объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-420

А.Б.Говорков

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА ДЛЯ КВАТЕРНИОННЫХ ПОЛЕЙ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1985

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [18] было рассмотрено майорановское поле, основанное на кватернионах /кватерполе/, скалярную часть которого было предложено интерпретировать как "лептонное" /майорановское/ поле, а векторную часть - как SO(3) - псевдоцветовое "кварковое" поле. Для того чтобы завершить формулировку кватерполей, необходимо определить пространство векторов состояний, в котором они действуют как линейные операторы. Поскольку скалярная /"лептонная"/ часть кватерполя квантуется стандартным образом, далее мы будем рассматривать только векторное /"кварковое"/ кватерполе.

Последовательному построению кватернионной квантовой механики посвящено значительное количество работ [1-3]. Нижеследующее рассмотрение отличается от них тем, что кватернионы входят только во вторично-квантованные поля, тогда как фоковское пространство состояний соответствующих этим полям частиц свободно от кватернионов и является обычным гильбертовым пространством. Возникающая при этом квантовая механика оказывается квантовой механикой парачастиц, удовлетворяющих параферми - статистике третьего порядка [4-8]. По этой причине в ней не возникает проблемы с вероятностной интерпретацией соответствующим образом симметризованных волновых функций и, в частности, не возникает каких-либо ограничений на допустимые состояния частиц. Проблема конфайнмента в такой теории остается динамической проблемой, и автор не разделяет точку зрения, согласно которой явление конфайнмента приписывается алгебраической структуре кватернионов [2].

Для того чтобы две проблемы: построение фоковского пространства для кватерполя и релятивистское описание системы многих частиц не налагались, мы сразу же ограничиваемся рассмотрением нерелятивистского /шредингеровского/ поля. Однако память о майорановском характере мы отразим в его эрмитовости:

$$\psi_M(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) + \psi^+(\vec{x},t), \qquad /1/$$

где $\psi(\vec{x},t)$ - нерелятивистское поле, содержащее операторы уничтожения, а ему эрмитово сопряженное $\psi^+(\vec{x},t)$ поле - операторы рождения частиц /и античастиц/.

В разд.1 мы вкратце напомним формулировку квантования кватернионных полей /кватерполей/. В разд.2 производится построение фоковского представления "майорановского" кватерполя /1/

и, соответственно, квантовой механики парафермионов третьего порядка. Поскольку многие авторы пытались обнаружить противоречие между парастатистикой и принципом неразличимости тождественных частиц /перечень таких несостоятельных доказательств приведен в [5], а также в обзоре [7]/, в частности, на основе кластерных свойств парачастиц [8] в дополнении эти свойства детально разобраны на примере трех частиц /см.также [9–11]/. В конце разд.2 состояниям парафермионов сопоставляются состояния обычных фермионов, обладающих внутренними квантовыми числами типа изоспина и гиперзаряда. В заключении подведены итоги рассмотрения и произведено краткое сравнение с результатами других авторов [2,3].

1. КВАНТОВАННОЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ КВАТЕРНИОННОЕ ПОЛЕ

Нерелятивистское эрмитово /"майорановское"/ кватерполе /т.е. кватернионное поле/, имеющее лишь векторную часть, представляет собой комбинацию

$$\psi_M(\vec{x}) = \psi^i_M(\vec{x})\, e_i \quad \text{/сумма по } i = 1,2,3/, \qquad /2/$$

где e_i - три мнимые кватернионные единицы ($e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k$), а $\psi^i_M(\vec{x})$ - эрмитовы поля

$$\psi^{i+}_M(\vec{x}) = \psi^i_M(\vec{x}). \qquad /3/$$

Как и само поле /1/, эти компоненты также представляются в виде

$$\psi^i_M(\vec{x}) = \psi^i(\vec{x}) + \psi^{i+}(\vec{x}), \qquad /4/$$

а для операторов рождения и уничтожения имеют место фермионные коммутационные соотношения

$$\{\psi^{i+}(\vec{x}),\, \psi^j(\vec{x}')\} = \delta_{ij}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'), \qquad /5а/$$

$$\{\psi^i(\vec{x}),\, \psi^j(\vec{x}')\} = \{\psi^{i+}(\vec{x}),\, \psi^{j+}(\vec{x}')\} = 0, \qquad /5б/$$

где фигурные скобки, как обычно, обозначают антикоммутатор /квадратные скобки в дальнейшем будут означать коммутатор/.

Для операторов рождения и уничтожения самого кватерполя /1/ имеем /с точностью до знака правой части/ трилинейные /пара/ коммутационные соотношения Грина [4]

$$[[\psi(\vec{x}),\, \psi(\vec{x}')],\, \psi^+(\vec{x}'')] = $$
$$= 2\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'')\,\psi(\vec{x}') - 2\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x}'')\,\psi(\vec{x}), \qquad /6/$$

и т.д. Для других комбинаций кватерполей и им эрмитово-сопряженных слагаемые в правой части /6/, отвечающие одноименным полям, следует полагать равными нулю. Таким образом, кватерполя, являясь частным случаем гиперполей [12,13], основанных на алгебрах Клиффорда, оказываются пара-/ферми/-полями. По этой причине для построения фоковского представления можно воспользоваться общим построением для парaполей [6].

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА ДЛЯ КВАТЕРПОЛЯ

Определим вакуумное состояние условием

$$\psi(\vec{x})|0\rangle = 0 \text{ для всех } \vec{x}. \qquad /7/$$

Воспользовавшись /2/, /4/, /5/ и /7/, получим также

$$\psi(\vec{x})\,\psi^+(\vec{x}')\,|0\rangle = -3\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,|0\rangle. \qquad /8/$$

Условия /7/ и /8/ полностью определяют фоковское представление соотношений Грина /6/ для парафермионов третьего порядка *. Теперь уже нет надобности в той конкретной реализации для парaполя в виде кватерполя /2/. Базисные векторы фоковского представления получаются действием на вакуум всевозможными произведениями операторов рождения частиц

$$|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle = 3^{-n/2}\psi^+(\vec{x}_1)\dots\psi^+(\vec{x}_n)|0\rangle, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad /9/$$

и сопряженные им векторы имеют вид

$$\langle\vec{x}_n, \dots, \vec{x}_1| = 3^{-n/2}\langle 0|\psi(\vec{x}_n)\dots\psi(\vec{x}_1). \qquad /10/$$

Общий вектор имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \Psi^{(0)}(t)\,|0\rangle + \int dV_1 \Psi^{(1)}(\vec{x}_1,t)\,|\vec{x}_1\rangle +$$
$$+ (3\sqrt{2}/8)\int dV_1 \int dV_2\,[\Psi^{(2)}_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t) + 2\Psi^{(2)}_a(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t)]\,|\vec{x}_1,\vec{x}_2\rangle$$
$$+ (\sqrt{6}/4)\int dV_1 \int dV_2 \int dV_3 \{(1/2)\,\Psi^{(3)}_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t) +$$

---

* У соотношений Грина, на самом деле, имеется бесконечное множество фоковски-подобных неприводимых представлений [6,14]. Однако, если парaполе рассматривается как целое /без выделения его отдельных компонент/, то мы всегда оказываемся в рамках одного и того же неприводимого представления, например, фоковского.

$$(3/5)\,\Psi_s^{(3)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t)+(3\sqrt{2}/16)\,[\sqrt{3}\,\Psi_m^{(3)\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t)+ \qquad /11/$$
$$+\,\Psi_m^{(3)\prime\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t)]\}\,|\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3>+\ldots$$

Амплитуды этого вектора распределены по неприводимым представлениям группы перестановок своих аргументов: Ψ_s и Ψ_a - симметричные и антисимметричные волновые функции, $\Psi_m^{(3)\prime}$ и $\Psi_m^{(3)\prime\prime}$ - два вектора смешанного представления /см., например,/15//. Эти амплитуды получаются проектированием вектора /11/ на соответствующим образом симметризованные базисные векторы:

$$\begin{bmatrix} \Psi^{(0)}(t) \\ \Psi^{(1)}(\vec{x}_1,t) \\ \Psi_s^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t) \\ \Psi_a^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t) \\ \Psi_s^{(3)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t) \\ \Psi_a^{(3)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t) \\ \Psi_m^{(3)\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t) \\ \Psi_m^{(3)\prime\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,t) \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <0|\Psi> \\ <\vec{x}_1|\Psi> \\ <g_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|\Psi> \\ <g_a(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|\Psi> \\ <g_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)|\Psi> \\ <g_a(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)|\Psi> \\ <g_m'(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)|\Psi> \\ <g_m''(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)|\Psi> \\ \ldots \end{bmatrix}, \qquad /12/$$

где

$$|g_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2)> = (1/\sqrt{2})\sum_{\mathcal{P}\in S_2} |\vec{x}_{\mathcal{P}_1},\vec{x}_{\mathcal{P}_2}>,$$

$$|g_a(\vec{x}_1,\vec{x}_2)> = (1/\sqrt{2})\sum_{\mathcal{P}\in S_2} (-1)^{\eta(\mathcal{P})}|\vec{x}_{\mathcal{P}_1},\vec{x}_{\mathcal{P}_2}>,$$

$$|g_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)> = (1/\sqrt{6})\sum_{\mathcal{P}\in S_3} |\vec{x}_{\mathcal{P}_1},\vec{x}_{\mathcal{P}_2},\vec{x}_{\mathcal{P}_3}>, \qquad /13/$$

$$|g_a(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)> = (1/\sqrt{6})\sum_{\mathcal{P}\in S_3} (-1)^{\eta(\mathcal{P})}|\vec{x}_{\mathcal{P}_1},\vec{x}_{\mathcal{P}_2},\vec{x}_{\mathcal{P}_3}>,$$

$$|g_m'(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)> = (1/2)\,(|\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3>+|\vec{x}_2,\vec{x}_1,\vec{x}_3>-|\vec{x}_3,\vec{x}_2,\vec{x}_1>-|\vec{x}_3,\vec{x}_1,\vec{x}_2>);$$

$$|g_m''(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)> = (1/2\sqrt{3})\,(|\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3>+2\,|\vec{x}_1,\vec{x}_3,\vec{x}_2>-$$
$$-|\vec{x}_2,\vec{x}_1,\vec{x}_3>-2\,|\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_1>-|\vec{x}_3,\vec{x}_2,\vec{x}_1>+|\vec{x}_3,\vec{x}_1,\vec{x}_2>)$$

и т.д. Здесь $\mathcal{P}$ обозначает перестановки индексов частиц, а $\eta(\mathcal{P})$ - их четность.

На основе соотношений Грина /6/ для трех операторов рождения и "граничных условий" /7/ и /8/ можно показать, что четыре и более частиц не могут находиться в симметричном состоянии, что соответствует парaферми-статистике третьего порядка. Можно, однако, показать это и непосредственно в кватернионном представлении /2/ параполя. Заметим также, что из произвольной функции трех частиц можно было бы образовать два эквивалентных неприводимых представления смешанной симметрии. Однако из-за вышеуказанных соотношений Грина оба базисных вектора одного из этих представлений обращаются в нуль.

Вектор $|\Psi(t)>$ произвольного состояния описываемого кватерполем парафермионов третьего порядка характеризуется фоковским столбцом своих амплитуд /12/. Вероятность нахождения частиц в том или ином состоянии симметрии определяется, в общем случае, следом данного неприводимого представления группы перестановок: суммой квадратов модулей амплитуд, образующих базис этого представления. Как уже указывалось во введении, многие авторы пытались обнаружить противоречие парастатистики принципу неразличимости тождественных частиц, в частности, кластерному закону /при удалении из системы тождественных частиц одной из них оставшаяся подсистема должна описываться волновыми функциями, допустимыми данной статистикой, т.е. такими, для которых перестановки аргументов оставшихся частиц не должны приводить к наблюдаемым эффектам/. Как мы видели, парастатистика совершенно естественно возникла из кватерполя. По этой причине, хотя существуют строгие доказательства непротиворечивости парастатистик основным постулатам квантовой теории /9-11/, в дополнении детально на примере трех парачастиц рассмотрены их кластерные свойства.

Кватернионы входят лишь в само кватерполе /2/ и базисные векторы /9/ и /10/. В амплитудах /12/ их уже нет. Мы окончательно избавимся от их присутствия, если определим представление операторов рождения и уничтожения на фоковском столбце /12/. Для этого подействуем ими на вектор /11/ и определим симметризованные амплитуды полученных векторов. Мы имеем /общий аргумент t всюду опущен/

$$
\begin{cases}
(\psi(\vec{x})\Psi)^{(0)} = -\sqrt{3}\ \Psi^{(1)}(\vec{x}), \\
(\psi(\vec{x})\Psi)^{(1)}(x_1) = -[\sqrt{3/2}\,(\Psi_s^{(2)} + \Psi_a^{(2)})(\vec{x},\vec{x}_1), \\
(\psi(\vec{x})\Psi)_s^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = -(\Psi_s^{(3)} + \sqrt{6}/4\,\Psi_m^{(3)\prime} + 3\sqrt{2}/4\,\Psi_m^{(3)\prime\prime})(\vec{x},\vec{x}_1,\vec{x}_2), \\
(\psi(\vec{x})\Psi)_a^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = -(\Psi_a^{(3)} + \sqrt{6}/4\,\Psi_m^{(3)\prime} - \sqrt{2}/4\,\Psi_m^{(3)\prime\prime})(\vec{x},\vec{x}_1,\vec{x}_2), \\
\ldots
\end{cases}
\qquad /14/
$$

и

$$
\begin{cases}
(\psi^+(\vec{x})\Psi)^{(0)} = 0, \\
(\psi^+(\vec{x})\Psi)^{(1)}(\vec{x}_1) = \sqrt{3}\,\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x})\,\Psi^{(0)}, \\
(\psi^+(\vec{x})\Psi)_s^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (2\sqrt{6}/3)\sum_{\mathcal{P}\in S_2}\delta^{(3)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_1}-\vec{x})\,\Psi^{(1)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_2}), \\
(\psi^+(\vec{x})\Psi)_a^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\sqrt{6}/3)\sum_{\mathcal{P}\in S_2}(-1)^{\eta(\mathcal{P})}\delta^{(3)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_1}-\vec{x})\,\Psi^{(1)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_2}), \\
(\psi^+(\vec{x})\Psi)_s^{(3)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = \sum_{\mathcal{P}\in S_3}\delta^{(3)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_1}-\vec{x})\,\Psi_s^{(2)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_2},\vec{x}_{\mathcal{P}_3}), \\
(\psi^+(\vec{x})\Psi)_a^{(3)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (5/3)\sum_{\mathcal{P}\in S_3}(-1)^{\eta(\mathcal{P})}\delta^{(3)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_1}-\vec{x})\,\Psi_a^{(2)}(\vec{x}_{\mathcal{P}_2},\vec{x}_{\mathcal{P}_3}), \\
(\psi^+(\vec{x})\Psi)_m^{(3)\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (\sqrt{6}/3)[\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x})\,\Psi_s^{(2)}(\vec{x}_2,\vec{x}_3) + \\
+\delta^{(3)}(\vec{x}_2-\vec{x})\,\Psi_s^{(2)}(\vec{x}_3,\vec{x}_1) - 2\delta^{(3)}(\vec{x}_3-\vec{x})\,\Psi_s^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)] + \\
+(2\sqrt{6}/3)[\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x})\,\Psi_a^{(2)}(\vec{x}_2,\vec{x}_3) - \delta^{(3)}(\vec{x}_2-\vec{x})\,\Psi^{(2)}(\vec{x}_3,\vec{x}_1)], \qquad /15/ \\
(\psi^+(\vec{x})\Psi)_m^{(3)\prime\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = \sqrt{2}[\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x})\,\Psi_s^{(2)}(\vec{x}_2,\vec{x}_3) - \\
-\delta^{(3)}(\vec{x}_2-\vec{x})\,\Psi_s^{(2)}(\vec{x}_3,\vec{x}_1)] - (2\sqrt{2}/3)[\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x})\,\Psi_a^{(2)}(\vec{x}_2,\vec{x}_3) + \\
+\delta^{(3)}(\vec{x}_2-\vec{x})\,\Psi_a^{(2)}(\vec{x}_3,\vec{x}_1) - 2\delta^{(3)}(\vec{x}_3-\vec{x})\,\Psi_a^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)], \\
\ldots
\end{cases}
$$

Уравнение Шредингера

$$i\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \qquad /16/$$

представляет собой теперь уравнение для фоковского столбца /12/,

С другой стороны, как было показано в [6], такая теория эквивалентна теории трех обычных фермионов, которые мы обозначим λ, p, n и которым следует приписать два квантовых числа: "изоспин" I_3 и "гиперзаряд" Y, принимающие значения, указанные в таблице

	I_3	Y
p	$1/2$	0
n	$-1/2$	0
λ	0	1 .

Теперь симметризованным состояниям парачастиц, принадлежащим фоковскому представлению /12/, можно сопоставить антисимметричные по всем переменным состояния этих фермионов, имеющие полный изоспин, равный нулю. Такое сопоставление представлено в нижеследующей таблице. Внутренние состояния фермионов относятся к неприводимым представлениям $SU(3)$ -симметрии, указанным в фигурных скобках. Они определяются схемами Юнга, дополнительными для антисимметризации полной волновой функции к схемам Юнга, характеризующим пространственную симметрию волновых функций парачастиц *.

Состояния парачастиц	Состояния фермионов
$\Psi^{(0)}$	$\Psi^{(0)}$, {1}
$\Psi^{(1)}(\vec{x}_1)$	$\Psi_\lambda(\vec{x}_1)$, {3}
$\Psi_s^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$	$\Psi_{pn}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$, {3}
$\Psi_a^{(2)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$	$\Psi_{\lambda\lambda}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$, {6}
$\Psi_s^{(3)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$	$\Psi_{pn\lambda}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$, {1}
$\Psi_a^{(3)}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$	$\Psi_{\lambda\lambda\lambda}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$, {10}
$\Psi_m^{(3)\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$, $\Psi_m^{(3)\prime\prime}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$	$\Psi_{pn\lambda}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$, {8}

* Другие состояния фермионов, отвечающие полному изоспину, не равному нулю, сопоставляются состояниям парачастиц, принадлежащим к другим, фоковски-подобным неприводимым представлениям соотношений Грина [6].

Отметим, что SU(3) -синглетами из перечисленных состояний являются лишь вакуумное состояние и симметричное состояние трех парачастиц.

Здесь следует подчеркнуть, что фермионы λ , p , n не совпадают с фермионами $i = 1,2,3$, входящими в определение кватерполя /2/. Более того, калибровочные преобразования автоморфизмов последнего составляют SO(3) - калибровочные преобразования, тогда как классификация состояний парачастиц и соответствующих им фермионов λ , p , n в фоковском /гильбертовом/ пространстве состояний связана с отдельными состояниями /$I_3 = 0$, $I = 0$/ из неприводимых представлений SU(3) -симметрии. В этом смысле необходимо различать калибровочную SO(3) -симметрию самого кватерполя и глобальную SU(3)-симметрию его представлений. Лишь синглетные состояния как той, так и другой симметрий совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построив представление Фока для векторного кватернионного поля, мы увидели, что оно совпадает с аналогичным представлением для парафермионов третьего порядка. При этом физический смысл имеют волновые функции, симметризованные по неприводимым представлениям группы перестановок аргументов тождественных частиц. В свою очередь, им сопоставляются состояния фермионов трех сортов, имеющих внутренние квантовые числа типа изоспина и гиперзаряда. Состояниям фоковского представления отвечают состояния с полным изоспином, равным нулю. Никаких ограничений на состояния парачастиц исходная кватернионная формулировка квантованного поля не налагает и потому нет оснований для выделения синглетных состояний в качестве единственно допустимых, как это было предложено в рамках кватернионной квантовой механики[2]. Более того, в нашей полевой формулировке другие состояния необходимы для построения представления операторов рождения и уничтожения частиц, действующих на весь фоковский столбец симметризованных амплитуд.

Следует различать SO(3) - калибровочную симметрию автоморфизмов самого кватернионного поля и глобальную SU(3) -симметрию его состояний в фоковском пространстве. Первая оказывается "спрятанной" в парастатистике тождественных парафермионов и не может быть нарушена, тогда как вторая, в принципе, может быть нарушена посредством взаимодействий, сформулированных в рамках самого параполя[6].

ДОПОЛНЕНИЕ

Приготовление состояний и кластерные свойства парачастиц

Вопрос о приготовлении состояния парачастиц с определенной симметрией возникает из-за наличия для них многомерных представлений группы перестановок аргументов частиц. В отличие от частиц, подчиняющихся обычным ферми- или бозе-статистикам, для n парачастиц одному определенному состоянию может соответствовать не одна, а множество волновых функций, образующих базис данного неприводимого представления S_n. Среднее от какой-либо наблюдаемой определяется в виде следа по данному представлению*. Очевидно, при этом перестановки аргументов тождественных частиц не приводят к наблюдаемым эффектам. Однако характеры, представляющие собою определенные линейные комбинации операторов перестановок, являются наблюдаемыми, и неприводимые представления S_n классифицируются по их собственным значениям[7].

Рассмотрим для примера случай трех парафермионов третьего порядка, состояние которых задается, согласно /12/ и /13/, набором двух волновых функций, являющихся базисными векторами смешанного неприводимого представления

$$\Psi'_m(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (1/2)[\Psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) + \Psi(\vec{x}_2,\vec{x}_1,\vec{x}_3) - \Psi(\vec{x}_3,\vec{x}_2,\vec{x}_1) - \Psi(\vec{x}_3,\vec{x}_1,\vec{x}_2)], \qquad /Д.1/$$

$$\Psi''_m(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (1/2\sqrt{3})[\Psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) + 2\Psi(\vec{x}_1,\vec{x}_3,\vec{x}_2) - \Psi(\vec{x}_2,\vec{x}_1,\vec{x}_3) - 2\Psi(\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_1) - \Psi(\vec{x}_3,\vec{x}_2,\vec{x}_1) + \Psi(\vec{x}_3,\vec{x}_1,\vec{x}_2)]. \qquad /Д.2/$$

Относительно перестановок аргументов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ первая функция симметрична, а вторая антисимметрична. Казалось бы, из-за такого различия эти функции можно различить, если удалить третью частицу на достаточно большое расстояние и установить симметрию двух оставшихся частиц /измерив, например, орбитальный момент их относительного движения/. Но тогда мы приходим к противоречию с исходным предположением, согласно которому не существует

---

* Это правило часто нарушается в "доказательствах" невозможности существования парастатистик /см.[7]/.

дополнительных квантовых чисел, которые могли бы различать векторы /Д.1/ и /Д.2/. На основе таких рассуждений в[8] было сформулировано утверждение о противоречии парастатистики кластерному закону и на этой основе невозможность их существования.

Ошибка этих рассуждений, как было показано в[10], заключалась в подмене физического удаления одной из тождественных частиц математическим удалением занумерованной /например, третьей/ частицы, которое не имеет физического смысла. Действительно, предположим, что волновую функцию трех частиц можно представить в виде произведения

$$\Psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = f(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\,\psi(\vec{x}_3), \qquad /Д.3/$$

причем области существования функций f и ψ не перекрываются. В этом случае для вероятности того, что одна из тождественных частиц находится в точке $\vec{x}_1$, другая - в точке $\vec{x}_2$ и еще одна - в точке $\vec{x}_3$ будем иметь

$$W(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (1/2)\left[\,|\Psi'_m(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)|^2 + |\Psi''_m(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)|^2\right] =$$

$$=(1/4)\{[\,|f_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2 + (1/3)\,|f_a(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2]\,|\psi(\vec{x}_3)|^2 + \qquad /Д.4/$$

+ два аналогичных слагаемых, получаемых циклической перестановкой индексов /1,2,3/ , где

$$f_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (1/\sqrt{2})\,[\,f(\vec{x}_1,\vec{x}_2) + f(\vec{x}_2,\vec{x}_1)\,], \qquad /Д.5/$$

$$f_a(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (1/\sqrt{2})\,[\,f(\vec{x}_1,\vec{x}_2) - f(\vec{x}_2,\vec{x}_1)\,], \qquad /Д.6/$$

и т.д. Как мы видим из /Д.4/, две близкие тождественные частицы могут находиться как в симметричном, так и антисимметричном состоянии.

Приготовим теперь заранее определенное состояние двух близких тождественных частиц, например, симметричное, так что

$$f(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2,\vec{x}_1) \quad \text{и т.д.} \qquad /Д.7/$$

Затем включим в рассмотрение третью достаточно удаленную частицу. Как легко видеть из /Д.1/, /Д.2/, Д.3/ и /Д.7/, ни один из векторов /Д.1/ и /Д.2/ не обращается в нуль:

$$\Psi'_m(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (1/\sqrt{6})[2f_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\,\psi(\vec{x}_3) - f_s(\vec{x}_3,\vec{x}_2)\,\psi(\vec{x}_1) -$$

$$- f_s(\vec{x}_3,\vec{x}_1)\,\psi(\vec{x}_2)],$$

$$\Psi''_m(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (1/\sqrt{2})\,[\,f_s(\vec{x}_1,\vec{x}_3)\,\psi(\vec{x}_2) - \qquad /Д.8/$$

$$- f_s(\vec{x}_2,\vec{x}_3)\,\psi(\vec{x}_1)\,].$$

Таким образом, измерение симметрии состояния двух близких тождественных частиц не может привести к различию этих двух векторов одного и того же неприводимого смешанного представления S_3. Вероятность обнаружения частиц в точках $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, согласно /Д.4/ и /Д.8/, будет

$$W(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (1/3)[\,|f_s(\vec{x}_1,\vec{x}_2)|^2|\psi(\vec{x}_3)|^2 + \qquad /Д.9/$$

$$+ |f_s(\vec{x}_2,\vec{x}_3)|^2|\psi(\vec{x}_1)|^2 + |f_s(\vec{x}_3,\vec{x}_1)|^2|\psi(\vec{x}_2)|^2].$$

Эта вероятность совпадает с вероятностью найти частицы в точках $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ для полностью симметричного состояния трех частиц. Следовательно, при достаточном удалении одной из тождественных частиц от двух других, находящихся в симметричном состоянии, несущественно, будем ли мы описывать всю систему из трех частиц симметричной волновой функцией или же совокупностью двух функций, образующих собою смешанное представление.

Аналогичные рассуждения можно произвести для подсистемы из двух тождественных частиц, находящихся в антисимметричном состоянии. В этом случае при присоединении к этой подсистеме еще одной тождественной с ними частицы, находящейся от них на достаточно большом расстоянии, нет разницы в описании таких трех частиц с помощью полностью антисимметричной функции или же с помощью двух функций, образующих смешанное представление.

Таким образом, разобранный нами пример показывает, что кластерный закон не только не противоречит парастатистике, но и позволяет характеризовать каждое состояние n тождественных частиц с помощью их собственной симметрии, а также симметрии соответствующих подсистем из $n-1$, $n-2$,...2 тождественных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finkelstein D. et al. J.Math.Phys., 1962, 3, p.207; 1963, 4, p.788.
2. Rembielinski J. J.Phys.A:Math.Gen., 1980, 13, p.15,23; 1981, 14, p.2609.
3. Horwitz L.P., Biedenharn L.C. Ann.Phys., 1984, 157, p.432.
4. Green H.S. Phys.Rev., 1953, 90, p.270.
5. Greenberg O.W., Messiah A.M.L. Phys.Rev., 1965, 138B, p.1155.

6. Govorkov A.B. Int.J.Theor.Phys., 1973, 7, p.49.
7. Говорков А.Б. ЭЧАЯ, 1983, 14, с.1229.
8. Steinmann O. Nuovo Clm., 1966, 44A, p.755.
9. Dresden M. Brandeis Summer Inst.Theor.Phys. Brandeis University, 1963, vol.2, p.377.
10. Hartle J.B., Taylor J.R. Phys.Rev., 1969, 178, p.2043.
11. Doplicher S., Haag R., Roberts J.E. Comm.Math.Phys., 1971, 23, p.199; 1974, 35, p.49.
12. Говорков А.Б. ТМФ, 1983, 55, с.3.
13. Greenberg O.W., Macrae K.I. Nucl.Phys., 1983, B219, p.358.
14. Bracken A.J., Green H.S. J.Math.Phys., 1973, 14, p.1784.
15. Хамермеш М. Теория групп. "Мир", М., 1966, с.267.
16. Govorkov A.B. J.Phys.A:Math.Gen., 1980, 13, p.1673.
17. Дирак П. Принципы квантовой механики. "Наука", М., 1979, с.280.
18. Говорков А.Б. ОИЯИ, Р2-85-419, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1985 года.

Говорков А.Б.
Р2-85-420

Представление Фока для кватернионных полей

Определено представление Фока для нерелятивистского самосопряженного /"майорановского"/ поля, основанного на кватернионах, и сформулирована квантовая механика соответствующих ему парафермионов третьего порядка. Подчеркивается различие между калибровочной "псевдоцветовой" SO(3)-симметрией автоморфизмов такого поля и глобальной SU(3)-симметрией состояний соответствующих ему частиц в фоковском пространстве.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Govorkov A.B.
P2-85-420

The Fock Representation for Quaternion Fields

The Fock representation for a nonrelativistic hermitian ("Majorana") quaternion field is established, and the corresponding quantum mechanics of parafermions of third order is formulated. The difference between gauge pseudocolour SO(3)-symmetry, the automorphism group of quaternions, and the global SU(3)-symmetry of parafermion states in the Fock-space is emphasized.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985