объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-419

А.Б.Говорков

КВАТЕРНИОННЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ. ПСЕВДОЦВЕТ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика".

1985

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время есть все основания считать цветовую симметрию кварков $SU(3)_c$ особой среди других внутренних симметрий элементарных частиц. Ее совершенство возводит ее в ранг таких же совершенных симметрий, как неразличимость тождественных частиц и $U(1)$ -симметрия электромагнитных взаимодействий.

В связи с этим Гюрсей и Гюнайдин /1/ предприняли попытку связать эту симметрию с алгебраической структурой полей, построенных на октонионах, и интерпретировать $SU(3)_c$ как подгруппу группы G_2 автоморфизмов октонионов. При этом "октонионное поле" рассматривается не как набор "цветных компонент", образующих трехмерное представление группы $SU(3)_c$, а, скорее, как единая величина-модуль, над которой производятся операции умножения на октонионы с обеих сторон. На таком пути описания цветовой симметрии кварков возникают две задачи: 1/ формулировка калибровочного принципа непосредственно в терминах октонионов, 2/ непротиворечивое построение соответствующего гильбертова пространства векторов состояний, в котором октонионное поле действует как линейный оператор. Неассоциативность октонионов является основной причиной, по которой, несмотря на определенные успехи /2/, обе эти задачи пока что не получили окончательного решения.

Мы можем, однако, временно отступить на шаг назад и обратиться к более простой задаче: рассмотрению теории полей, построенных на кватернионах. Помимо того, что такое рассмотрение представляет самостоятельный интерес, его можно считать также предварительным этапом перед переходом к исследованию калибровочных октонионных полей. Действительно, у этих двух проблем много общих характерных черт. Кватернионное поле, которое мы ниже для краткости будем называть "кватерполем", также является модулем, и формулировка калибровочного принципа непосредственно в терминах кватернионных преобразований имеет много общего с формулировкой этого принципа в терминах октонионных преобразований. Аналогично построение гильбертова пространства векторов состояний, в котором кватернионное поле действует как линейный оператор, также имеет ряд особенностей, связанных с некоммутативностью кватернионов, хотя это свойство выглядит менее необычным, чем неассоциативность октонионов. Данная работа посвящена рассмотрению первой из этих двух задач.

Что касается физических приложений теории кватерполей, то она также может послужить упрощенным вариантом объединения лептонов и цветных кварков в одно кватерполе, когда лептону сопоставляется его скалярная, а цветному кварку - векторная часть *. Однако, как известно, группой автоморфизмов кватернионов является SO(3) и по этой причине соответствующая ей калибровочная теория будет отличаться от физической квантовой хромодинамики /КХД/. В связи с этим мы предпочитаем в случае теории кватерполей говорить о "псевдоцвете" и "псевдо-КХД".

Материал расположен следующим образом. В разд.1 излагается теория майорановского кватерполя и возможность описания с его помощью лептонов и "псевдоцветных" кварков. В разделе 2 в терминах кватернионных преобразований этого поля формулируется калибровочный принцип и вводятся соответствующие векторные калибровочные кватерполя /"псевдолептокварки" и "псевдоглюоны"/. Там же подчеркивается глубокое различие между SO(4) - группой инвариантности соответствующего лагранжиана и ее подгруппой SO(3) автоморфизмов кватернионов. В разд.3 на основе введения скалярного кватерполя производится спонтанное нарушение SO(4) -симметрии до SO(3) и псевдолептокварковым полям придается масса, тогда как псевдоглюоны остаются безмассовыми. В заключении подводятся итоги рассмотрения. В дополнении кратко изложены основные факты, относящиеся к алгебре кватернионов.

1. МАЙОРАНОВСКОЕ КВАТЕРПОЛЕ

Майорановское кватерполе определим как **

$$\psi(x) = \psi_\iota(x)\, e_\iota \qquad /\text{сумма по } \iota = 0,1,2,3/, \qquad /1/$$

где $\psi_\iota(x)$ - майорановские эрмитовы поля, совпадающие со своими зарядово-сопряженными полями:

$$\psi_\iota^+(x) = \psi_\iota(x) = \psi_\iota^c(x) \qquad /2/$$

/спинорный индекс мы включаем в аргумент x /. Для того чтобы не возникала потребность в умножении кватернионов на комплексные

---

* В [3] был сформулирован калибровочный принцип для кватернионной квантовой механики и на его основе была предпринята одна из первых попыток объединения электромагнитного и слабого взаимодействий. См. также [4] .

** Здесь мы употребляем греческие индексы ι , κ и т.д., принимающие значения 0,1,2,3 для обозначения отдельных компонент кватерполя. В дальнейшем греческие индексы будут играть роль лоренц-индексов. Однако путаницы не возникнет, поскольку далее кватерполя будут выступать как целое, и мы не будем рассматривать их отдельные компоненты.

числа, мы всюду в дальнейшем будем использовать майорановское представление, в котором все матрицы α^k / k = 1,2,3/ и $i\beta$, входящие в уравнение Дирака, вещественны. Коммутационные соотношения для майорановских полей имеют вид антикоммутатора:

$$\{\psi_\iota(x),\ \psi_\kappa(y)\} = -i\delta_{\iota\kappa} S(x-y)\,\beta \qquad \text{при } x \sim y. \qquad /3/$$

Здесь и ниже $x \sim y$ означает пространственно-подобное разделение точек x и y .

Иногда удобно представлять скалярную и векторную части кватерполя /1/ в виде столбца

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \vec{\psi}(x) \end{bmatrix}, \qquad /4/$$

причем скалярную часть мы будем называть "лептонной", а векторную часть - "кварковой". Правило умножения кватерполей, согласно правилу умножения кватернионов /см. дополнение/, принимает вид

$$\psi(x)\,\psi(y) = \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ \vec{\psi}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0(y) \\ \vec{\psi}(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0(x)\psi_0(y) - \vec{\psi}(x)\cdot\vec{\psi}(y) \\ \psi_0(x)\vec{\psi}(y) + \vec{\psi}(x)\psi_0(y) + \vec{\psi}(x)\cdot\vec{\psi}(y) \end{bmatrix}. \qquad /5/$$

Заметим, что из-за перестановочных свойств /3/ скалярное произведение векторных частей кватерполей антисимметрично /с точностью до c-числовых функций/, тогда как векторное произведение симметрично.

Сопряженное кватерполе

$$\psi^Q(x) = \begin{bmatrix} \psi_0(x) \\ -\vec{\psi}(x) \end{bmatrix}. \qquad /6/$$

Из-за перестановочных свойств /3/ операция сопряжения /6/ для произведения кватерполей /5/ сопровождается изменением знака:

$$(\psi(x)\,\psi(y))^Q = -\psi^Q(y)\,\psi^Q(x). \qquad /7/$$

Составив сумму и разность полей /4/ и /6/, мы выделим скалярную часть - "лептонное" и векторную часть - "кварковое" поле:

$$\psi_\ell(x) = (\psi(x) + \psi^Q(x))/2, \quad \psi_q(x) = (\psi(x) - \psi^Q(x))/2. \qquad /8/$$

Лептонное поле подчиняется обычным соотношениям

$$\{\psi_\ell(x),\ \psi_\ell(y)\} = -iS(x-y)\,\beta, \qquad x \sim y, \qquad /9/$$

тогда как кварковое поле подчиняется трилинейным, так называемым "паракоммутационным", соотношениям Грина [5]*

$$[[\psi_q(x),\psi_q(y)],\psi_q(z)] = = -2i[S(x-z)\beta]\psi_q(y) + 2i[S(y-z)\beta]\psi_q(x) \qquad /10/$$

при $x \sim y \sim z$. Квадратные скобки означают коммутатор. Между собой лептонное и кварковое поля антикоммутируют:

$$\{\psi_\ell(x),\psi_q(y)\} = 0. \qquad /11/$$

Скалярное произведение двух кватерполей определим в виде

$$(\psi(x),\psi(y)) \equiv (\psi(x)\psi^Q(y) - \psi(y)\psi^Q(x))/2 = \\ = [\psi_\ell(x),\psi_\ell(y)]/2 - [\psi_q(x),\psi_q(y)]/2 = \\ = [\psi_0(x),\psi_0(y)]/2 + [\vec{\psi}(x)\cdot\vec{\psi}(y) - \vec{\psi}(y)\cdot\vec{\psi}(x)]/2. \qquad /12/$$

Соотношения /9/ и /10/ подразумевают общие соотношения

$$[(\psi(x),\psi(y)),\psi(z)] = i[S(x-z)\beta]\psi(y) - i[S(y-z)\beta]\psi(x). \qquad /13/$$

Плотность гамильтониана майорановского кватерполя записывается в виде

$$\mathcal{H}(x) \equiv (\psi(x), H_{\mathfrak{D}}\psi(x))/2, \qquad /14/$$

где $H_{\mathfrak{D}}$ - оператор Дирака

$$H_{\mathfrak{D}} \equiv -i(\sum_{k=1}^{3}\alpha^k\partial_k + i\beta m). \qquad /15/$$

В нем поставлен формальный множитель $i \equiv \sqrt{-1}$, не принимающий участия ни в каких кватернионных операциях. Он введен лишь для того, чтобы после раскрытия выражения /14/ через компоненты кватерполя оно оказалось эрмитовым в обычном смысле. Кроме того, как /14/, так и все нижеследующие аналогичные выражения определяются в нормальном смысле, т.е. с вычитанием их /расходящихся/ средних по вакууму.

---

* Знак правой части /10/ противоположен знаку в соответствующих соотношениях Грина, поскольку при произведении кватерполей лишний "минус" возникает из-за мнимости кватернионных единиц.

Гамильтониан

$$H = \int dV\, \mathcal{H}(x), \qquad /16/$$

согласно /13/ и /14/, имеет смысл генератора временного сдвига

$$-i\partial_t\psi(x) = [H,\psi(x)], \qquad /17/$$

что гарантирует каноническую согласованность теории кватерполя, рассматриваемого как единое поле /без разложения его на компоненты/ и удовлетворяющего уравнению Дирака *

$$i\partial_t\psi(x) = H_{\mathfrak{D}}\psi(x). \qquad /18/$$

Лагранжиан для свободного майорановского кватерполя записывается в виде

$$\mathfrak{L}^{(0)}(\psi) = (\psi(x), L^{(0)}_{\mathfrak{D}}\psi(x)) = \\ = [\psi_\ell(x), L^{(0)}_{\mathfrak{D}}\psi_\ell(x)]/2 - [\psi_q(x), L^{(0)}_{\mathfrak{D}}\psi_q(x)]/2, \qquad /19/$$

где введено краткое обозначение

$$L^{(0)}_{\mathfrak{D}} \equiv i(\partial_t + \sum_{k=1}^{3}\alpha^k\partial_k + i\beta m) \qquad /20/$$

/матрицы α^k - симметричны, β - антисимметрична/. При формальном варьировании лагранжиана /19/ по ψ и ψ^Q /или по ψ_ℓ и ψ_q/ получается уравнение Дирака /18/.

2. КАЛИБРОВОЧНЫЙ ПРИНЦИП

Скалярное произведение /12/ /а следовательно, гамильтониан /14/ и лагранжиан /19// инвариантно относительно преобразования

$$\psi'(x) = a\psi(x)b, \quad \psi^{Q\prime}(x) = b^Q\psi^Q(x)a^Q, \qquad /21/$$

где a и b - произвольные кватернионы, удовлетворяющие соотношениям

---

* Из уравнений /17/ и /18/ видно, что общий множитель i входит как в левую, так и в правую части /см. /15// и может быть вообще удален. Он оставляется лишь для того, чтобы входящие в уравнение Дирака операторы были эрмитовы в обычном смысле.

$$aa^Q = bb^Q = 1. \qquad /22/$$

В дополнении показано, что преобразование /21/ действительно представляет собой $SO(4)$ - преобразование в четырехмерном пространстве компонент кватерниона. Здесь же мы будем рассматривать это преобразование над кватерполем в целом.

Преобразование /21/ содержит подгруппу преобразований, для которых $b = a^Q$ и

$$\psi'(x) = a\psi(x)a^Q, \quad \psi^{Q\prime}(x) = a\psi^Q(x)a^Q. \qquad /23/$$

Такие преобразования затрагивают лишь векторную часть кватерполя и образуют $SO(3)$ - подгруппу группы $SO(4)$. Здесь следует подчеркнуть принципиальное различие между преобразованиями /21/ инвариантности лагранжиана и преобразованиями /23/, образующими автоморфизмы кватернионов. Поскольку последние сохраняют правило умножения кватернионов /и кватерполей/, то теория всегда оказывается инвариантной относительно таких преобразований. В то же время относительно произвольных преобразований /21/ она с самого начала не полностью инвариантна, поскольку лептонная и кварковая части кватерполя квантуются согласно различным правилам /9/ и /10/* . Тем не менее мы можем развить на основе калибровочных преобразований /21/ калибровочную теорию кватерполя, которую, однако, затем спонтанно нарушим до остающейся ненарушенной калибровочной группы автоморфизмов /23/.

Итак, предположим, что кватернионы a и b сами являются функциями координат и времени x, от которых зависят преобразуемые кватерполя /21/. Тогда производные от последних приобретают аддитивные добавки

$$\partial_\mu\psi(x) = a(x)[\partial_\mu\psi(x) + a^Q(x)\partial_\mu a(x)\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu b(x)b^Q(x)]b(x) \qquad /24/$$

/здесь μ - лоренцев индекс/. Для компенсации этих добавок вводятся два лоренц-векторных вещественных кватерполя $V_\mu(x)$ и $W_\mu(x)$, и ковариантная производная определяется в виде

$$D_\mu(x) = \partial_\mu\psi(x) - g[V_\mu(x)\psi(x) + \psi(x)W_\mu(x)], \qquad /25/$$

где g - константа связи векторных и майорановского полей. Для того чтобы ковариантная производная преобразовалась по закону /21/, нужно, чтобы векторные поля имели законы преобразования

$$V'_\mu(x) = a(x)V_\mu(x)a^Q(x) + (1/g)\,\partial_\mu a(x)a^Q(x), \qquad /26а/$$

$$W'_\mu(x) = b^Q(x)W_\mu(x)b(x) + (1/g)\,b^Q(x)\partial_\mu b(x). \qquad /26б/$$

Из этих законов видно, что каждое из лоренц-векторных полей V_μ и W_μ в действительности является калибровочным полем относительно двух независимых преобразований /23/, т.е. $SO(3)$ - преобразований только векторных компонент этих полей*. Эти поля соответствуют разложению

$$SO(4) = SO(3)\times SO(3). \qquad /27/$$

По этой причине скалярные компоненты полей V_μ и W_μ можно считать равными нулю, т.е. считать эти поля чисто векторными кватерполями. При квантовании такие поля также подчиняются трилинейным соотношениям Грина /с точностью до знака правой части, см. замечание к формуле /10//:

$$[\{V_\mu(x), V_\nu(y)\}, V_\lambda(z)] = -2ig_{\mu\lambda}D(z-x)V_\nu(y) - 2ig_{\nu\lambda}D(z-y)V_\mu(x) \qquad /28/$$

при $x \sim y \sim z$.

Точно такие же соотношения имеют место при замене в /28/ всех или нескольких полей V на W. При этом D - функции в правой части /28/, соответствующие разным полям, исчезают. Аналогично записываются и взаимные соотношения, включающие лоренц-векторные и спинорные поля. Лептонная /скалярная/ часть $\psi(x)$ коммутирует с векторными полями, а кварковая /векторная/ часть подчиняется трилинейным взаимным соотношениям, например,

$$[\{V_\mu(x), \psi_q(y)\}, V_\lambda(z)] = -2ig_{\lambda\mu}D(z-x)\psi_q(y),$$

$$[[\psi_q(x), \psi_q(y)], V_\mu(z)] = 0 \text{ и т.д.} \qquad /29/$$

Теперь соотношения /9/-/11/, /28/, /29/ и им подобные полностью определяют квантовую теорию кватерполей без привлечения отдельных компонент этих полей за исключением выделения лептонной компоненты спинорного майорановского поля $\psi(x)$.

---

* Ситуация здесь напоминает суперсимметричное объединение фермионных и бозонных полей в одно суперполе, хотя они квантуются по разным правилам.

* Из условий /22/ следует, что скалярная часть аддитивных добавок в /27/ обращается в нуль: $\partial_\mu a a^Q + (\partial_\mu a a^Q)^Q = 0$. Поскольку, кроме того, скалярные части V_μ и W_μ коммутируют с a, то они вообще не преобразуются.

Для определения кинетического лагранжиана калибровочных кватерполей составим коммутатор ковариантных производных /25/

$$-(1/g)[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - g[V_\mu, V_\nu])\psi(x) -$$

$$-\psi(x)(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g[W_\mu, W_\nu]) = \qquad /30/$$

$$= V_{\mu\nu}\psi(x) + \psi(x) W_{\mu\nu}.$$

Отсюда для тензоров калибровочных полей получаем

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - g[V_\mu, V_\nu], \qquad /31a/$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g[W_\mu, W_\nu]. \qquad /31б/$$

Как и выражение /26/, эти выражения соответствуют разложению /27/.

Подгруппа автоморфизмов SO(3) является диагональной подгруппой разложения /27/. Для ее выделения составим сумму и разность полей

$$v_\mu = V_\mu + W_\mu, \qquad /32a/$$

$$w_\mu = -V_\mu - W_\mu. \qquad /32б/$$

В терминах новых полей ковариантная производная /25/ принимает вид

$$D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) - g[\psi(x), w_\mu(x)]/2 - g\{\psi(x), v_\mu(x)\}/2. \qquad /33/$$

Отсюда видно, что кватерполе $w_\mu(x)$ действительно является калибровочным полем автоморфизмов кватернионов* /см., например, [3,6] /. Особенно ясно видна роль полей w_μ и v_μ при записи с помощью правила /5/ ковариантной производной /33/ в компонентной форме

$$D_\mu \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \vec{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_\mu\psi_0 + (g/2)\vec{\psi}\cdot\vec{v}_\mu \\ \partial_\mu\vec{\psi} - (g/2)(\psi_0\vec{v}_\mu - \vec{w}_\mu\times\vec{\psi}) \end{bmatrix}. \qquad /34/$$

Поле $\vec{w}_\mu$ является "цветным" полем /трех/ "псевдоглюонов", тогда как поле $\vec{v}_\mu$ определяет переходы между скалярной и векторной /т.е. лептонной и кварковой/ частями кватерполя ψ и может быть быть названо "лептокварковым" векторным полем.

---

* В случае, когда калибровочные преобразования ограничиваются автоморфизмами /23/, поле W_μ следует положить равным $-V_\mu$.

Аналогично для тензоров имеем

$$v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu + (g/2)([w_\mu, v_\nu] - [w_\nu, v_\mu]), \qquad /35a/$$

$$w_{\mu\nu} = \partial_\mu w_\nu - \partial_\nu w_\mu + (g/2)([v_\mu, v_\nu] + [w_\mu, w_\nu]). \qquad /35б/$$

Теперь полный лагранжиан для исходного спинорного майорановского кватерполя и калибровочных кватерполей записывается в виде

$$\mathfrak{L}(\psi, v, w) = -(1/4)(v^{\mu\nu}v^Q_{\mu\nu} + w^{\mu\nu}w^Q_{\mu\nu}) + (\psi(x), L_{\mathfrak{T}}\psi(x)), \qquad /36/$$

где оператор Дирака /20/ заменен на оператор с ковариантными производными

$$L_{\mathfrak{T}} = i(D_t + \sum_{k=1}^{3} a^k D_k + i\beta m). \qquad /37/$$

Если написать более подробно, лагранжиан взаимодействия, входящий в /36/, имеет вид

$$\mathfrak{L}_{вз} = (ig/4)\{[\psi a_\mu \psi, w^\mu] + \psi a_\mu v^\mu(\psi + \psi^Q) + \psi a_\mu \psi^Q v^\mu + v^\mu \psi a_\mu \psi\}, \qquad /38/$$

где мы употребили обозначение a_0 = единичная 4x4 матрица. Из этого выражения снова видно, что поле w^μ взаимодействует лишь с "цветной" /векторной/ частью тока $\psi a_\mu \psi$, поскольку оно входит в лагранжиан /38/ в виде коммутатора с этим током.

3. МЕХАНИЗМ ХИГГСА

Для того чтобы включить механизм Хиггса спонтанного нарушения SO(4) - калибровочной симметрии лагранжиана /36/ до SO(3) - группы автоморфизмов, предположим существование лоренц-скалярного кватерполя

$$\phi(x) = \phi_\iota(x)e_\iota, \qquad /39/$$

где ϕ_ι / $\iota = 0,1,2,3$/ - вещественные скалярные поля, и лагранжиан которого имеет спонтанно-нарушенный вид

$$\mathfrak{L}(\phi) = (D_\mu\phi(x))(D^\mu\phi(x))^Q + \mu^2\phi(x)\phi^Q(x) - \lambda(\phi(x)\phi^Q(x))^2, \qquad /40/$$

$$\mu^2 > 0, \quad \lambda > 0,$$

где ковариантная производная имеет тот же вид /25/, что и для поля $\psi(x)$.

При квантовании этого поля его также следует разделить на скалярную и векторную части

$$\phi^s(x) = (\phi(x) + \phi^Q(x))/2\,, \quad \phi^V(x) = (\phi(x) - \phi^Q(x))/2. \qquad /41/$$

Скалярная часть квантуется по обычным правилам для бозонов

$$[\phi^s(x),\ \phi^s(y)] = i\Delta(x-y), \quad x \sim y, \qquad /42/$$

тогда как векторная часть - по правилам для парабозонов

$$[\{\phi^V(x),\ \phi^V(y)\},\ \phi^V(z)] = -2i\Delta(x-z)\,\phi^V(y) - 2i\Delta(y-z)\,\phi^V(x) \qquad /43/$$

при $x \sim y \sim z$. Между собой скалярная и векторная части коммутируют. Скалярная часть коммутирует со всеми остальными полями, тогда как векторная часть коммутирует со скалярной частью $\psi(x)$, а с векторной частью $\psi(x)$ и с векторными полями $V_\mu(x)$ и $W_\mu(x)$ /или $v_\mu(x)$ и $w_\mu(x)$ / имеет взаимные парабозонные соотношения типа /29/.

Лагранжиан /40/ инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\phi'(x) = a(x)\,\phi(x)\,b(x), \quad \phi^{Q'}(x) = b^Q(x)\,\phi^Q(x)\,a^Q(x). \qquad /44/$$

Воспользовавшись этой инвариантностью, мы всегда можем в каждой точке x преобразовать поле $\phi(x)$ так, чтобы у него отличной от нуля была только скалярная компонента. Для этого следует в /44/ положить

$$a(x) = b^Q(x)\,\phi^Q(x)/(\phi(x)\,\phi^Q(x))^{1/2}. \qquad /45/$$

Тогда преобразованное поле превращается в скаляр, равный норме исходного поля

$$\phi'(x) = (\phi(x)\,\phi^Q(x))^{1/2} = \|\phi(x)\|. \qquad /46/$$

Ковариантная производная в такой калибровке принимает вид

$$D_\mu\phi'(x) = \partial_\mu\|\phi(x)\| - g\,\|\phi(x)\|\,v_\mu(x), \qquad /47/$$

а лагранжиан /40/ становится

$$\mathcal{L}(\phi') = -\Box\|\phi(x)\| - g^2\|\phi(x)\|^2 v_\mu^2 + \mu^2\|\phi(x)\|^2 - \lambda\|\phi(x)\|^4. \qquad /48/$$

Производя, как обычно, разложение около вакуумного среднего

$$\|\phi(x)\| = \langle\phi\rangle_0 + \theta(x), \quad \langle\phi\rangle_0 = v/\sqrt{2}, \quad v = \mu/\sqrt{\lambda}, \qquad /49/$$

мы получаем для массы хиггсовского обычного скалярного поля θ массу $m_\theta = 2\mu$ и для векторного лептокваркового калибровочного кватерполя v_μ массу $m_v = gv$. Глюонное кватерполе w_μ остается безмассовым. Подбором достаточно большого значения величины v всегда можно добиться сильного подавления лептон-кварковых переходов.

Отметим, что выделение скалярной компоненты кватерполя $\phi(x)$ было произведено посредством выбора определенной "физической" калибровки, допустимой в теории, инвариантной относительно калибровочных $SO(4)$ - преобразований /21/ и /44/. Если, однако, мы захотим придать лептонам и кваркам различные массы за счет юкавского взаимодействия спинорного майорановского и скалярного кватерполей, то нам с самого начала придется отделить лептонную компоненту поля $\psi(x)$ от кварковой и тем самым нарушить $SO(4)$ калибровочно-инвариантную теорию до теории, калибровочно-инвариантной относительно лишь $SO(3)$ -преобразований автоморфизмов /23/. Мы можем это сделать, написав лагранжиан юкавского взаимодействия в виде

$$\mathcal{L}_{юк} = -ig_\ell\,\psi_\ell(x)(i\beta)\,\psi_\ell(x)[\phi(x) + \phi^Q(x)]/2. \qquad /50/$$

В физической калибровке при разложении /49/ такое взаимодействие приводит к добавке для массы лептона величины

$$\Delta m_\ell = g_\ell v/\sqrt{2} = (g_\ell/g)\,m_v/\sqrt{2}. \qquad /51/$$

Поскольку $\Delta m_\ell \lll m_v$, то должно быть $g_\ell \lll g$. Можно составить также полилинейные по $\psi(x)$ взаимодействия, инвариантные относительно преобразований /23/, но не /21/. Например, можно составить взаимодействие, включающее скалярную трилинейную комбинацию

$$\{\psi(x),\ \psi(y),\ \psi(z)\} \equiv (-1/4)[\{\psi(x),\ \psi(y)\}\psi(z) + \psi^Q(z)\{\psi(x),\ \psi(y)\}^Q] = \vec{\psi}(x)\cdot\vec{\psi}(y)\times\vec{\psi}(z). \qquad /52/$$

Такие взаимодействия также приведут к разделению лептонной и кварковой компонент поля $\psi(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного исследования теории квантованных полей, основанных на кватернионах, можно сделать следующие выводы.

Рассматривая кварк-лептонное майорановское кватерполе скорее как модуль, чем многокомпонентную величину, удается сформулировать калибровочные кватернионные преобразования, отвечающие $SO(4)$ - группе инвариантности лагранжиана и $SO(3)$ - группе автоморфизмов кватернионов, и ввести соответствующие лоренц-векторные калибровочные кватерполя. Одно из них, отвечающее группе автоморфизмов, можно интерпретировать как "псевдоцветовое" глюонное поле /из трех глюонов/, тогда как другое - как лептокварковое поле. При включении механизма Хиггса с помощью введения лоренц-скалярного кватерполя лептокварковое поле приобретает конечную массу, тогда как глюонное поле остается безмассовым. При этом используется физическая калибровка, когда у лоренц-скалярного кватерполя остается отличной от нуля лишь скалярная компонента, приобретающая при спонтанном нарушении конечную массу. За счет юкавского взаимодействия лептонной части майорановского поля со скалярной частью хиггсовского скалярного поля лептон также приобретает конечную массу. Таким образом, теория калибровочных кватерполей может служить некоторой упрощенной моделью лептон-кварковой симметрии при интерпретации псевдоцветовой симметрии $SO(3)$ как группы автоморфизмов, остающейся неприкосновенной. Она может представлять интерес как подготовительный этап при переходе к теории полей, основанных на октонионах [1,2] или постоктонионах [7], в которой уже имеется возможность формулировки как цветовой $SU(3)_c$ - калибровочной симметрии, так и калибровочной симметрии электрослабых взаимодействий.

ДОПОЛНЕНИЕ. АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ

Произвольный кватернион над полем вещественных чисел имеет вид

$$q = q_\iota e_\iota \quad \text{/сумма по } \iota = 0,1,2,3/, \qquad /Д.1/$$

где q_ι - вещественные числа.

Кватернионные единицы /обычная единица e_0 и три мнимых единицы e_i, $i = 1,2,3$/ определяются правилами умножения:

$$e_0^2 = 1, \quad e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \qquad /Д.2/$$

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k, \qquad /Д.3/$$

где ϵ_{ijk} - антисимметричный тензор Леви-Чивита / $\epsilon_{123} = 1$/.

Удобно представлять скалярную и векторную компоненты кватерниона в виде столбца

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix}. \qquad /Д.4/$$

Правило умножения таких столбцов, согласно /Д.2-3/, имеет вид

$$q^{(1)} q^{(2)} = \begin{bmatrix} q_0^{(1)} \\ \vec{q}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0^{(2)} \\ \vec{q}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^{(1)} q_0^{(2)} - \vec{q}^{(1)} \vec{q}^{(2)} \\ q_0^{(1)} \vec{q}^{(2)} + \vec{q}^{(1)} q_0^{(2)} + \vec{q}^{(1)} \times \vec{q}^{(2)} \end{bmatrix}. \qquad /Д.5/$$

Сами кватернионные единицы при этом принимают вид

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{e}_i \end{bmatrix}, \qquad /Д.6/$$

где $\vec{e}_i$ - тройка ортонормированных реперных векторов

$$\vec{e}_i \, \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k. \qquad /Д.7/$$

Операция сопряжения /инволюция/, обозначаемая индексом Q, изменяет знак мнимых единиц:

$$e_0^Q = e_0, \quad e_i^Q = -e_i, \quad i = 1,2,3. \qquad /Д.8/$$

Соответственно сопряженный кватернион

$$q^Q = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\vec{q} \end{bmatrix}. \qquad /Д.9/$$

След кватерниона равен его скалярной части:

$$Sp\, q = \frac{1}{2}(q + q^Q) = q_0. \qquad /Д.10/$$

Норма кватерниона

$$\| q \| = (q^Q q)^{1/2} = (q q^Q)^{1/2} = (q_0^2 + q \cdot q)^{1/2}. \qquad /Д.11/$$

Скалярное произведение двух кватернионов

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = (q^{(1)} q^{(2)Q} + q^{(2)} q^{(1)Q}) = q_0^{(1)} q_0^{(2)} + q^{(1)} \cdot q^{(2)}. \qquad /Д.12/$$

Преобразование

$$q' = a q b, \quad q^{Q'} = b^Q q^Q a^Q \qquad /Д.13/$$

оставляет скалярное произведение инвариантным, если кватернионы a и b - единичные:

$$a a^Q = b b^Q = 1. \qquad /Д.14/$$

С помощью /Д.5/ преобразование /Д.13/ представляется как преобразование компонент кватерниона

$$\begin{bmatrix} q_0' \\ \vec{q}\,' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_0 b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b})\, q_0 \;-\; (a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} - \vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{q} \\ (a_0 \vec{b} - b_0 \vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})\, q_0 + (a_0 b_0 + \vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{q} \;- \\ -(\vec{a}\cdot\vec{q})\,\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{q})\,\vec{a} + (\vec{a}\, b_0 - a_0 \vec{b})\times\vec{q} \end{bmatrix} \qquad /Д.15/$$

при условии

$$a_0^2 + \vec{a}^{\,2} = b_0^2 + \vec{b}^{\,2} = 1. \qquad /Д.16/$$

Легко убедиться в том, что преобразование /Д.15/ образует собой группу $SO(4)$ ортогональных поворотов в четырехмерном пространстве /q_0, q /.

Преобразования /Д.13/ содержат подгруппу преобразований

$$q' = a q a^Q, \quad q^{Q'} = a q^Q a^Q, \quad a a^Q = 1. \qquad /Д.17/$$

Преобразования /Д.17/ сохраняют не только скалярное произведение /Д.12/, но и правило умножения /Д.5/, т.е. являются автоморфизмами. Положив $b_0 = a_0$ и $\vec{b} = -\vec{a}$ в /Д.15/, легко видеть, что эти преобразования затрагивают только векторную часть кватерниона и образуют собой группу $SO(3)$. Если параметры преобразования /Д.17/ представить в виде

$$a_0 = \cos\Theta, \quad \vec{a} = \sin\Theta\, \vec{p}, \quad \vec{p}^{\,2} = 1, \qquad /Д.18/$$

то преобразование /Д.17/ сводится к повороту вектора $\vec{q}$ на угол 2Θ вокруг оси $\vec{p}$. Заметим, что калибровочные преобразования векторных полей /26/ сводятся к такому повороту и к добавке $\partial_\mu \phi / g$ вдоль оси $\vec{p}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Günaydin M., Gürsey F. Phys.Rev., 1974, D9, p.3387.
2. Günaydin M., Piron C., Ruegg H. Comm.Math.Phys., 1978, 61, p.69.
3. Finkelstein D. et al. J.Math.Phys., 1963, 4, p.788.
4. Чкареули Дж.Л. ЯФ, 1981, 34, с.460.
5. Green H.S. Phys.Rev., 1953, 90, p.270.
6. Говорков А.Б. Материалы семинара "Кварки-82". ИЯИ АН СССР, М., 1983, с.20.
7. Говорков А.Б. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 7-85, Дубна, 1985, с.17.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1985 года.