объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-472

Е.А.Дей,* В.Н.Капшай,* Н.Б.Скачков

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА С ХРОМОДИНАМИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в ТМФ

* Гомельский государственный университет

1985

I. Введение

Квазипотенциальный подход в квантовой теории поля, предложенный впервые А.А. Логуновым и А.Н. Тавхелидзе /I/, приобрел в настоящее время широкую популярность. Релятивистские волновые функции, являющиеся решениями трехмерных ковариантных квазипотенциальных уравнений /I-3/, находят все большее применение при описании таких динамических характеристик составных систем, как формфакторы упругого рассеяния, структурные функции, формфакторы распадов /4-6/.

Характерной чертой подхода является возможность его формулировки не только в импульсном, но и в релятивистском конфигурационном представлении /7,8/, где квазипотенциальные уравнения имеют вид разностных уравнений. Решение такого рода уравнений связано со значительными трудностями, поскольку, как известно, разностное уравнение можно рассматривать как дифференциальное бесконечного порядка. Это приводит к необходимости создания и исследования специальных методов решения релятивистских квазипотенциальных уравнений /8-II/. При этом несомненный интерес представляет не только решение конкретного уравнения с различными потенциалами, но и исследование различных по виду уравнений, а также развитие методов их решения. При описании составных кварк-антикварковых систем в работах /5,I2-I3/ использовался квазипотенциал хромодинамического типа, скалярная часть которого в импульсном пространстве имеет вид

$$V(Q^2) = \frac{g^2}{Q^2 \,\mathrm{Arch}\,(1 + Q^2/2m^2)} \qquad (\mathrm{I.I})$$

и обладает "асимптотически свободным" поведением при больших Q^2

$$V(Q^2) \underset{Q^2\to\infty}{\cong} \frac{g^2}{Q^2 \ln (Q^2/\Lambda^2)} .$$

Здесь $-Q^2=(p-k)^2$ - квадрат переданного импульса , m - масса кварка, Λ - масштабный параметр квантовой хромодинамики. В релятивистском конфигурационном представлении потенциал (I.I) принимает форму локального кулоновского потенциала /I3-I4/

$$V(r) = -\frac{g^2}{r} . \qquad (\mathrm{I.2})$$

Некоторые релятивистские уравнения с квазипотенциалом (I.2) рассматривались ранее в работах /I4-I6/.

В настоящей работе предлагается общий метод точного решения радиальных квазипотенциальных уравнений, записанных в релятивистском конфигурационном представлении, с потенциалом хромодинамического типа (I.2). Метод основан на использовании интегрального преобразования Лапласа с фиксированным контуром интегрирования и теории обобщенных функций. Этот метод позволяет найти решение большинства известных квазипотенциальных уравнений со взаимодействием вида(I.2).

Во втором разделе рассматриваются различные варианты квазипотенциальных уравнений и формулируются некоторые уравнения общего вида. В третьем разделе предложенным методом найдены решения квазипотенциальных уравнений общего вида в случае орбитального момента $\ell = 0$. В четвертом разделе рассматривается случай $\ell \neq 0$.

2. Радиальные квазипотенциальные уравнения общего вида

В настоящее время известно несколько типов трехмерных релятивистских квазипотенциальных уравнений для системы двух частиц. Так, в случае бесспиновых частиц равной массы m и сферически-симметричных локальных квазипотенциалов в релятивистском конфигурационном представлении после разделения угловых и радиальной переменных $(\Psi(\vec{r}) = R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi))$ имеем уравнения /7,8,I/

$$\left(2H_0^{rad} - M\right) R_\ell(r) = -V(r) R_\ell(r), \tag{2.I}$$

$$\left(2H_0^{rad} - M\right) H_0^{rad} R_\ell(r) = -m V(r) R_\ell(r), \tag{2.2}$$

$$\left[\left(2H_0^{rad}\right)^2 - M^2\right] R_\ell(r) = -4m V(r) R_\ell(r). \tag{2.3}$$

В уравнениях (2.I)-(2.3) $R_\ell(r)$ есть радиальная волновая функция, $M = 2E$ - масса связанного состояния, $V(r)$ - квазипотенциал. Оператор H_0^{rad} имеет вид

$$H_0^{rad} = m\,ch(iD) + \frac{i}{r}\,sh(iD) + \frac{\ell(\ell+1)}{2mr^2}\exp(iD), \tag{2.4}$$

$$D = \frac{1}{m}\frac{d}{dr} \tag{2.4'}$$

и есть не что иное, как радиальная часть релятивистского гамильтониана /7,8/.

В работе /I4/ для системы двух спинорных кварков были получены радиальные квазипотенциальные уравнения вида

$$H_0^{rad}\left(2H_0^{rad} - M\right) R_\ell(r) = -m V(r)\left[a\left(H_0^{rad}/m\right)^2 + b\right] R_\ell(r), \tag{2.5}$$

где параметры a и b удовлетворяют соотношению $a + b = 1$, при котором уравнение (2.5) имеет правильный нерелятивистский предел.

В работе /II/ рассмотрены уравнения типа Логунова-Тавхелидзе (2.3), отличающиеся способом продолжения квазипотенциала за энергетическую поверхность. Соответствующие им радиальные уравнения имеют вид

$$M\left[\left(2H_0^{rad}\right)^2 - M^2\right] R_\ell(r) = -8m V(r) H_0^{rad} R_\ell(r), \tag{2.6}$$

$$M\left[\left(2H_0^{rad}\right)^2 - M^2\right] R_\ell(r) = -8m H_0^{rad} V(r) R_\ell(r). \tag{2.7}$$

Наряду с уравнениями (2.I)-(2.3), (2.5)-(2.7) были получены и исследованы также аналогичные уравнения другого вида.

Здесь мы рассмотрим два общих уравнения, частными случаями которых при соответствующем выборе параметров являются все упомянутые выше.

Так, уравнение

$$\left[\sum_{\nu=0}^{N_1} \alpha_\nu \left(H_0^{rad}/m\right)^\nu\right]\left(2H_0^{rad} - M\right) R_\ell(r) = -\left[\sum_{\nu=0}^{N_2} \beta_\nu \left(H_0^{rad}/m\right)^\nu\right] V(r) \left[\sum_{\nu=0}^{N_3} \gamma_\nu \left(H_0^{rad}/m\right)^\nu\right] R_\ell(r) \tag{2.8}$$

обобщает, например, уравнения (2.I), (2.2), (2.5) и другие. Наряду с этим мы рассмотрим уравнение, обобщающее уравнения (2.3), (2.6), (2.7) и имеющее вид

$$\left[\sum_{\nu=0}^{N_1} \alpha_\nu \left(H_0^{rad}/m\right)^\nu\right]\left[\left(2H_0^{rad}\right)^2 - M^2\right] R_\ell(r) = -4m\left[\sum_{\nu=0}^{N_2} \beta_\nu \left(H_0^{rad}/m\right)^\nu\right] V(r) \left[\sum_{\nu=0}^{N_3} \gamma_\nu \left(H_0^{rad}/m\right)^\nu\right] R_\ell(r). \tag{2.9}$$

В уравнениях (2.8), (2.9) N_1, N_2, N_3 - произвольные натуральные числа, а коэффициенты α_ν, β_ν, γ_ν в нерелятивистском пределе должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{\nu=0}^{N_1} \alpha_\nu = \sum_{\nu=0}^{N_2} \beta_\nu = \sum_{\nu=0}^{N_3} \gamma_\nu = 1, \tag{2.IO}$$

что обеспечивает существование правильных нерелятивистских пределов уравнений (2.8), (2.9).

Для случая нулевого орбитального момента $\ell = 0$ с помощью подстановки $R_0(r) = \Phi(r)/r$ из (2.8), (2.9) получаем, соответственно, уравнения общего вида относительно функций $\Phi(r)$:

$$2m\, P_\alpha[ch(iD)]\{ch(iD) - \cos\chi\}\Phi(r) =$$

$$= -P_\beta[ch(iD)]\cdot V(r)\cdot P_\gamma[ch(iD)]\,\Phi(r), \qquad (2.11)$$

$$m\, P_\alpha[ch(iD)]\{ch^2(iD) - \cos^2\chi\}\Phi(r) =$$

$$= -P_\beta[ch(iD)]\cdot V(r)\cdot P_\gamma[ch(iD)]\,\Phi(r). \qquad (2.12)$$

Здесь введены следующие обозначения для полиномов от оператора $ch(iD)$:

$$P_\alpha[ch(iD)] = \sum_{\nu=0}^{N_1}\alpha_\nu\, ch^\nu(iD)\ ;\quad P_\beta[ch(iD)] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N_2}\beta_\nu\, ch(iD)\ ;\quad P_\gamma[ch(iD)] = \sum_{\nu=0}^{N_3}\gamma_\nu\, ch^\nu(iD). \qquad (2.13)$$

Мы используем также параметризацию массы связанного состояния в форме $M = 2m\cos\chi$; $M < 2m$.

Отметим здесь, что решения разностных квазипотенциальных уравнений типа (2.11), (2.12) всегда определяются с точностью до i/m - периодических констант /15,17/. Другими словами, при решении разностных уравнений мы можем получить и лишние решения. Для полной фиксации волновой функции (конкретизации вида i/m - периодической константы), как отмечено в /16/, следует обращаться к соответствующим интегральным квазипотенциальным уравнениям в импульсном или конфигурационном пространстве.

3. Точное решение радиальных квазипотенциальных уравнений общего вида с кулоновским взаимодействием ($\ell = 0$)

Рассмотрим квазипотенциальное уравнение общего вида (2.11) с хромодинамическим квазипотенциалом (1.2)

$$2m\, P_\alpha[ch(iD)]\{ch(iD) - \cos\chi\}\Phi(r) =$$

$$= P_\beta[ch(iD)]\,\frac{g^2}{r}\,P_\gamma[ch(iD)]\,\Phi(r). \qquad (3.1)$$

Для решения уравнения (3.1) применим интегральное преобразование Лапласа

$$\Phi(r) = \int_0^\infty \exp(-mry)\,\varphi(y)\,dy\ . \qquad (3.2)$$

Тогда для функции $\varphi(y)$ получаем интегральное уравнение

$$2P_\alpha(\cos y)\{\cos y - \cos\chi\}\varphi(y) =$$

$$= g^2 P_\beta(\cos y)\int_0^y P_\gamma(\cos y')\,\varphi(y')\,dy'\ , \qquad (3.3)$$

в котором полиномы $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ задаются формулами (2.13).

Уравнение (3.3), очевидно, эквивалентно дифференциальному уравнению

$$2\frac{d}{dy}\left[\frac{P_\alpha(\cos y)}{P_\beta(\cos y)}(\cos y - \cos\chi)\,\varphi(y)\right] =$$

$$= g^2 P_\gamma(\cos y)\,\varphi(y) \qquad (3.4)$$

с начальным условием $\varphi(0) = 0$.

Введем вспомогательную функцию

$$F(y) = P_\gamma(\cos y)\,\varphi(y)\ , \qquad (3.5)$$

для которой из (3.4) следует уравнение

$$\frac{d}{dy}\left[W(\chi,y)F(y)\right] = \frac{g^2}{2}F(y)\ ;\ F(0) = 0, \qquad (3.6)$$

где мы обозначили:

$$W(\chi,y) = \frac{\cos y - \cos\chi}{Z(\cos y)}\ ;\ Z(\cos y) = \frac{P_\beta(\cos y)P_\gamma(\cos y)}{P_\alpha(\cos y)}. \qquad (3.7)$$

Легко убедиться в том, что все производные функции $F(y)$ при $y = 0$ равны нулю. Следовательно, классическое решение дифференциального уравнения (3.6) является тривиальным: $F_{\kappa\lambda}(y) \equiv 0$. Это означает, что задача (3.6), а, следовательно, и уравнение (3.3), может иметь только нетривиальные решения в виде обобщенных функций.

Как известно /18/, обобщенные решения могут отличаться от классических в точках, в которых коэффициенты дифференциального уравнения имеют особенности, в частности, обращаются в нуль. Заметим, что число линейно-независимых обобщенных решений не связано с порядком дифференциального уравнения. Особыми для уравнения (3.6) являются точки, определяемые условием $W(x,y)=0$, которое в общем случае сводится к простейшему тригонометрическому уравнению[I)] $\cos y = \cos x$. Множество корней этого уравнения $\{\xi_k\}$ образовано двумя последовательностями $\{\xi_k^a\} = \{x + 2\pi k\}$; $\{\xi_k^б\} = \{2\pi - x + 2\pi k\}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. В каждой из этих последовательностей коэффициент $W(x,y)$ уравнения (3.6) обращается в нуль и при переходе через точку меняет знак. В каждой из точек ξ_k обобщенное решение может быть отлично от классического (тривиального), то есть каждая точка ξ_k является возможным носителем частного обобщенного решения уравнения (3.6).

В соответствии с теоремой о представлении обобщенной функции с точечным носителем /I9/ частное обобщенное решение уравнения (3.6) в точке $y = \xi$ (ξ – любая из $\{\xi_k\}$) запишется в виде линейной комбинации δ-функции и ее производных

$$F(y) = \sum_{j=0}^{n} B_j\, \delta^{(j)}(y-\xi) . \tag{3.8}$$

Здесь n – произвольное натуральное число, а B_j – неопределенные (искомые) коэффициенты.

Подстановка (3.8) в (3.6) и учет свойств δ-функции приводят к соотношениям

$$\frac{g^2}{2} B_0\, \delta(y-\xi) + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{\ell=j}^{n} B_\ell C_\ell^{j-1} (-1)^{\ell-j} W_\xi^{(\ell-j+1)} + \frac{g^2}{2} B_j \right\} \delta^{(j)}(y-\xi) = 0, \tag{3.9}$$

где $C_\ell^j = \ell!\,[\,j!\,(\ell-j)!\,]^{-1}$ – биномиальные коэффициенты, $W_\xi^{(\ell)} = \left[W_y^{(\ell)}(x,y)\right]_{y=\xi}$ – ℓ-я производная функции (3.7) по y в точке $y=\xi$. В силу линейной независимости системы производных δ – функции разного порядка /I9/ из (3.9) получаем соотношение, определяющее коэффициенты B_j. При этом $B_0 = 0$, а для неизвестных B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ имеем систему однородных линейных уравнений, матрица коэффициентов которой является треугольной,

---

[I)] Равенство $W(x,y)=0$ выполняется и при условии $P_\alpha(\cos y) = 0$, однако его использование приводит к волновым функциям и условию квантования, которые не имеют правильного нерелятивистского предела. Такие решения заведомо являются лишними в формализме разностных уравнений и поэтому далее не рассматриваются.

$$\begin{bmatrix} \frac{g^2}{2} + W_\xi^{(1)} & -C_2^0 W_\xi^{(2)} & \ldots & (-1)^{n-1} C_n^0 W_\xi^{(n)} \\ 0 & \frac{g^2}{2} + 2W_\xi^{(1)} & \ldots & (-1)^{n-2} C_n^1 W_\xi^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{g^2}{2} + nW_\xi^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_n \end{bmatrix} = 0. \tag{3.10}$$

Условие существования нетривиального решения системы (3.10) есть

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{g^2}{2} + j W_\xi^{(1)} \right) = 0.$$

Отсюда следует n возможных соотношений $g^2 + 2jW_\xi^{(1)} = 0$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Достаточно, однако, рассмотреть лишь последнее

$$\frac{g^2}{2} + n\left[W(x,y)\right]^{(1)}_{y=\xi} = 0 , \tag{3.11}$$

так как аналогичное соотношение при $j = n' < n$ приводит к обращению в нуль всех коэффициентов, начиная с $B_{n'+1}$, т.е. $B_{n'+1} = B_{n'+2} = \ldots = B_n = 0$. Следовательно, верхний предел в сумме (3.8) становится равным n' . Поскольку n произвольно, то рассмотрение $n' < n$ не дает новых решений. Другими словами, проводя в (3.8) суммирование по j до n, мы полагали коэффициент $B_n \neq 0$. Как легко видеть, из (3.10) следует тогда условие (3.11).

Решения системы (3.10) определяются с точностью до постоянного множителя; его мы фиксируем, положив $B_n = 1$. После этого система (3.10) становится неоднородной. Из нее находим для коэффициентов B рекуррентные соотношения, связывающие B_j со всеми последующими,

$$B_j = \left\{ \sum_{\ell=j+1}^{n} B_\ell (-1)^{\ell-j} C_\ell^{j-1} W_\xi^{(\ell-j+1)} \right\} \left[(n-j) W_\xi^{(1)} \right]^{-1}, \tag{3.12}$$

причем в (3.12) $j = n-1,\ n-2,\ \ldots, 1$. С помощью (3.12) искомые коэффициенты вычисляются последовательно, начиная с $B_n = 1$.

С учетом (3.7), из (3.11) получаем соотношение

$$n = \frac{g^2}{2\sin\xi}\, Z(\cos\xi), \tag{3.13}$$

где функция $Z(\cos\xi)$ определена формулой (3.7).

Для построения общего обобщенного решения уравнения (3.6) проанализируем частные решения во всех точках ξ_k. Частные обобщенные решения в каждой из точек первой последовательности $\xi_k^a = x+2\pi k$ имеют в соответствии с (3.8) вид

$$F_k(y) = \sum_{j=1}^{n} B_j\, \delta^{(j)}(y-x-2\pi k), \qquad (3.14)$$

где целое число n – то же, которое входит в соотношение (3.13). Действительно, правая часть (3.13) для точек ξ_k^a не зависит от k; это означает, прежде всего, что верхние пределы суммирования в формуле (3.14) одни и те же для всех точек $\xi_k^a = x+2\pi k$. С другой стороны, учитывая, что $M=2m\cos x$ (то есть, что x параметризует массу связанного состояния) и что $\sin \xi_k^a = \sin x$, $\cos \xi_k^a = \cos x$, из (3.13) находим условие

$$g^2 Z(\cos x) = 2n \sin x, \qquad (3.15)$$

определяющее значение $x = x_n$ при заданном n.

Условие (3.15) и есть условие квантования, дающее спектр масс связанной системы $M_n = 2m\cos x_n$, где $\cos x_n$ находится из (3.15). Так, например, для простейшего случая $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ в (3.1) мы приходим к известному ранее условию квантования уравнения (2.1) /8/:

$$\frac{g^2}{2\sin x} = n \; ; \quad M_n = 2m\sqrt{1-\frac{g^2}{4n^2}} \; .$$

Отметим немаловажный факт, состоящий в том, что соотношения (3.10) и (3.13), определяющие частное обобщенное решение в точке ξ, одинаковы для всех точек ξ_k^a.

Частное обобщенное решение (3.8) в точках второй последовательности $\xi_k^b = 2\pi - x + 2\pi k$, как легко видеть, не существует, так как $\cos\xi_k^b = \cos x$, $\sin\xi_k^b = -\sin x$, и в соответствии с (3.13) получаем $n<0$, что противоречит (3.8).

Таким образом, полное обобщенное решение уравнения (3.6), являющееся, в соответствии с общими правилами, линейной комбинацией всех частных решений (3.8) и отвечающее конкретному выбору n, имеет вид

$$F(y) = \sum A_k F_k(y) = \sum A_k \sum B_j\, \delta^{(j)}(y-x-2\pi k), \qquad (3.16)$$

где A_k – произвольные коэффициенты, не определяемые из уравнения (3.6). Неопределенность коэффициентов A_k отражает именно тот факт, что исходное разностное уравнение (3.1) имеет бесконечное множество

решений. Таким образом, обобщенное решение уравнения (3.6) есть линейная комбинация δ-функций и их производных $\delta^{(j)}(y-x-2\pi k)$ при $j = 1,2,\ldots,n$; $k = 0,1,2,\ldots$, т.е. множество функций $\{\delta^{(j)}(y-x-2\pi k)\}$ образует фундаментальную систему решений уравнения (3.6). Наконец, из (3.16) с помощью (3.2) и с учетом (3.5) для волновой функции в релятивистском конфигурационном представлении при заданном n получаем

$$\Phi_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{j=1}^{n} B_j \int_0^{\infty} \exp(-mry)\,\delta^{(j)}(y-x-2\pi k)\left[P_\gamma(\cos y)\right]^{-1} dy,$$

или, как легко показать,

$$\Phi_n(r) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k \exp(-2\pi k r m)\right]\cdot$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j B_j \frac{d^j}{dx^j}\left\{\left[P_\gamma(\cos x)\right]^{-1}\exp(-mrx)\right\}. \qquad (3.17)$$

Важным свойством полученной формулы является то, что все неопределяемые коэффициенты A_k сгруппировались таким образом, что сумма в квадратной скобке в (3.17) есть не что иное, как i/m-периодическая "константа", явный вид которой невозможно установить исходя из разностного уравнения (3.1). Обозначая $\sum A_k \exp(-2\pi k r m) = C(r)$, получаем окончательный вид решения разностного квазипотенциального уравнения (3.1)

$$\Phi_n(r) = C(r)\sum_{j=1}^{n} (-1)^j B_j \frac{d^j}{dx^j}\left\{\frac{\exp(-mrx)}{P_\gamma(\cos x)}\right\}. \qquad (3.18)$$

где коэффициенты B_j и параметр x определены, соответственно, по формулам (3.12), (3.15).

В частном случае, когда все $A_k = 1$; $k = 0,1,\ldots$, i/m-периодическая константа $C(r)$ совпадает с "обобщенной" функцией $\theta(mr)$, определенной в релятивистском конфигурационном представлении /8/,

$$\theta(mr) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2\pi k r m) = \frac{1}{1-\exp(-2\pi r m)} \; .$$

Отметим, что в работе /16/ был получен именно такой результат при решении простейшего квазипотенциального уравнения (2.1).

Необходимо подчеркнуть, что при использовании изложенного метода наиболее важные результаты решения квазипотенциального уравнения, а именно, условие квантования (3.15) и явный вид волновых функций основного, а также первых возбужденных состояний $\Phi_n(r)$,

n = I,2,3, ..., получаются очень простым способом. Кроме того, как следует из (3.I5) и (3.7), вид условия квантования полностью определяется видом функции $Z(\cos x)$, а следовательно, непосредственно формой самого квазипотенциального уравнения.

Отметим, также, что рассмотренный метод позволяет довольно просто получить решение и нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом.

Из (3.I8) с учетом (3.I5) получаем выражение для волновой функции основного состояния системы двух релятивистских частиц в релятивистском конфигурационном представлении, определяемой квазипотенциальным уравнением общего вида (3.I),

$$\Phi_1(r) = C\cdot(r)\exp(-rmx)\cdot$$
$$\left\{2mr\,P_\alpha(\cos x) - g^2 P_\beta(\cos x)\left[\sum_{\nu=1}^{N_3}\nu\gamma_\nu \cos^{\nu-1}x\right]\right\}. \qquad (3.I9)$$

Из (3.I9) следует, что $\Phi_1(r)$, как и условие квантования (3.I5), определяется формой самого квазипотенциального уравнения.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что волновая функция (3.I9) действительно является решением уравнения (3.I). Из общей формулы (3.I9) легко находим, например, те частные случаи, которые были рассмотрены в работах /I4,I6/.

Совершенно аналогичным образом применяется изложенный метод и для решения радиального квазипотенциального уравнения Логунова – Тавхелидзе общего вида (2.I2) с потенциалом (I.2). Рассуждая так же, как и ранее, вновь получим относительно функции $F(y)$ уравнение (3.6), в котором функция $W(x,y)$, в отличие от (3.7), теперь имеет вид

$$W(x,y) = \frac{\cos^2 y - \cos^2 x}{Z(\cos y)}\ . \qquad (3.20)$$

Далее, точно так же устанавливаем, что классическое решение уравнения (3.6) тривиально, а обобщенное решение может отличаться от тривиального в точках, определяемых условием $W(x,y)=0$, что в общем случае сводится к уравнению $\cos^2 y = \cos^2 x$. Множество $\{\xi\}$ его корней состоит из четырех последовательностей точек

$$\xi^L_k = \xi^L + 2\pi k\ ;\ L = a, b, c, d\ ;$$
$$\xi^a = x\ ;\ \xi^b = 2\pi - x\ ;\ \xi^c = \pi - x\ ;\ \xi^d = \pi + x\ . \qquad (3.2I)$$

Из (3.II), используя явный вид (3.20), получаем соотношения

$$\frac{g^2 Z(\cos\xi)}{\sin 2\xi} = n\ . \qquad (3.22)$$

Проанализируем частные обобщенные решения уравнения (3.6) в точках множества $\{\xi\}$. В каждой из точек первой последовательности $\xi^a_k = x + 2\pi k$ частное обобщенное решение имеет вид (3.8), коэффициенты B_j последовательно определяются, согласно (3.I2), причем теперь $W(x,y)$ задается формулой (3.20). Соотношение (3.22) для всех точек ξ^a_k имеет один и тот же вид

$$\frac{g^2 Z(\cos x)}{\sin 2x} = n\ . \qquad (3.23)$$

Частное обобщенное решение в каждой из точек второй последовательности $\xi^b_k = 2\pi - x + 2\pi k$ не существует, так как для них из (3.22) следует, что всегда $n < 0$.

Для точек третьей $\xi^c_k = \pi - x + 2\pi k$ и четвертой $\xi^d_k = \pi + x + 2\pi k$ последовательностей из (3.22) получаем соответственно:

$$g^2 Z(-\cos x)/\sin 2x = -n\ , \qquad (3.24)$$
$$g^2 Z(-\cos x)/\sin 2x = n\ . \qquad (3.25)$$

Из сравнения (3.24) и (3.25), правые части которых имеют разные знаки, следует, что частные обобщенные решения существуют только в какой-то одной из указанных последовательностей точек: ξ^c_k или ξ^d_k . В какой именно, очевидно, определяется конкретными значениями параметров α_ν , β_ν , γ_ν . Кроме того, так как соотношение (3.23) справедливо для любых параметров уравнения, т.е. однозначно связывает n и x , то существование решений в точках ξ^c_k , ξ^d_k зависит от того, какая из формул, (3.24) или (3.25), совпадает с (3.23) в этих точках.

С учетом сделанных замечаний можно получить общее обобщенное решение уравнения (3.6), а следовательно, в соответствии с (3.2), и явный вид волновой функции $\Phi_n(r)$ в релятивистском конфигурационном представлении, в зависимости от значений входящих в функцию $W(x,y)$ (3.20) коэффициентов α_ν , β_ν , γ_ν . При этом можно выделить следующие частные случаи:

I. Если все коэффициенты с нечетными индексами в (3.20) (α_ν , β_ν , γ_ν) равны нулю, то уравнение (3.6) имеет две совокупности частных обобщенных решений вида (3.8) – в точках ξ^a_k и ξ^d_k. Полное обобщенное решение есть их суперпозиция $F_n(y) = F^a_n(y) + F^d_n(y)$, где

$$F^L_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} A^L_k \sum_{j=1}^{n} B^L_j\, \delta^{(j)}(y - \xi^L - 2\pi k)\ , \qquad (3.26)$$

а коэффициенты B^{L}_{j} находятся с помощью соотношений (3.12) с учетом (3.20) при $\xi = \xi^{L}_{k}$. Соответствующая $F_n(y)$ волновая функция $\Phi_n(r)$ в релятивистском конфигурационном представлении в данном случае будет иметь вид

$$\Phi_n(r) = \Phi^a_n(r) + \Phi^b_n(r);$$

$$\Phi^L_n(r) = C^L(r)\sum_{j=1}^{n}(-1)^j B^L_j \frac{d^j}{dy^j}\left\{\frac{\exp(-mry)}{P_\gamma(\cos y)}\right\}_{y=\xi^L}. \qquad (3.27)$$

В частности, для волновой функции основного состояния получаем $\Phi_1(r) = \Phi^a_1 + \Phi^d_1$, где

$$\Phi^L_1(r) = C^L(r)\exp(-r\xi^L m)\cdot \left\{2mr\cos\xi^L P_\alpha(\cos\xi^L) - g^2 P_\beta(\cos\xi^L)\sum_{\nu=0}^{N_3}\nu\gamma_\nu \cos^{\nu-1}\xi^L\right\}. \qquad (3.28)$$

2. Если все коэффициенты с четными индексами α_ν, β_ν, γ_ν равны нулю или если в любой из трех групп $\{\alpha_\nu\}$, $\{\beta_\nu\}$, $\{\gamma_\nu\}$ все четные коэффициенты равны нулю, а в двух оставшихся равны нулю все нечетные, то уравнение (3.6) имеет две последовательности частных обобщенных решений в точках ξ^a_k, ξ^c_k. В этом случае общее обобщенное решение $F_n = F^a_n + F^c_n$, соответствующая волновая функция в релятивистском конфигурационном представлении $\Phi_n(r) = \Phi^a_n(r) + \Phi^c_n(r)$, волновая функция основного состояния $\Phi_1 = \Phi^a_1 + \Phi^1_c$ (см. (3.26)-(3.38)).

3. Во всех остальных случаях уравнение (3.6) имеет одну последовательность частных обобщенных решений в точках ξ^a_k. Соответственно имеем результаты: $F_n(y) = F^a_n(y)$, $\Phi_n(r) = \Phi^a_n(r)$;

$$\Phi_1(r) = C^a(r)\exp(-rmx)\left\{2rm P_\alpha - g^2 P_\beta\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{N_3}\nu\gamma_\nu\cos^\nu x\right]\right\}.$$

Для всех трех вариантов решения условие квантования определяется формулой (3.23), т.е. $g^2 Z(\cos x) = n\sin 2x$, коэффициенты B_j определяются из соотношений (3.12), где под ξ понимаются точки ξ^L из (3.21), а $W(x,y)$ задается формулой (3.20).

4. Решение простейшего радиального квазипотенциального уравнения при $\ell \neq 0$

Метод решения радиальных квазипотенциальных уравнений с кулоновским взаимодействием, изложенный в предыдущем разделе, исполь-

зуем теперь для решения уравнения (2.1) с радиальным гамильтонианом (2.4) и потенциалом (1.2) в случае отличного от нуля орбитального момента ($\ell \neq 0$). В рассматриваемом уравнении /8/

$$\left[2\,\mathrm{ch}(iD) + 2\,\frac{i}{mr}\,\mathrm{sh}(iD) + \frac{\ell(\ell+1)}{m^2r^2}\exp(iD)\right]R_\ell(r) = \left(2\cos x + g^2/(mr)\right)R_\ell(r) \qquad (4.1)$$

сделаем подстановку

$$R_\ell(r) = (mr-i)(mr-2i)\dots(mr-\ell i)\,U_\ell(r). \qquad (4.2)$$

Тогда для функции $U_\ell(r)$ получаем уравнение

$$\left[2\,\mathrm{ch}(iD) + 2\,\frac{i(\ell+1)}{mr}\,\mathrm{sh}(iD) - 2\cos x\right]U_\ell(r) = \frac{g^2}{mr}\,U_\ell(r).$$

Применив преобразование Лапласа (3.2), приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно функции $\varphi_\ell(y)$ - лаплас-оригинала функции $U_\ell(r)$:

$$\frac{d}{dy}\left[\tilde W(x,y)\varphi_\ell(y)\right] - Q_\ell(y)\varphi_\ell(y) = 0\ ;\ \varphi_\ell(0)=0. \qquad (4.3)$$

Мы обозначили здесь

$$\tilde W(x,y) = \cos y - \cos x\ ;\qquad Q_\ell(y) = g^2/2 - (\ell+1)\sin y. \qquad (4.4)$$

Как и в предыдущем разделе, легко убедиться в том, что задача Коши (4.3) не имеет нетривиальных классических решений, а частные обобщенные решения, отличные от тривиального классического, могут существовать в точках, определяемых уравнением $\tilde W(x,y) = 0$, а именно $\xi^a_k = x + 2\pi k$ или $\xi^b_k = 2\pi - x + 2\pi k$, и имеет в них вид

$$\varphi_\ell(y) = \sum B_{\ell,j}\,\delta^{(j)}(y-\xi), \qquad (4.5)$$

где $n = 0,1,2, \dots$ - произвольное натуральное число, $B_{\ell,j}$ - искомые коэффициенты.

Подставляя (4.5) в (4.3), с учетом свойств $\delta^{(j)}$ - функций получаем однородную систему $n+1$ уравнений, определяющих коэффициенты B,

$$\begin{bmatrix} Q_\ell(\xi) & -Q_\ell^{(1)}(\xi) & \ldots & (-1)^n Q_\ell^{(n)}(\xi) \\ 0 & \widetilde{W}_\xi^{(1)} + Q_\ell(\xi) & \ldots & C_n^0 \widetilde{W}_\xi^{(n)} + C_n^1 Q_\ell^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n\widetilde{W}_\xi^{(1)} + Q_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\ell,0} \\ B_{\ell,1} \\ \ldots \\ B_{\ell,n} \end{bmatrix} = 0. \qquad (4.6)$$

Условие разрешимости этой однородной системы следующее:

$$\prod_{j=0}^{n} \left[j \widetilde{W}_\xi^{(1)}(x,\xi) + Q_\ell(\xi) \right] = 0. \qquad (4.7)$$

Достаточно рассмотреть вытекающее из (4.7) условие

$$n \widetilde{W}_\xi^{(1)}(x,\xi) + Q_\ell(\xi) = 0, \qquad (4.8)$$

так как рассмотрение остальных сомножителей (4.7) приводит к частному случаю $n' < n$ (4.5)-(4.8).

Для точек первой последовательности $\xi_k^a = x + 2\pi k$ из (4.8) с учетом (4.4) получаем

$$g^2 = 2 \sin x \cdot (n + \ell + 1). \qquad (4.9)$$

Условие (4.9) определяет значения массы двухчастичной системы $M = 2m \cos x$. Каждое состояние системы, как следует из (4.9), определяется заданием двух квантовых чисел n и ℓ. Масса связанного состояния, согласно (4.9), зависит только от их комбинации $N = n + \ell + 1$, а именно:

$$M = 2m \sqrt{1 - g^2/4N^2},$$

и, следовательно, уровни вырождены по ℓ. По аналогии с нерелятивистским радиальным уравнением Шредингера параметры N и n следует назвать соответственно главным и радиальным квантовыми числами.

Так как любое решение однородного уравнения (4.3) определяется с точностью до постоянного множителя, а коэффициент $B_{\ell,n}$ в (4.5) в силу (4.8) остается произвольным, будем считать $B_{\ell,n} = 1$. Тогда из (4.6) с учетом (4.8) получаем систему неоднородных уравнений относительно неизвестных $B_{\ell,0}$, $B_{\ell,1}$, ..., $B_{\ell,n-1}$ с треугольной матрицей коэффициентов. Решение системы можно представить рекуррентной формулой

$$B_{\ell,j} = \left\{ \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{k-j+1} \left[C_k^{j-1} W_\xi^{(k-j+1)} + C_k^j Q^{(k-j)} \right] B_{\ell,k} \right\} \left[(n-j) \sin x \right]^{-1}.$$

Частные обобщенные решения уравнения (4.3) в точках второй последовательности ξ_k^ℓ не существуют. Поэтому полное обобщенное решение уравнения (4.3), являющееся суперпозицией всех частных решений (4.5) в точках ξ_k^a, имеет вид

$$\varphi_{N,\ell}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{j=0}^{n} B_{\ell,j} \delta^{(j)}(y - x - 2\pi k); \quad N = n + \ell + 1. \qquad (4.10)$$

В соответствии с (3.2), из (4.10) получаем в релятивистском конфигурационном представлении

$$u_{N,\ell}(r) = C(r) \sum_{j=0}^{n} B_{\ell j} (-1)^j (mr)^j \exp(-mrx).$$

Таким образом, решение разностного радиального квазипотенциального уравнения (4.1) в релятивистском конфигурационном представлении для фиксированных N, ℓ имеет вид

$$\Phi_{N,\ell}(r) = C(r)(mr - i)(mr - 2i)\ldots(mr - \ell i)\left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j B_{\ell j} (mr)^j\right] \exp(-mrx).$$

5. <u>Заключение</u>

В данной работе нами предложен метод точного решения разностных радиальных квазипотенциальных уравнений общего вида с хромодинамическим квазипотенциалом (1.1), имеющим в релятивистском конфигурационном представлении вид кулоновского потенциала (1.2). Наш метод позволяет получить спектры масс и волновые функции основных и возбужденных состояний двухчастичной релятивистской системы для квазипотенциальных уравнений различного вида. Решено также радиальное квазипотенциальное уравнение простейшего вида для случая отличного от нуля орбитального момента.

Авторы благодарны А.А. Афонину, Н.В. Максименко, Л.Г. Морозу, В.И. Саврину, И.Л. Соловцову, В.Н. Старикову и В.Г. Теплякову за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература:

1. Logunov A.A. Nuovo Cimento, 1963, 29, No 2, 380–400.
2. Kadyshevsky V.G. Nucl. Phys., 1968, B6, No 1, 125–137.
3. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. В сб.: Проблемы теоретической физики (сб., посвященный 60-летию Н.Н. Боголюбова). "Наука", М.:, 1969, 261-277.
4. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ЯФ, 1979, 30, № 4, 1079-1088.
5. Капшай В.Н., Линкевич А.Д., Саврин В.И., Скачков Н.Б. ТМФ, 1982, 53, № 3, 388-398.
6. Kozlov G.A., Kuleshov S.P., Savrin V.I., Sanadze V.V., Skachkov N.B,– Zeitschrift fur Physik, 1983, C21, No 1/2, 63–68.
7. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cimento, 1968, A55, No 2, 233–257.
8. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЭЧАЯ, 1972, 2, № 3, 638-690.
9. Ву Суан Минь Е.П., Кадышевский В.Г. Препринт Р5-84-449, Дубна, ОИЯИ, 1984.
10. Архипов А.А., Саврин В.И. ТМФ, 1982, 53, № 3, 342-357.
11. Капшай В.Н., Скачков Н.Б. ТМФ, 1983, 55, № 1, 26-38.
12. Savrin V.I., Skachkov N.B. Relativistic Potential with QCD Large Q^2 Behaviour and the Elastic Form Factor of Mesons. Preprint TH 2822-CERN. Geneva: CERN, 1980.
13. Savrin V.I., Skachkov N.B. Nuovo Cimento, 1980, 29, No 11, 363–369.
14. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ТМФ, 1983, 54, № 2, 183-192.
15. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Фриман М. ЯФ, 1969, 9, № 3, 646-652.
16. Капшай В.Н., Скачков Н.Б. ТМФ, 1983, 54, № 2, 183-192.
17. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей . М., Физматгиз, 1967, 420с.
18. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз , 1959, 470с.
19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512с.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июня 1985 года

Дей Е.А., Капшай В.Н., Скачков Н.Б. P2-85-472

Точное решение квазипотенциальных уравнений общего вида с хромодинамическим взаимодействием

Рассмотрены различные квазипотенциальные уравнения, полученные в рамках квантовой теории поля. Для случая потенциала, обладающего "асимптотически свободным" поведением на малых расстояниях, предложен метод решения, основанный на использовании преобразования Лапласа и теории обобщенных функций. Получены точные условия квантования и релятивистские волновые функции для уравнений общего вида.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Dej E.A., Kapshaj V.N., Skachkov N.B. P2-85-472

Exact Solutions of Quasipotential Equations of the General Form with the Chromodynamical Interaction

Various quasipotential equations obtained in the framework of quantum field theory are considered. For the potential of an "asymptotically free" behaviour at short distances a method is proposed which is based on the Laplace Transformation and theory of distributions. Exact conditions of quantization and relativistic wave functions are established for equations of the general form.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985