сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-85-302

В.М.Мальцев

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША-ГОРДАНА ГРУППЫ SU(3)

1985

Квантовая хромодинамика позволяет объяснить известные адронные состояния и описать динамику сильного взаимодействия. Наиболее значительной частью этой теории является цветная $SU(3)_c$ - группа с локальной калибровочной инвариантностью. Существует убеждение, что неабелева калибровочная теория содержит удержание кварков и, следовательно, в физическом спектре состояний отсутствуют изолированные состояния частиц, соответствующие фундаментальным полям /кваркам и глюонам/. Спектр адронов включает только такие связанные состояния, которые относительно калибровочной цветной группы предполагаются бесцветными /т.е. являются $SU(3)$ - синглетными представлениями/.

Сложные кварк-глюонные структуры играют роль во многих физических процессах. Так, данные Европейской мюонной коллаборации [1] говорят, о том, что в области достаточно высоких переданных импульсов вклад мультикварковых состояний в ядрах значителен [2]. Мультиглюонные резонансные состояния-глюболы при энергиях коллайдера требуются для насыщения парциальных волн в теореме Фруассара [3], что объясняет рост сечений адрон-адронных взаимодействий /серпуховской эффект/. Прямым указанием на существование таких состояний является экспериментальное открытие глюболов [4]. Произвольные кварк-глюонные состояния являются существенным компонентом в формулировке теоретических моделей. Если это так, то возникает проблема проекции таких состояний на синглетное представление калибровочной группы. Цель работы - выразить проекцию через интеграл на группе

Известно [5], что $U(g)$ - типичный элемент трехмерной унимодулярной унитарной группы - зависит от восьми параметров, которые задают точку в g-параметрическом пространстве группы. В матрице конечных преобразований они отождествляются с углами Эйлера, из которых θ, ϕ_i / $i = 1,2$/ имеют смысл полярных углов с областью определения $(0, \pi/2)$, остальные α_j, δ_k / $j = 1,2,3$; $k = 1,2$/ могут быть отождествлены с азимутальными углами и областью изменения $(0, 2\pi)$.

Обозначим через $|[h_1 h_2 0]; i\rangle$ внутреннее состояние $|i\rangle$ в неприводимом представлении $[h_1 h_2 0]$ группы $SU(3)$ (i - член мультиплета $[h_1 h_2 0]$). С физической точки зрения представляют интерес переходы между внутренними состояниями заданного мультиплета. Такие переходы определены матричными элементами от полного преобразования над рассматриваемыми состояниями. Обозначим их через $D^{[h_1 h_2 0]}_{ij}(g) = \langle [h_1 h_2 0]; j | U(g) | [h_1 h_2 0]; i \rangle$. Используя технику, развитую Чаконом и Мошинским [6], несложно найти полную

...ститут
...ека

3 x 3-матрицу конечных преобразований, в которой диагональные D_{ii}-функции / i = 1,2,3/ задают фундаментальное представление группы /триплетное/:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} e^{i\delta_1} cc_1; & -e^{i\delta_1} e^{-i\sigma_2} s; & e^{i\delta_1} e^{-i\sigma_1} cs_1 \\ e^{i\delta_2}[e^{i\sigma_2} sc_1 c_2 - e^{i(\sigma_1-\sigma_3)} s_1 s_2]; & e^{i\delta_2} cc_2; & -e^{i\delta_2}[e^{i(\sigma_2-\sigma_1)} ss_1 c_2 - e^{-i\sigma_3} c_1 s_2] \\ e^{-i(\delta_1+\delta_2)}[e^{i(\sigma_2+\sigma_3)} sc_1 s_2 + e^{i\sigma_1} s_1 c_2]; & e^{-i(\delta_1+\delta_2)} e^{i\sigma_3} cs_2; & e^{-i(\delta_1+\delta_2)}[c_1 c_2 - e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} ss_1 s_2] \end{pmatrix} \qquad /1/$$

$(i, j = 1, 2, 3)$:

где

$c = \cos\theta$; $s = \sin\theta$,

$c_i = \cos\phi_i$, $s_i = \sin\phi_i$.

Соответствующая $\tilde{D}_{ij}$ -матрица с диагональными элементами для антитриплетного представления получается эрмитовым сопряжением ($\tilde{D}_{ij} = D^{+}_{ij}$).

Пусть исходное состояние

$$|A\rangle = \prod_{q=1}^{r} \prod_{\ell=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \otimes |[210]; p_q\rangle |[110]; i_\ell\rangle |[100]; j_k\rangle \qquad /2/$$

содержит r октетов, (n+m) антитриплетов и m триплетов. Вероятность перехода из такого состояния в синглетное равна квадрату проекции этого вектора на подпространство, преобразующееся по синглетному представлению группы. Эта величина равна

$$|\langle[000]|A\rangle|^2 = \langle A|\hat{P}^{[000]}|A\rangle. \qquad /3/$$

где оператор $\hat{P}^{[000]}$ имеет вид

$$\hat{P}^{[000]} = \int \hat{D}(g)\, dg \qquad /4/$$

и проектирует векторы подпространства, в котором действуют операторы $\hat{D}(g)$, на пространство, преобразующееся по синглетному представлению. Здесь уже учтено, что размерность и характер синглетного представления равны единице.

Подставляя /2/ и /4/ в /3/, запишем квадрат проекции в виде интеграла на группе

$$|\langle[000]|A\rangle|^2 = \frac{2}{(2\pi)^5} \int dg \prod_{q=1}^{n+r} \prod_{\ell=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} D^{[210]}_{p_q p_q} \tilde{D}_{i_\ell i_\ell} D_{j_k j_k} \qquad /5/$$

где (i, j =1,2,3,; p = 1,...,8/, $D^{[210]}_{p_q p_q}$ -член q-го октета, $\tilde{D}_{i_\ell i_\ell}$ - i-й член ℓ-го антитриплета, а $D_{j_k j_k}$ -j-й член k-го триплета. Инвариантную меру dg /нормированный элемент объема/ нетрудно вычислить [7]:

$$dg = \prod_{\alpha,\beta=1}^{2} \prod_{\gamma=1}^{3} \sin 2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot \sin 2\phi_\alpha \cdot d\theta\, d\phi_\alpha\, d\sigma_\gamma\, d\delta_\beta, \qquad /6/$$

Чтобы еще более упростить задачу, воспользуемся "кварковым содержанием" волновых функций октета [8] и исключим из /5/ октетные D -функции. Несложно увидеть, что

$$D^{[210]}_{11} = D_{11}\tilde{D}_{33} = D^2_{11}D_{22} - D_{21}D_{12}D_{11},$$

$$D^{[210]}_{22} = D_{22}\tilde{D}_{33} = D^2_{22}D_{11} - D_{12}D_{21}D_{22},$$

$$D^{[210]}_{33} = D_{33}\tilde{D}_{11} = D^2_{33}D_{22} - D_{32}D_{23}D_{33},$$

$$D^{[210]}_{44} = D_{33}\tilde{D}_{22} = D^2_{33}D_{11} - D_{13}D_{31}D_{33},$$

$$D^{[210]}_{55} = D_{11}\tilde{D}_{22} = D^2_{11}D_{33} - D_{11}D_{13}D_{31},$$

$$D^{[210]}_{66} = D_{22}\tilde{D}_{11} = D^2_{22}D_{33} - D_{22}D_{23}D_{32}, \qquad /7/$$

$$D^{[210]}_{77} = \frac{1}{2}\{D_{11}\tilde{D}_{11} + D_{22}\tilde{D}_{22} - D_{12}\tilde{D}_{21} - D_{21}\tilde{D}_{12}\}$$

$$= D_{11}D_{22}D_{33} + D_{33}D_{12}D_{21} - \frac{1}{2}\{D_{12}D_{23}D_{31} + D_{21}D_{13}D_{32} +$$

$$+ D_{11}D_{23}D_{32} + D_{22}D_{13}D_{31}\},$$

$$D^{[210]}_{88} = D_{33}\tilde{D}_{33} - \frac{1}{2}\{D_{31}\tilde{D}_{13} + D_{32}\tilde{D}_{23}\} =$$

$$= D_{11}D_{22}D_{33} - D_{21}D_{12}D_{33} + \frac{1}{2}\{D_{13}D_{31}D_{22} +$$

$$+ D_{23}D_{32}D_{11} - D_{23}D_{31}D_{12} - D_{21}D_{13}D_{32}\}.$$

Соотношения /7/ позволяют исключить в /5/ D-функцию октета [9], что преобразует квадрат проекции к виду

$$|\langle 000|A\rangle|^2 = \frac{2}{(2\pi)^5}\int dg \sum \prod_{\ell=m+r+1}^{n+2r} \prod_{k=1}^{m+r} \tilde{D}_{i_\ell j_\ell} D_{p_k q_k}, \qquad /8/$$

$$(i, j, p, q = 1, 2, 3),$$

где $D_{p_k q_k}$ - матричные элементы в матрице /1/, а $\tilde{D}_{i_\ell j_\ell}$ - то же для эрмитово-сопряжённой матрицы. Таким образом, соотношение /8/ полностью решает поставленную задачу, т.е. проекция исходного состояния на синглетное, или, что то же самое, квадрат коэффициента Клебша-Гордана группы SU(3) выражен через интеграл на группе от суммы произведений матричных элементов в матрице конечных преобразований.

В заключение приведем значение интеграла для нескольких важных частных случаев.

$$\frac{2}{(2\pi)^5}\int dg \prod_{\ell=1}^{2n} \prod_{k=1}^{n} D_{i_\ell i_\ell} \tilde{D}_{i_k i_k} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \quad (i = 1,2).$$

$$\frac{2}{(2\pi)^5}\int dg \prod_{\ell=1}^{n} (D_{11}\tilde{D}_{22}D_{11}\tilde{D}_{22})_\ell = \frac{1}{(n+1)^3}. \qquad /9/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aubert I.I. (EMC). Phys.Lett., 1983, 123B, p.275.
2. Efremov A.V., Bondarchenko E.A. JINR, E2-84-124, 1984.
3. Герштейн С.С., Логунов А.А. ИФВЭ, 84-37, Серпухов, 1984.
4. Lindenbaum S.J. Status of the Glueballs. BNL-34592, 1984; The Discovery of Glueballs. Surveys in High Energy Physics, vol.4, p.69-126; J.M.Charap Ed. Harvard Acad.Publ., London, 1983.
5. Murnaghan F.D. The Unitary and Rotation Groups. Spartan, Books, Washington, 1962, p.19.
6. Chacon E., Moshinsky M. Phys.Lett., 1966, vol.23, p.567.
7. Maltsev V.M. Nucl.Phys., 1971, vol.B31, p.278-282.
8. Bogolubov N.N. Theory of Elementary Particle Symmetry. Collected Papers. "High Energy Physics and Theory of Elementary Particles", "Naukova Dumka", Kiev, 1967.
9. Fredriksson S. Hello diquark, goodbye gluon! Preprint TRITA-TFY-84-04, 1984, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 апреля 1985 года

Мальцев В.М.

Р2-85-302

Об интегральном представлении коэффициентов Клебша-Гордана группы SU(3)

Рассмотрена проекция произвольного кварк-глюонного состояния на синглетное представление группы SU(3). Она представлена интегралом на группе. В этом случае квадрат коэффициента Клебша-Гордана вычисляется в виде восьмикратного интеграла по соответствующим углам Эйлера.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Maltsev V.M.

P2-85-302

On Integral Representation of the Clebsch-Gordan Coefficients of SU (3) Group

The projection of arbitrary quark-gluon state on a singlet representation of SU(3) group is considered. It is given by an integral on the group. In this case the square of a Clebsch-Gordan coefficient is evaluated as the eigth-fold integral over corresponding Eiler angles.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985