}^{-1}_{ret}\underline{G}_{ret} = 1$ и представления (2.8) вблизи полюса связанного состояния с энергией $P_0 = (\vec{P}^2 + M_n^2)^{1/2}$, импульсом $\vec{P}$ и другими квантовыми числами n' для функции (2.9) можем получить уравнения

$$\int\left[\underline{G}^{(-1)}_{(0)}(P;\vec{p},\vec{k}) - V(P;\vec{p},\vec{k})\right]\chi_{\vec{P},M_n,n'}(\vec{k})\,d\vec{k} = 0, \qquad (2.11)$$

$$\int\left[\underline{G}^{(-1)}_{(0)ret}(P;\vec{p},\vec{k}) - V_{ret}(P;\vec{p},\vec{k})\right]\chi_{\vec{P},M_n,n'}(\vec{k})\,d\vec{k} = 0. \qquad (2.12)$$

В следующем разделе мы осуществим построение V и V_{ret} и запишем уравнения (2.11), (2.12) в явном виде.

3. Построение операторов квазипотенциала

Функции Грина G и G_{ret} и им обратные G^{-1} и G^{-1}_{ret}, а вместе с этим и квазипотенциалы V и V_{ret} можно найти по теории возмущений:

$$\underline{G} = \underline{G}_{(0)} + \underline{G}_{(2)} + \underline{G}_{(4)} + \ldots \; ; \; \underline{G}_{ret} = \underline{G}_{(0)ret} + \underline{G}_{(2)ret} + \ldots \qquad (3.1)$$

Для фурье-образа четырехвременной функции (2.1) после выделения δ - функции, соответствующей закону сохранения полного 4-импульса, имеем

$$G_{(0)}(P;p,k) = \qquad (3.2)$$
$$= (2\pi)^4\,\delta(p-k)\,\frac{i}{(P/2+p)^2 - m^2 + i0}\cdot\frac{i}{(P/2-p)^2 - m^2 + i0},$$

$$G_{(2)}(P;p,k) = -ig^2\frac{1}{(P/2+p)^2-m^2+i0}\;\frac{1}{(P/2-p)^2-m^2+i0}\cdot \qquad (3.3)$$
$$\frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i0}\;\frac{1}{(P/2+k)^2-m^2+i0}\;\frac{1}{(P/2-k)^2-m^2+i0}.$$

С помощью формулы (2.6) нетрудно определить теперь свободную двухвременную функцию Грина

$$\underline{G}_{(0)}(P;\vec{p},\vec{k}) = \underline{G}_{(0)}(P;\vec{p})\,\delta(\vec{p}-\vec{k}), \qquad (3.4)$$

$$\underline{G}_{(0)}(P;\vec{p}) = \frac{1}{2\omega_{p_1}\,2\omega_{p_2}}\left\{\frac{1}{P_0-\omega_{p_1}-\omega_{p_2}+i0} - \frac{1}{P_0+\omega_{p_1}+\omega_{p_2}-i0}\right\} \qquad (3.5)$$

и ее запаздывающую часть

$$\underline{G}_{(0)ret}(P;\vec{p},\vec{k}) = \underline{G}_{(0)ret}(P;\vec{p})\,\delta(\vec{p}-\vec{k}), \qquad (3.6)$$

$$\underline{G}_{(0)ret}(P;\vec{p}) = \frac{1}{2\omega_{p_1}\,2\omega_{p_2}}\;\frac{1}{P_0-\omega_{p_1}-\omega_{p_2}+i0}. \qquad (3.7)$$

В формулах (3.5), (3.7) мы обозначили

$$\omega_{p_{1,2}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2}_{1,2} + m^2} = \sqrt{(\vec{P}/2 \pm \vec{p})^2 + m^2}. \qquad (3.8)$$

Поскольку выражения (3.4) и (3.6) содержат δ - функцию от $\vec{p}-\vec{k}$, т.е. интегральные операторы $G_{(0)}$ и $G_{(0)ret}$ кратны единичному, то сразу же замечаем, что ядра обратных операторов G^{-1} и G^{-1}_{ret} представляются в виде

$$\underline{G}^{(-1)}(P;\vec{p},\vec{k}) = \underline{G}^{-1}_{(0)}(P;\vec{p})\,\delta(\vec{p}-\vec{k}) -$$
$$- \underline{G}^{-1}_{(0)}(P;\vec{p})\;\underline{G}_{(2)}(P;\vec{p},\vec{k})\;\underline{G}^{-1}_{(0)}(P;\vec{k}) + \ldots \qquad (3.9)$$

и аналогично для $\underline{G}^{(-1)}_{ret}$.

Таким образом, во втором порядке теории возмущений для квазипотенциалов V и V_{ret} имеем выражения

$$V_{(2)}(P;\vec{p},\vec{k}) = \underline{G}^{-1}_{(0)}(P;\vec{p})\,\underline{G}_{(2)}(P;\vec{p},\vec{k})\,\underline{G}^{-1}_{(0)}(P;\vec{k}), \tag{3.10}$$

$$V_{(2)\,ret}(P;\vec{p},\vec{k}) = \underline{G}^{-1}_{(0)\,ret}(P;\vec{p})\,\underline{G}_{(2)\,ret}(P;\vec{p},\vec{k})\,\underline{G}^{-1}_{(0)\,ret}(P;\vec{k}). \tag{3.11}$$

Для нахождения функции $\underline{G}_{(2)\,ret}$ проинтегрируем, согласно (2.6), выражение (3.3) по p_0 и k_0. Приведем ответ для случая, когда полный импульс системы $\vec{P}=0$ (в случае $\vec{P}\neq 0$ выражение для $\underline{G}_{(2)\,ret}$ более громоздкое) и когда полная энергия системы $P_0=\sqrt{\vec{P}^2+M^2}=M$ меньше чем $2m$, что соответствует случаю связанного состояния:

$$\underline{G}_{(2)\,ret}(M;\vec{p},\vec{k}) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{(2\omega_p)^2(2\omega_k)^2\,W_{p,k}}\cdot$$

$$\frac{1}{(2\omega_p-M)(2\omega_k-M)}\left\{\frac{1}{\omega_p+\omega_k+W_{p,k}-M}+\frac{\omega_p+\omega_k-M}{(\omega_p+\omega_k+W_{p,k})(\omega_p+\omega_k)}+\right. \tag{3.12}$$

$$+\frac{2(\omega_p+\omega_k-M)}{(\omega_p+\omega_k+W_{p,k})(\omega_p+\omega_k+W_{p,k}-M)}+$$

$$\left.\frac{(2\omega_p-M)(2\omega_k-M}{(\omega_p+\omega_k+W_{p,k})^2(\omega_p+\omega_k+W_{p,k}-M)}\right\}.$$

В этом выражении мы обозначили

$$\omega_p=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,;\quad \omega_k=\sqrt{\vec{k}^{\,2}+m}, \tag{3.13}$$

$$W_{p,k}=\sqrt{(\vec{p}-\vec{k})^2+\mu^2}\,. \tag{3.14}$$

Опережающая часть функции Грина $\underline{G}_{(2)\,adv}$, как нетрудно показать прямым вычислением, связана с (3.12) формулой

$$\underline{G}_{(2)\,adv}(M;\vec{p},\vec{k}) = \underline{G}_{(2)\,ret}(-M;\vec{p},\vec{k}). \tag{3.15}$$

Более того, свойство (3.15) справедливо во всех порядках теории возмущений /1/ и следует из инвариантности теории относительно обращения времени.

Таким образом, функция Грина $\underline{G}_{(2)}$ во втором порядке теории возмущений имеет вид

$$\underline{G}_{(2)}(M;\vec{p},\vec{k}) = \underline{G}_{(2)\,ret}(M;\vec{p},\vec{k})+\underline{G}_{(2)\,ret}(-M;\vec{p},\vec{k}). \tag{3.16}$$

Введем теперь обозначения

$$\Omega_{p,k}=\omega_p+\omega_k+W_{p,k}\,, \tag{3.17}$$

$$A_{p,k}(M)=4\omega_p\omega_k M^{-2}\,;\quad B_{p,k}(M)=2-M(\omega_p+\omega_k)^{-1}-A_{p,k}(M), \tag{3.18}$$

$$C_{p,k}(M)=-(2\omega_p-M)(2\omega_k-M)M^{-2},$$

с помощью которых и формул (3.7), (3.11) для квазипотенциала $V_{(2)\,ret}$ получаем

$$V_{(2)\,ret}(M;\vec{p},\vec{k}) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{W_{p,k}}\cdot \tag{3.19}$$

$$\left\{\frac{A_{p,k}(M)}{\Omega_{p,k}-M}+\frac{B_{p,k}(M)}{\Omega_{p,k}}+\frac{C_{p,k}(M)}{\Omega^2_{p,k}}\right\}.$$

Отметим следующие особенности выражения (3.19): 1) квазипотенциал $V_{(2)\,ret}(M;\vec{p},\vec{k})$ не является локальным, т.е. зависит не только от разности векторов $\vec{p}-\vec{k}$, но и от модулей $|\vec{p}|$ и $|\vec{k}|$, 2) для случая связанных состояний ($M<2m$) квазипотенциал является вещественным, 3) квазипотенциал $V_{(2)\,ret}(M;\vec{p},\vec{k})$ довольно сложным образом зависит от полной энергии системы двух частиц M, 4) на энергетической поверхности $\omega_p=\omega_k=M/2$ квазипотенциал (для $M>2m$ его выражение аналогично (3.19)) совпадает с фейнмановской амплитудой рассеяния двух частиц, лагранжиан взаимодействия которых имеет вид (2.2).

Отметим также, что при построении квазипотенциальных уравнений на основе гамильтоновой формулировки квантовой теории поля /8/ для квазипотенциала получают выражение /8,9/

$$V^{H}_{(2)}(M;\vec{p},\vec{k}) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{W_{p,k}}\,\frac{1}{\Omega_{p,k}-M},$$

аналогичное первому слагаемому формулы (3.19).

Уравнение (2.I2) с квазипотенциалом (3.I9) для волновой функции

$$\chi^{ret}_{M,n'}(\vec{p}) = \chi^{ret}_{\vec{p}=0,M_n,n'}(\vec{p}),$$

полученное на основе запаздывающей функции Грина, принимает, таким образом, следующий вид:

$$(2\omega_p)^2\left[M-2\omega_p\right]\chi^{ret}_{M,n'}(\vec{p}) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{W_{p,k}}\cdot \tag{3.20}$$

$$\cdot\left\{\frac{A_{p,k}(M)}{\Omega_{p,k}-M}+\frac{B_{p,k}(M)}{\Omega_{p,k}}+\frac{C_{p,k}(M)}{\Omega^2_{p,k}}\right\}\chi^{ret}_{M,n'}(\vec{k})\,d\vec{k}.$$

Для квазипотенциала $V_{(2)}$, который строится на основе функции Грина $\underline{G} = \underline{G}_{ret} + \underline{G}_{adv}$, получаем, с использованием формул (3.I0), (3.I6) выражение

$$V_{(2)}(M;p,k) = \frac{1}{4\omega_p\,4\omega_k}\Big\{(2\omega_p+M)(2\omega_k+M)\,V_{(2)ret}(M;\vec{p},\vec{k})+ \tag{3.2I}$$

$$+(2\omega_p-M)(2\omega_k-M)\,V_{(2)ret}(-M,\vec{p},\vec{k})\Big\},$$

в котором $V_{(2)ret}$ определяется, согласно (3.I9). Нетрудно также выписать квазипотенциальное уравнение для функции $\chi_{M,n'}(\vec{p})$ с ядром (3.2I) и свободной функцией Грина (3.4), (3.5).

Выражение (3.2I) также вещественно и нелокально и на энергетической поверхности $\omega_p = \omega_k = M/2$ совпадает с фейнмановской амплитудой.

4. Парциальное разложение квазипотенциальных уравнений

Несмотря на то, что квазипотенциалы (3.I9) и (3.2I) являются нелокальными, в уравнении (3.20) и аналогичном уравнении для $\chi_{M,n'}(\vec{p})$ можно провести парциальное разложение, т.е. разделить радиальную и угловые переменные. Действительно, выражения (3.I9) и (3.2I) имеют вид

$$V(M;\vec{p},\vec{k}) = V\left(M;\omega_p,\omega_k;(\vec{p}-\vec{k})^2\right)$$

и как следствие этого инвариантны относительно пространственных вращений R, то есть

$$V(M;R\vec{p},R\vec{k}) = V(M;\vec{p},\vec{k}).$$

В силу этого факта мы можем произвести разложение каждого из потенциалов (3.I9), (3.2I) по сферическим функциям в следующей форме:

$$V\left(M,\omega_p,\omega_k;\vec{p}^2+2|\vec{p}|\cdot|\vec{k}|\cos\theta_{p,k}+\vec{k}^2\right) = \tag{4.I}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)2^{-1}\,V_\ell(M;\omega_p,\omega_k)\,P_\ell(\cos\theta_{p,k}) =$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}2\pi\,V_\ell(M;\omega_p,\omega_k)\,Y_{\ell m}(\vec{n}_p)Y^*_{\ell m}(\vec{n}_k).$$

Мы обозначили $\vec{n}_p = \vec{p}/|\vec{p}|$, $\vec{n}_k = \vec{k}/|\vec{k}|$, а $Y_{\ell m}(\vec{n})$ – сферические функции. Парциальные потенциалы V_ℓ (ℓ =0,I,2, ...) определяются, согласно формулам

$$V_\ell(M,\omega_p,\omega_k) = \int_{-1}^{1}V\left(M;\omega_p,\omega_k;\vec{p}^2+2|\vec{p}||\vec{k}|z+\vec{k}^2\right)P_\ell(z)\,dz. \tag{4.2}$$

Разложим по сферическим функциям также и волновую функцию (χ или χ^{ret}),

$$\chi_{M,n'}(\vec{p}) = \sum\sum\chi_{M,\ell}(p)\,Y_{\ell m}(\vec{n}_p);\quad p=|\vec{p}|. \tag{4.3}$$

После подстановки разложений вида (4.I) и (4.3) в уравнение (3.20) и интегрирования в нем по угловым переменным вектора $\vec{k}$, получим одномерные парциальные уравнения для функций $\chi^{ret}_{M,\ell}(p)$ в виде

$$\underline{G}^{-1}_{(0)ret}(M;p)\,\chi^{ret}_{M,\ell}(p) = 2\pi\int_0^\infty V^{ret}_\ell(M;\omega_p,\omega_k)\,\chi^{ret}_{M,\ell}(k)\,k^2dk. \tag{4.4}$$

Здесь, согласно (3.7),

$$\underline{G}^{-1}_{(0)ret}(M;p) = \underline{G}^{-1}_{(0)ret}(M;\omega_p) = (2\omega_p)^2(M-2\omega_p),$$

а V_ℓ^{ret} определены формулой (4.2). Так, парциальный потенциал в случае $\ell = 0$, получаемый, согласно (4.2), из (3.19), имеет вид

$$V^{ret}_{(2)\,\ell=0}(M;\omega_p,\omega_\kappa) = \frac{g^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{p\kappa}\left\{A_{p,\kappa}(M)\,\ln\left|\frac{\omega_p+\omega_\kappa-M+W_+}{\omega_p+\omega_\kappa-M+W_-}\right| + B_{p,\kappa}(M)\,\ln\left|\frac{\omega_p+\omega_\kappa+W_+}{\omega_p+\omega_\kappa+W_-}\right| - C_{p,\kappa}(M)\left[\frac{1}{\omega_p+\omega_\kappa+W_+} - \frac{1}{\omega_p+\omega_\kappa+W_-}\right]\right\}. \qquad (4.5)$$

В этой формуле мы используем обозначения

$$W_\pm = \sqrt{(p\pm\kappa)^2+\mu^2} \qquad (4.6)$$

Отметим также то важное обстоятельство, что даже в случае, когда масса промежуточного бозона $\mu = 0$, парциальный квазипотенциал (4.5) является непрерывной функцией аргументов $p = |\vec p|$ и $\kappa = |\vec\kappa|$ и не имеет особенности при $p = \kappa$. Этот факт позволяет эффективно проводить численное исследование решений уравнения (4.4) с ядром (4.5).

Аналогично можно определить парциальный потенциал, соответствующий (3.21). Одномерное уравнение для этого случая принимает вид

$$\omega_p\,(M^2-4\omega_p^2)\,\chi_{M,\ell}(p) = 2\pi\int_0^\infty \frac{1}{4\omega_p\,4\omega_\kappa}\cdot \Big\{(2\omega_p+M)(2\omega_\kappa+M)\,V^{ret}_{(2)\ell}(M;\omega_p,\omega_\kappa) + (2\omega_p-M)(2\omega_\kappa-M)\,V^{ret}_{(2)\ell}(-M,\omega_p,\omega_\kappa)\Big\}\,\chi_{M,\ell}(\kappa)\,\kappa^2\,d\kappa,$$

где для случая $\ell = 0$ $V^{ret}_{(2)}$ задается формулой (4.5).

5. О поведении квазипотенциала в координатном пространстве

Квазипотенциалы (3.19), (3.21), как уже отмечалось, не являются локальными. Это означает, что, если, например, уравнение (3.20) с помощью преобразования Фурье записать в обычном координатном пространстве, то оно будет иметь сложный интегро-дифференциальный вид (см., например, /10/). Поэтому рассмотрим теперь случай малых энергий связи $\varepsilon = 2m - M \ll 2m$.

Введем функцию $\Psi(\vec p) = 2\omega_p\,\chi^{ret}_{M,M'}(\vec p)$ и разделим уравнение (3.20) на $2\omega_p$. Тогда нетрудно установить, что функция $\Psi(\vec p)$ быстро убывает с ростом $p = |\vec p|$ и отлична от нуля практически только при $p^2 \lesssim m\varepsilon$. Используя это свойство, разложим в уравнении для $\Psi(\vec p)$ все выражения по степеням ε/m и p/m (κ/m), например,

$$\frac{1}{M^2(\Omega_{p,\kappa}-M)} \cong \frac{1}{4m^2}\left[\frac{1+\varepsilon/m}{W_{p,\kappa}} - \frac{\varepsilon+\vec p^{\,2}/2m+\vec\kappa^{\,2}/2m}{W^2_{p,\kappa}}\right], \qquad (5.1)$$

$$\frac{B_{p,\kappa}(M)}{4\omega_p\omega_\kappa\,\Omega_{p,\kappa}} \cong -\frac{1}{4m^2}\,\frac{\varepsilon+\vec p^{\,2}/2m+\vec\kappa^{\,2}/2m}{2m\,(2m+W_{p,\kappa})}. \qquad (5.2)$$

В этом приближении уравнение для волновой функции примет следующий вид:

$$\left(\varepsilon+\vec p^{\,2}/m\right)\Psi(\vec p) = \frac{g^2}{4m^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left\{\frac{1+\varepsilon/m}{(\vec p-\vec\kappa)^2+\mu^2} + \left(\varepsilon+\vec p^{\,2}/2m+\vec\kappa^{\,2}/2m\right)\left[\frac{-1}{\left((\vec p-\vec\kappa)^2+\mu^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{2m\sqrt{(\vec p-\vec\kappa)^2+\mu^2}\,\left(2m-\sqrt{(\vec p-\vec\kappa)^2+\mu^2}\right)}\right]\right\}\Psi(\kappa)\,d\vec\kappa. \qquad (5.3)$$

Определим теперь волновую функцию в координатном представлении как преобразование Фурье от $\Psi(\vec p)$,

$$\Psi(\vec r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\Psi(\vec p)\,\exp(i\vec p\,\vec r)\,d\vec p. \qquad (5.4)$$

Тогда, как нетрудно убедиться, из уравнения (5.3) следует, что функция $\Psi(\vec r)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$(\varepsilon + \hat{H}_0)\Psi(\vec{r}) = -\left[\hat{V}_0(\vec{r};\varepsilon,\mu) + \hat{V}_1(\vec{r};\varepsilon,\mu)\right]\Psi(\vec{r}), \qquad (5.5)$$

в котором оператор $\hat{H}_0$ есть обычный квантовомеханический оператор кинетической энергии

$$\hat{H}_0 = \hat{\vec{p}}^2/m = -\frac{1}{m}\frac{d^2}{d\vec{r}^2}$$

(напомним, что приведенная масса равна $m/2$). Операторы квазипотенциала $\hat{V}_0$ и $\hat{V}_1$ в уравнении (5.5) задаются следующими выражениями:

$$\hat{V}_0(\vec{r};\varepsilon,\mu) = -\frac{g^2}{4m^2}\frac{1+\varepsilon/m}{4\pi r}exp(-\mu r), \qquad (5.6)$$

$$\hat{V}_1(\vec{r};\varepsilon,\mu) = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon + \hat{H}_0, V_{1,1}(r;\mu) + V_{1,2}(r;\mu)\right\}_+, \qquad (5.7)$$

где $\{\,\}_+$ означает антикоммутатор. При этом функция $V_{1,1}(r,\mu)$ имеет вид

$$V_{1,1}(r;\mu) = \frac{g^2}{4m^2}\frac{1}{2\pi^2}K_0(\mu r), \qquad (5.8)$$

а $V_{1,2}(r;\mu)$ задается преобразованием Фурье

$$V_{1,2}(r;\mu) = \frac{g^2}{4m^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{exp(i\vec{q}\vec{r})\,d\vec{q}}{2m(\vec{q}^2+\mu^2)^{1/2}\left[2m+(\vec{q}^2+\mu^2)^{1/2}\right]}. \qquad (5.8')$$

Если масса промежуточного бозона $\mu \ll m$, то выражение для $V_{1,2}$ упрощается и принимает вид

$$V_{1,2}(r;\mu \ll m) = \frac{g^2}{(4m^2)^2}\frac{\mu}{2\pi^2 r}K_1(\mu r). \qquad (5.9)$$

В формулах (5.8), (5.9) $K_\nu(z)$ - модифицированная функция Бесселя порядка ν.

Итак, уравнение (5.5) запишется теперь следующим образом:

$$(\varepsilon + \hat{H}_0)\Psi(\vec{r}) = \frac{g^2}{4m^2}\left[\frac{1+\varepsilon/m}{4\pi r}exp(-\mu r) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{4\pi^2}\left\{\varepsilon + \hat{H}_0, K_0(\mu r) + \mu(4m^2 r)^{-1}K_1(\mu r)\right\}_+\right]\Psi(\vec{r}). \qquad (5.10)$$

Если кроме предположения о слабой связанности системы мы будем считать, что эффективная безразмерная константа связи $g/2m$ также мала ($g/2m \ll 1$), то в правой части уравнения (5.3) можно оставить только первое слагаемое, и мы приходим, вместо (5.10), к уравнению Шредингера с потенциалом Юкавы

$$(\varepsilon + \hat{H}_0)\Psi(\vec{r}) = \frac{g^2}{4m^2}\frac{1}{4\pi r}exp(-\mu r)\Psi(\vec{r}). \qquad (5.11)$$

Рассмотрим теперь случай равной нулю массы промежуточного бозона. На первый взгляд для функции $\Psi(\vec{r})$ тогда получаем уравнение вида (5.11), в котором потенциал становится кулоновским. Однако следует отметить, что ядро парциального интегрального уравнения типа (4.4) для кулоновского потенциала является сингулярным, в то время как уравнение для функции $\Psi_\ell(p)$, как мы видели выше, несингулярно даже при μ =0. Это означает, что при $\mu = 0$ мы должны несколько по-другому проводить разложения типа (5.1), (5.2).

Действительно, для случая $\mu = 0$ и $g/m \ll 1$ с точностью до членов порядка p/m для первого слагаемого квазипотенциала (3.19) имеем

$$\frac{1}{W_{p,k}\,M^2(\Omega_{p,k}-M)} = \frac{1}{4m^2}\frac{1}{|\vec{p}-\vec{k}|}\frac{1}{\varepsilon+|\vec{p}-\vec{k}|}, \qquad (5.12)$$

а остальные слагаемые (3.19) зануляются. Уравнение для $\Psi(\vec{p})$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$(\varepsilon + \vec{p}^2/m)\Psi(\vec{p}) = \qquad (5.13)$$
$$= \frac{g^2}{4m^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}-\vec{k}|}\cdot\frac{1}{\varepsilon+|\vec{p}-\vec{k}|}\Psi(\vec{k})d\vec{k},$$

а парциальное уравнение для $\Psi_\ell(p)$ в силу зависимости квазипотенциала от энергии ε будет несингулярным.

После перехода в уравнении (5.13) к $\vec{r}$ - представлению, согласно (5.4), получим для $\Psi(\vec{r})$ уравнение Шредингера с потенциалом

$$V(r) = -\frac{g^2}{4m^2}\frac{1}{2\pi^2}\left[ci(\varepsilon r)\sin(\varepsilon r) - si(\varepsilon r)\cos(\varepsilon r)\right]. \qquad (5.14)$$

Здесь $ci(z)$, $si(z)$ - интегральные косинус и синус.

Поведение квазипотенциала (5.14) при малых r задается формулой

$$V(r) = -\frac{g^2}{4m^2}\,\frac{1}{4\pi r}\left[1+\frac{2}{\pi}\,\varepsilon r \ln(\varepsilon r) + \frac{2}{\pi}(\gamma-1)\,\varepsilon r + O(\varepsilon^2 r^2)\right]; \quad r \ll 1/\varepsilon . \tag{5.I5}$$

При больших r поведение (5.I4) следующее:

$$V(r) = -\frac{g^2}{4m^2}\,\frac{1}{2\pi^2 r}\,\frac{1}{\varepsilon r}\left[1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 r^2}\right)\right]; \; r \gg \frac{1}{\varepsilon} . \tag{5.I6}$$

Таким образом, в случае нулевой массы промежуточного бозона квазипотенциал (5.I4) спадает на больших расстояниях быстрее, чем кулоновский. Причиной такой "самоэкранировки" является зависимость квазипотенциала от полной энергии системы.

Отметим также, что при $\varepsilon \to 0$ логарифмическая особенность квазипотенциала (5.I4) в нуле исчезает, а точка, с которой начинается квадратичное, а не кулоновское убывание потенциала (точка $r_0 \approx 1/\varepsilon$), отодвигается на бесконечность. Таким образом, в пределе $\varepsilon \to 0$ поведение квазипотенциала (5.I4) становится кулоновским.

6. Заключение

Таким образом, в настоящей работе вычислена двухвременная функция Грина и ее запаздывающая часть, а также соответствующие им квазипотенциалы во втором порядке теории возмущений. Произведено парциальное разложение полученных квазипотенциальных уравнений для волновых функций связанных состояний. Определено поведение найденного квазипотенциала в координатном представлении в случае слабосвязанной системы.

В заключение авторы выражают благодарность за полезные обсуждения А.А.Афонину, Е.А.Дею, А.В.Ефремову, С.П.Курловичу, И.Л.Соловцову и В.Н.Старикову.

Литература

I. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, N 2, p.380–400.
2. Фаустов Р.Н. Квазипотенциальный метод в задаче о связанном состоянии двух частиц. - В кн.: "Межд. зимняя школа теор.физики при ОИЯИ", т.2, ОИЯИ, Дубна, I964, с.I08–II6.
3. Филиппов А.Т. О построении квазипотенциальных уравнений в теории поля. Препринт Р-I493, Дубна: ОИЯИ, 1964.
4. Nguyen Van Hieu, Faustov R.N. Nucl. Phys., 1964, 53, p.337–344.
5. Фаустов Р.Н., Хелашвили А.А. ЯФ, 1969, I0, вып.5, с.I085-I088.
6. Faustov R.N. Ann. of Phys., 1973, v.78, N 1, p.176–189.
7. Kvinikhidze A.N., Stoyanov D.Ts. Retarded part of the two-time Green function and two-body relativistic problem. Preprint E2-5746. Dubna, JINR, 1971.
8. Kadyshevsky V.G. Nucl. Phys., 1968, B6, N 1, p.125–147.
9. Крючков С.В. и др. Описание структурных функций π- мезона в релятивистской теории связанных состояний. Препринт Р2-84-I0. Дубна: ОИЯИ, I984.
I0. Хрусталев О.А. Квазипотенциальное уравнение в $\tilde{x}$-пространстве. Препринт 69-24, Серпухов: ИФВЭ, I969.

Рукопись поступила в издательский отдел
2I июня I985 года