сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-85-240

М.И.Подгорецкий

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ КОРРЕЛЯЦИЯХ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПИОНОВ

1985

1. При столкновении ультрарелятивистских ядер может образоваться большое число тождественных пионов. В этой связи имеет смысл рассмотреть некоторые особенности многочастичных корреляций тождественных пионов, проявляющиеся в наиболее чистом виде при очень больших кратностях ($n \gg 1$) *.

Известно, что обсуждаемые корреляции связаны с пространственно-временными параметрами R и τ, характеризующими процесс генерации пионов. Для определенности мы будем считать, что координаты $\vec{r}$ одночастичных источников пионов распределены по закону Гаусса

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi R^2)^{3/2}} \cdot e^{-\vec{r}^{\,2}/2R^2} . \qquad /1/$$

Кроме того, для сокращения записи в дальнейшем почти всюду предполагается, что все пионы испускаются одновременно, т.е. $\tau = 0$. Переход к случаю $\tau \neq 0$ не представляет никаких особых затруднений, при выводе соответствующих соотношений будем считать, что моменты генерации пионов распределены по закону

$$v(t) = \frac{1}{(2\pi\tau^2)^{1/2}} \cdot e^{-t^2/2\tau^2} . \qquad /2/$$

Итак, имеем n независимых одночастичных источников, расположенных в точках $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_n$ и генерирующих тождественные пионы с импульсами $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ ..., $\vec{p}_n$. Амплитуда процесса содержит $n!$ слагаемых и имеет вид

$$A \sim \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_{\alpha_1} + \vec{r}_2\vec{p}_{\alpha_2} + \ldots \vec{r}_n\vec{p}_{\alpha_n})} . \qquad /3/$$

В каждом из членов выражения /3/ все индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ отличаются друг от друга и могут принимать значения от 1 до n; суммирование ведется по всем возможным перестановкам из n элементов α_k. Плотность вероятности

$$W(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n) \sim \langle A \cdot A^* \rangle , \qquad /4/$$

где усреднение производится в соответствии с законом распределения /1/, который предполагается одинаковым для всех источников.

---

* О многочастичных корреляциях тождественных пионов см. также [1-4].

Формула /4/ содержит $(n!)^2$ слагаемых. Для выяснения ее структуры достаточно рассмотреть $n!$ слагаемых, входящих в выражение

$$e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_1+\vec{r}_2\vec{p}_2+\ldots+\vec{r}_n\vec{p}_n)}\cdot A^* = e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_1+\ldots+\vec{r}_n\vec{p}_n)}\cdot\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} e^{i(\vec{r}_1\vec{p}_{\alpha_1}+\ldots\vec{r}_n\vec{p}_{\alpha_n})}, \qquad /5/$$

остальные $(n!-1)\,n!$ слагаемых дают вклады такого же типа в общую вероятность процесса $W(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n)$. Одна из экспонент, входящих в амплитуду A^*, сопряжена комплексно с $e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_1+\ldots\vec{r}_n\vec{p}_n)}$, их произведение равно единице. Показатели всех остальных экспонент содержат различные перестановки импульсов $\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n$. Среди них имеются перестановки, в которых каждый из импульсов $\vec{p}_k$ "привязан к чужому источнику", т.е. к источнику, расположенному в точке $\vec{r}_\ell$ с номером $\ell \neq k$. Такие перестановки называются смещениями, их число обозначим D_n. Частным случаем смещений являются любые циклические перестановки импульсов $\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n$. При умножении $e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_1+\ldots\vec{r}_n\vec{p}_n)}$ на экспоненту, показатель которой содержит смещение импульсов $\vec{p}_1, \vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_n$, возникает интерференционный член, зависящий от всех этих импульсов. Кроме того, имеются перестановки, в которых один и только один из импульсов $\vec{p}_k$ "привязан" к источнику с тем же самым номером. Число таких перестановок равно nD_{n-1}, где D_{n-1} – число смещений для совокупности остальных $(n-1)$ импульсов. При умножении соответствующей экспоненты на $e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_1+\ldots+\vec{r}_k\vec{p}_k+\ldots+\vec{r}_n\vec{p}_n)}$ в показателе выпадает слагаемое $\vec{r}_k\vec{p}_k$, т.е. интерференционный член перестает зависеть от импульса $\vec{p}_k$. Если два каких-то импульса $\vec{p}_k$ и $\vec{p}_\ell$ "привязаны" к своим исходным источникам /т.е. к источникам с номерами k и ℓ/, то сокращаются слагаемые $\vec{r}_k\vec{p}_k$ и $\vec{r}_\ell\vec{p}_\ell$, интерференционный член перестает зависеть от импульсов $\vec{p}_k$ и $\vec{p}_\ell$; число таких членов равно $C_n^2 D_{n-2}$. Далее идут перестановки с тремя "закрепленными" импульсами, их число $C_n^3 D_{n-3}$ и т.д. вплоть до C_n^{n-2} перестановок, в которых "закреплены" $(n-2)$ импульса[x]. Суммируя все перестановки различных типов, приходим к тождеству

$$n! = D_n + nD_{n-1} + C_n^2 D_{n-2} + \ldots + C_n^m D_{n-m} + \ldots + C_n^{n-2} D_2 + 1. \qquad /6/$$

Интерференционный максимум имеет довольно сложную структуру, он содержит слагаемые, зависящие только от двух импульсов, только от трех импульсов и т.д., вплоть до членов, зависящих от n импульсов $\vec{p}_1, \vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_n$. Однако ситуация сильно упрощается

---

[x] Если в перестановке "закреплены" $(n-1)$ импульсов, то автоматически "закреплен" и оставшийся n-й импульс. Соответствующий вклад в вероятность процесса был уже учтен с самого начала, он не зависит от импульсов и равен единице.

при $n \gg 1$. Можно показать, что тогда определяющую роль в /6/ играют несколько первых членов. Известно /см., например, /51/ гл.3, §5/, что число смещений

$$D_k = k!\sum_0^k (-1)^\ell/\ell! \,. \qquad /7/$$

Если $k \gg 1$, сумму в /7/ можно приближенно заменить на $\sum_0^\infty (-1)^\ell/\ell! = e^{-1}$, т.е.

$$D_k = k!/e \,. \qquad /7'/$$

Поэтому первый и второй члены в /6/ равны $n!/e$, третий равен $n!/2e$, четвертый – $n!/6e$, в сумме эти четыре слагаемых составляют примерно 0,99 от полного числа всех перестановок; следовательно, для качественного анализа можно ограничиться только ими. Ясно также, что при $n \gg 1$ каждый из этих членов приводит практически к одной и той же интерференционной картине, т.е. в дальнейшем достаточно исследовать только один из них, например, первый; соответствующий интерференционный максимум зависит от всех импульсов $\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n$.

Таким образом, в сумме /5/ основную роль играют D_n слагаемых типа

$$e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_1+\ldots+\vec{r}_n\vec{p}_n)}\cdot e^{i(\vec{r}_1\vec{p}_{\alpha_1}+\ldots+\vec{r}_n\vec{p}_{\alpha_n})}, \qquad /8/$$

причем в каждом из них все индексы $\alpha_k \neq k$. Для дальнейшего анализа надо еще разбить индексы $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ на особые группы, которые мы будем называть циклами различной кратности /не путать с циклическими перестановками!/. Возьмем для примера смещения из четырех элементов /1,2,3,4/, число которых $D_4 = 9$. Эти смещения могут быть двух разных типов: 6 смещений /4,1,2,3/, /4,3,1,2/, /2,4,1,3/, /3,4,2,1/, /2,3,4,1/, /3,1,4,2/ и 3 смещения /3,4,1,2/, /2,1,4,3/ и /4,3,2,1/. Смещению /4,1,2,3/ соответствует интерференционный член

$$e^{-i(\vec{r}_1\vec{p}_1+\vec{r}_2\vec{p}_2+\vec{r}_3\vec{p}_3+\vec{r}_4\vec{p}_4)}\cdot e^{i(\vec{r}_1\vec{p}_4+\vec{r}_2\vec{p}_1+\vec{r}_3\vec{p}_2+\vec{r}_4\vec{p}_3)} =$$

$$= e^{-i\{\vec{r}_1(\vec{p}_1-\vec{p}_4)+\vec{r}_4(\vec{p}_4-\vec{p}_3)+\vec{r}_3(\vec{p}_3-\vec{p}_2)+\vec{r}_2(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\}}.$$

После усреднения по положениям источников это выражение переходит в

$$e^{-\frac{R^2}{2}(\vec{q}_{12}^{\,2}+\vec{q}_{23}^{\,2}+\vec{q}_{34}^{\,2}+\vec{q}_{41}^{\,2})}, \qquad \vec{q}_{ik} = \vec{p}_i - \vec{p}_k \,. \qquad /9/$$

Поскольку четыре импульса $\vec p_1$, $\vec p_2$, $\vec p_3$ и $\vec p_4$ в показателе экспоненты связаны друг с другом циклически ($\vec p_1 \to \vec p_2$, $\vec p_2 \to \vec p_3$, $\vec p_3 \to \vec p_4$, $\vec p_4 \to \vec p_1$), смещение /4,1,2,3/ назовем четырехкратным циклом. Легко убедиться, что остальные 5 смещений первой группы образуют такие же четырехкратные циклы. Обратимся теперь ко второй группе, например, к смещению /3,4,1,2/. Ему соответствует интерференционный член

$$e^{-i(\vec r_1\vec p_1+\vec r_2\vec p_2+\vec r_3\vec p_3+\vec r_4\vec p_4)}\cdot e^{i(\vec r_1\vec p_3+\vec r_2\vec p_4+\vec r_3\vec p_1+\vec r_4\vec p_2)}=$$

$$=e^{-i\{(\vec r_1-\vec r_3)(\vec p_1-\vec p_3)+(\vec r_2-\vec r_4)(\vec p_2-\vec p_4)\}}.$$

Здесь индексы 1 и 3 "не перепутаны" с индексами 2 и 4, т.е. смещение разбивается на два независимых двукратных цикла. Усреднение по положениям источников приводит к выражению

$$e^{-R^2(\vec q_{13}^{\,2}+\vec q_{24}^{\,2})}. \qquad /10/$$

Каждое из двух остальных смещений второй группы также разбивается на два двукратных цикла.

Как легко убедиться, аналогичное разбиение смещений на циклы имеет место для любых n. Например, при $n = 5$ возникают пятикратные, трехкратные и двукратные циклы, при $n = 6$ происходит разбиение на циклы с кратностью 6,4,3,2 и т.д. Если рассматриваемое смещение разбивается на несколько независимых циклов, то связанное с ним слагаемое в сумме /5/ сводится к произведению соответствующего числа экспонент типа /10/ для двукратных циклов и типа /9/ для циклов более высокой кратности. Различие между выражениями /9/ и /10/ приводит, вообще говоря, к некоторому чисто техническому усложнению анализа свойств многочастичных корреляций. Вместе с тем ниже будет показано, что при $n \gg 1$ указанное затруднение не имеет места, а до тех пор будем считать, что рассматриваемые смещения не содержат двукратных циклов.

Для смещения, сводящегося к единственному n-кратному циклу, задача состоит в исследовании выражения

$$e^{-\frac{R^2}{2}\{(\vec p_1-\vec p_2)^2+(\vec p_2-\vec p_3)^2+\ldots+(\vec p_{n-1}-\vec p_n)+(\vec p_n-\vec p_1)^2\}}.$$

Оно максимально, если все импульсы одинаковы. Если смещение разбивается на два цикла с кратностями k и $\ell=n-k$, то возникает выражение

$$e^{-\frac{R^2}{2}\{(\vec p_1-\vec p_2)^2+\ldots+(\vec p_k-\vec p_1)^2\}}\cdot e^{-\frac{R^2}{2}\{(\vec p_{k+1}-\vec p_{k+2})^2+\ldots+(\vec p_n-\vec p_{k+1})^2\}}.$$

Оба сомножителя независимы, максимум соответствует совпадению всех импульсов $\vec p_1,\ldots,\vec p_k$ и, одновременно, всех импульсов $\vec p_{k+1},\ldots,\vec p_n$, т.е. максимум достигается, когда импульсы разбиваются на две независимые группы. Если смещение содержит три цикла, то максимум возникает при трех независимых группах совпадающих импульсов и т.д. Поэтому в дальнейшем достаточно рассмотреть выражение

$$e^{-\frac{R^2}{2}\{(\vec p_1-\vec p_2)^2+(\vec p_2-\vec p_3)^2+\ldots+(\vec p_{m-1}-\vec p_m)+(\vec p_m-\vec p_1)^2\}}, \qquad /11/$$

соответствующее одному m-кратному циклу.

Смещение кратности n может многими способами разбиваться на циклы различной кратности. Можно, однако, показать /см., например,[/5/] гл.4, §4/, что с ростом n основную роль играют циклы большой кратности. Поэтому будем предполагать, что в выражении /11/ кратность $m \gg 1$.

2. Этому выражению соответствует интерференционный максимум, который достигается при $\vec p_1=\vec p_2=\ldots=\vec p_m$ и сходит на нет, когда величины $\vec q_{ik}^{\,2}=(\vec p_i-\vec p_k)^2$ достаточно велики. Пусть все импульсы, кроме какого-то одного, совпадают, например, $\vec p_1=\vec p_2=\ldots=\vec p_{m-1}=\vec p$, $\vec p_m\neq\vec p$. Тогда $\vec q_{m-1,m}^{\,2}=\vec q_{m1}^{\,2}=(\vec p_m-\vec p)^2$, в то время как все остальные величины $\vec q_{ik}^{\,2}=0$, т.е. /11/ переходит в $e^{-R^2(\vec p_m-\vec p)^2}$. В этом случае ширина максимума в импульсном пространстве не зависит от m и равна по порядку величины $1/R$. Практически то же самое будет, если точное совпадение импульсов $\vec p_1$, $\vec p_2$, ..., $\vec p_{m-1}$ заменить условием $\vec q_{12}^{\,2}, \vec q_{23}^{\,2}, \ldots, \vec q_{m-2,m-1}^{\,2} \ll \frac{1}{mR^2}$. Однако при больших m такое поведение касается только ничтожной доли общего фазового объема, покрываемого рассматриваемым максимумом. Для получения более адекватной характеристики лучше считать все разности $\vec q_{ik}$ примерно равноправными. Пусть, например, речь идет о конфигурациях, в которых все величины $\vec q_{ik}^{\,2}$ одинаковы. Тогда показатель в экспоненте /11/ равен $mR^2\vec q^{\,2}/2$, т.е. при таком отборе ширина максимума падает с ростом m как $m^{-1/2}$

Возникает естественный вопрос о степени общности последнего утверждения. Для получения ответа надо ввести какой-либо удачно выбранный критерий, характеризующий ширину интерференционного пика, причем этот критерий должен быть связан со всеми возможными внутри пика конфигурациями, сохраняя вместе с тем полную равноправность импульсов $\vec p_1$, $\vec p_2$, ..., $\vec p_m$. Хотя в рамках указанных требований остается еще свобода выбора того или иного конкретного критерия, можно все же полагать, что это не отражается на интересующих нас качественных оценках. Ниже будут рассмотрены и сопоставлены два таких критерия.

Чтобы сформулировать первый критерий, рассмотрим следующее мысленное построение. Усредним выражение /11/ по случайному распределению импульсов $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$, предполагая, что каждый из них распределен вблизи некоторого фиксированного импульса $\vec{p}_0$ независимо от остальных по закону

$$P(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi D^2)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}{2D^2}}. \qquad /12/$$

Тогда получим величину

$$\Phi = \frac{1}{(2\pi D^2)^{\frac{3m}{2}}} \int e^{-\frac{\sum_1^m (\vec{p}_k-\vec{p}_0)^2}{2D^2} - \frac{R^2}{2}\{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+\ldots+(\vec{p}_m-\vec{p}_1)^2\}} d^3\vec{p}_1 \ldots d^3\vec{p}_m. \qquad /13/$$

Поскольку

$$(\vec{p}_1-\vec{p}_2) = (\vec{p}_1-\vec{p}_0)-(\vec{p}_2-\vec{p}_0), \ldots, (\vec{p}_m-\vec{p}_1) = (\vec{p}_m-\vec{p}_0)-(\vec{p}_1-\vec{p}_0)$$

и

$$d^3\vec{p}_1 = d^3(\vec{p}_1-\vec{p}_0), \ldots, d^3\vec{p}_m = d^3(\vec{p}_m-\vec{p}_0),$$

зависимость от $\vec{p}_0$ фактически отсутствует, т.е. можно записать

$$\Phi(R,D) = \frac{1}{(2\pi D^2)^{3m/2}} \int e^{-\frac{\vec{p}_1^2+\ldots+\vec{p}_m^2}{2D^2} - \frac{R^2}{2}\{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+\ldots+(\vec{p}_m-\vec{p}_1)^2\}} \cdot d^3\vec{p}_1 \ldots d^3\vec{p}_m. \qquad /14/$$

Для каждого из импульсов $\vec{p}_k$ его компоненты p_{kx}, p_{ky} и p_{kz} предполагаются независимыми, поэтому

$$\Phi(R,D) = \phi^3(R,D),\ \phi(R,D) = \frac{1}{(2\pi D^2)^{m/2}} \int e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_m^2}{2D^2} - \frac{R^2}{2}\{(x_1-x_2)^2+\ldots+(x_m-x_1)^2\}} dx_1 \ldots dx_m. \qquad /15/$$

Известно, что для положительно определенной симметричной квадратичной формы $\sum_k \sum_\ell a_{k\ell} x_k x_\ell$ имеет место равенство*

$$\int e^{-\sum_k \sum_\ell a_{k\ell} x_k x_\ell} dx_1 \ldots dx_m = (\pi)^{m/2} / \sqrt{\det\|a_{k\ell}\|}. \qquad /16/$$

В интересующем нас случае отличны от нуля только диагональные элементы квадратичной формы, элементы, примыкающие сверху и снизу к главной диагонали, а также элементы a_{1m} и a_{m1}, стоящие на концах второй диагонали, причем диагональные элементы равны $(1+2D^2R^2)/2D^2$, а недиагональные элементы равны $-R^2/2$. Вынося в качестве общего множителя $R^2/2$, получим

$$\det\|a_{k\ell}\| = (\frac{R^2}{2})^m \det\|b_{k\ell}\|.$$

Диагональные элементы детерминанта $\|b_{k\ell}\|$ равны

$$b = \frac{1+2D^2R^2}{D^2R^2}, \qquad /17/$$

а все остальные, отличные от нуля, элементы равны -1. Можно показать, что

$$\det\|b_{k\ell}\| = \prod_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (b - 2\cos\frac{2\pi\alpha}{m}). \qquad /18/$$

Поэтому окончательно имеем

$$\Phi(R,D) = 1/(D^2R^2)^{\frac{3m}{2}} \cdot \{\prod_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (b-2\cos\frac{2\pi\alpha}{m})\}^{3/2}. \qquad /19/$$

Из структуры интеграла /14/ следует, что $\Phi(R,D) = 1$, если $D = 0$; для очень больших D величина $b \to 2$, и $\Phi(R,D)$, в соответствии с /19/, стремится к нулю. Поэтому мерой ширины интерференционного пика разумно считать такое значение $\tilde{D}$, для которого $\Phi(R,\tilde{D})$ существенно отличается от единицы. Можно, например, условиться определять $\tilde{D}$ равенством

$$\Phi(R,\tilde{D}) = 1/2. \qquad /20/$$

При достаточно больших m величина $\tilde{D}R \ll 1$, т.е. $b = \frac{1+2\tilde{D}^2R^2}{\tilde{D}^2R^2} \gg 1$.

Поэтому в формуле /18/ можно ограничиться старшим членом, который равен $b^m = (\frac{1+2\tilde{D}^2R^2}{\tilde{D}^2R^2})^m$. Тогда из /19/ следует

$$\Phi(R,\tilde{D}) = 1/(1+2\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3m}{2}}, \qquad /21/$$

а условие /20/ приводит к равенству $\frac{3m}{2}\ln(1+2\tilde{D}^2R^2) = \ln 2$, т.е. при $m \gg 1$ получаем

---

* С помощью ортогонального преобразования можно привести форму к диагональному виду, для которого результат /16/ очевиден; надо также иметь в виду, что такое преобразование не меняет величину детерминанта и что соответствующий якобиан равен единице.

$$\tilde{D} = \sqrt{\frac{\ln 2}{3m}} \Big/ R = \frac{0{,}481}{R\sqrt{m}} . \qquad /22/$$

Величину $\tilde{D}$ можно назвать "импульсной шириной" интерференционного пика. Из /22/ следует, что при больших кратностях она мала и падает с ростом m как $m^{-1/2}$. "Угловая ширина" зависит также от абсолютной величины импульсов, образующих рассматриваемый максимум. Для пионов с импульсами, близкими к некоторому $\vec{p}_0$, мерой "угловой ширины" естественно считать

$$\tilde{\theta} = \frac{\tilde{D}}{|\vec{p}_0|} = \frac{1}{|\vec{p}_0|\cdot R} \sqrt{\frac{\ln 2}{3m}} . \qquad /23/$$

Таким образом, с ростом m импульсы пионов, относящихся к интерференционному пику, сближаются по абсолютной величине и коллимируются по направлению, возникают узкие "струи" частиц с примерно одинаковыми энергиями*.

Выше предполагалось, что одночастичные источники излучают пионы одновременно ($\tau = 0$). Если имеется какой-то временной разброс, то возникает дополнительная монохроматизация пионов. Пусть моменты излучения каждого из независимых источников распределены в соответствии с законом /2/. Тогда /11/ переходит в

$$e^{-\frac{R^2}{2}\{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+\ldots+(\vec{p}_m-\vec{p}_1)^2\} - \frac{\tau^2}{2}\{(\epsilon_1-\epsilon_2)^2+\ldots+(\epsilon_m-\epsilon_1)^2\}} . \qquad /24/$$

Здесь ϵ_k – энергия частицы с импульсом $\vec{p}_k$. Для частиц с близкими импульсами справедливо соотношение

$$(\epsilon_k - \epsilon_\ell) = (\vec{p}_k - \vec{p}_\ell)\,\vec{v} , \qquad /25/$$

где $\vec{v} = \vec{p}_0/m$ – средняя скорость рассматриваемых частиц. Поэтому /24/ можно переписать в виде

$$e^{-\frac{R^2}{2}\{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2+\ldots+(\vec{p}_m-\vec{p}_1)^2\} - \frac{\tau^2}{2}\{[(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\vec{v}]^2+\ldots+[(\vec{p}_m-\vec{p}_1)\vec{v}]^2\}} . \qquad /26/$$

Теперь в интеграл /13/ вместо выражения /11/ следует подставить /26/. Поскольку величина этого интеграла не изменяется при любом повороте системы координат, имеет смысл направить ось $0z$ вдоль вектора $\vec{v}$. Тогда интеграл разбивается на три независимых сомножителя, и простые вычисления приводят при $\tilde{D}R \ll 1$ к формуле

---

*При очень больших кратностях существенную роль может играть взаимодействие в конечном состоянии, в частности – кулоновское взаимодействие, если речь идет о заряженных пионах. Этот вопрос, требующий специального анализа, в настоящей публикации не рассматривается.

$$\Phi(R,\tilde{D},\tau) = 1/(1+2\tilde{D}^2R^2)^m \cdot [1+2\tilde{D}^2(R^2+\tau^2v^2)]^{\frac{m}{2}} . \qquad /27/$$

Подстановка /27/ в условие /20/ дает окончательный результат

$$\tilde{D} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\frac{1}{3}\tau^2v^2}} \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{3m}} . \qquad /28/$$

Из сопоставления /22/ и /28/ видно, что во втором случае величина $\tilde{D}$ меньше, чем в первом.

Выше для оценки ширины интерференционного пика проводилось усреднение по импульсному распределению /12/. Рассмотрим теперь кратко другой подход, в котором будем считать статистически независимыми не импульсы $\vec{p}_k$, а их разности $\vec{q}_{12} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$, $\vec{q}_{23} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_3)$, ..., $\vec{q}_{m-1,m} = (\vec{p}_{m-1} - \vec{p}_m)$, причем каждый из этих $(m-1)$ векторов предполагается распределенным по закону

$$P(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi D^2)^{3/2}} \cdot e^{-\vec{q}^{\,2}/2D^2} . \qquad /29/$$

Поскольку $\vec{q}_{12} + \vec{q}_{23} + \ldots + \vec{q}_{m1} = 0$, последняя разность

$$\vec{q}_{m1} = -(\vec{q}_{12} + \ldots + \vec{q}_{m-1,m}) . \qquad /30/$$

Теперь вместо /14/ имеем

$$\Phi(R,D) = \frac{1}{(2\pi D^2)^{\frac{3(m-1)}{2}}} \int e^{-\frac{\vec{q}_{12}^{\,2}+\ldots+\vec{q}_{m-1,m}^{\,2}}{2D^2} - \frac{R^2}{2}(\vec{q}_{12}^{\,2}+\ldots+\vec{q}_{m-1,m}^{\,2}+\vec{q}_{m1}^{\,2})} \cdot d^3\vec{q}_{12}\ldots d^3\vec{q}_{m-1,m} . \qquad /31/$$

Вводя сокращенные обозначения $\vec{q}_{12} = \vec{q}_1$, $\vec{q}_{23} = \vec{q}_2$, ..., $\vec{q}_{m-1,m} = \vec{q}_{m-1}$ и учитывая /30/, имеем также

$$\Phi(R,R) = \frac{1}{(2\pi D^2)^{\frac{3(m-1)}{2}}} \int e^{-\frac{1+2D^2R^2}{2D^2}(\vec{q}_1^{\,2}+\ldots+\vec{q}_{m-1}^{\,2}) - \frac{R^2}{2}\sum_{k\neq\ell}\sum \vec{q}_k\vec{q}_\ell} \cdot d^3\vec{q}_1\ldots d^3\vec{q}_{m-1} . \qquad /31'/$$

Переходя от векторов к их проекциям, получим $\Phi(R,D) = \phi^3(R,D)$,

$$\phi(R,D) = \frac{1}{(2\pi D^2)^{\frac{m-1}{2}}} \int e^{-\frac{1+2D^2R^2}{2D^2}(x_1^2+\ldots+x_{m-1}^2) - \frac{R^2}{2}\sum_{k\neq\ell}\sum x_k x_\ell} \cdot dx_1\ldots dx_{m-1} . \qquad /32/$$

Показатель экспоненты можно переписать в виде

$$-\sum_k \sum_\ell a_{k\ell} x_k x_\ell\,, \quad a_{kk} = \frac{1+2D^2R^2}{2D^2}, \quad a_{k\ell} = R^2/2.$$

Поэтому, имея в виду /16/, следует вычислить

$$\det\|a_{k\ell}\| = \left(\frac{R^2}{2}\right)^{m-1} \det\|b_{k\ell}\|, \quad \text{где} \quad b_{kk} = b = \frac{1+2D^2R^2}{D^2R^2}, \quad b_{k\ell} = 1.$$

Легко убедиться, что

$$\det\|b_{k\ell}\| = (b+m-2)(b-1)^{m-2}. \qquad /33/$$

В итоге после простых вычислений получаем

$$\Phi(R,D) = 1/(1+mD^2R^2)^{3/2}(1+D^2R^2)^{\frac{3(m-2)}{2}}. \qquad /34/$$

Условие /20/ приводит при $m \gg 1$ к уравнению

$$\ln(1+m\tilde{D}^2R^2) + m\ln(1+\tilde{D}^2R^2) = \frac{2\ln 2}{3},$$

из которого следует

$$\tilde{D} \simeq \frac{0{,}494}{R\sqrt{m}}, \qquad /35/$$

т.е. обсуждаемая оценка ширины интерференционного пика фактически совпадает с прежней оценкой /22/, отличаясь от нее только несущественным численным множителем, близким к единице.

Если смещение разбивается на несколько циклов меньшей кратности, то импульсы, связанные с каждым из циклов, образуют независимые интерференционные максимумы. Однако, если речь идет не о самих импульсах, а только об их разностях, все эти максимумы можно анализировать с помощью распределений /29/ совместно. Пусть m - кратное смещение разбивается на два цикла с большими кратностями k_1 и k_2 и ℓ двукратных циклов ($k_1+k_2+2\ell = m$). Тогда выражение /11/ надо заменить на произведение сомножителей, относящихся к каждому из циклов. Если кратность цикла $k>2$, возникает сомножитель типа /11/ с числом слагаемых в показателе экспоненты, равным k. После усреднения по распределениям /29/ это дает $1/(1+k\tilde{D}^2R^2)^{3/2}\cdot(1+\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3(k-2)}{2}}$, учитывая оба таких цикла, получим при $k_1, k_2 \gg 1$

$$\frac{1}{(1+k_1\tilde{D}^2R^2)^{3/2}(1+\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3(k_1-2)}{2}}}\cdot\frac{1}{(1+k_2\tilde{D}^2R^2)^{3/2}(1+\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3(k_2-2)}{2}}} =$$

$$\simeq \frac{1}{(1+k_1\tilde{D}^2R^2)^{3/2}(1+k_2\tilde{D}^2R^2)^{3/2}(1+\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3(k_1+k_2)}{2}}}.$$

Каждому из двукратных циклов соответствует сомножитель $e^{-R^2\vec{q}^2}$, где $\vec{q}$ - разность импульсов частиц, образующих цикл. После усреднения по распределению /29/ за счет всех двукратных циклов получим $1/(1+4\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3\ell}{2}}$. Поэтому

$$\Phi(R,\tilde{D}) = 1/(1+k_1\tilde{D}^2R^2)^{3/2}(1+k_2\tilde{D}^2R^2)^{3/2}(1+\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3(k_1+k_2)}{2}}(1+4\tilde{D}^2R^2)^{\frac{3\cdot\ell}{2}}. \qquad /36/$$

Условие /20/ приводит к уравнению

$$\ln(1+k_1\tilde{D}^2R^2) + \ln(1+k_2\tilde{D}^2R^2) + (k_1+k_2)\ln(1+\tilde{D}^2R^2) + \ell\cdot\ln(1+4\tilde{D}^2R^2) = \frac{2\ln 2}{3}, \qquad /37/$$

решение которого с учетом равенства $k_1+k_2+2\ell = m$ практически совпадает с /35/. Например, при $k_1 = k_2 = 40$ и $\ell = 10$ из /37/ следует $\tilde{D} \simeq \frac{0{,}4855}{R\sqrt{m}}$, что отличается от /35/ всего лишь на 2%. Полученный результат относится и к тем случаям, когда рассматриваемое смещение разбивается на несколько циклов достаточно большой кратности.

Из сказанного выше следует, что при $n \gg 1$ действительно происходит сильная монохроматизация и угловая коллимация пионов, образующих интерференционные максимумы. Это несколько напоминает явления, которые имели бы место в оптическом лазере, если бы из него был удален резонатор.

Сходство с оптическим лазером усиливается, если пионы генерируются не непосредственно, а в результате распада промежуточных резонансов [6,7], поскольку такие резонансы являются аналогами возбужденных атомов в оптике. Вместе с тем их наличие не гарантирует появления "пионного лазера", так как вынужденное излучение может играть заметную роль только для покоящихся резонансов, когда образующиеся пионы имеют примерно одинаковые энергии. К сожалению, в реальных условиях рассматриваемые резонансы движутся с большими и сильно различающимися лоренц-факторами, из-за чего образующиеся при их распаде пионы обладают очень широким импульсным спектром /разброс энергий велик по сравнению с энергетической шириной резонанса Γ /. В таких условиях наличие промежуточных резонансов приводит, в основном, только к переопределению параметров R и r, которые, помимо пространственно-временных размеров области генерации, включают также пробеги и времена жизни резонансов.

В последнее время появились публикации, в которых обсуждаются различные возможности объяснения т.н. "кентавров" - загадочных аномальных событий, изредка наблюдаемых в экспериментах с космическими лучами [8]. В частности, высказывается предположение, что искомое объяснение может быть связано с идеей о реальном существовании "пионного лазера" [6,7,9]. Изложенные выше качественные соображения свидетельствуют, как кажется, о том, что к такому подходу следует пока что относиться с большой осторожностью.

Выражаю благодарность Р.Ледницкому и В.Л.Любошицу за участие в обсуждении постановки вопроса и полезные замечания, Л.Г.Заставенко, В.К.Мельникову, В.И.Огиевецкому и Я.А.Смородинскому за математические консультации, И.М.Граменицкому за помощь в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копылов Г.И. ОИЯИ, Р2-7211, Дубна, 1973.
2. Karczmarczuk J. Nucl.Phys., 1974, vol.78B, p.370.
3. Kopylov G.I. et al. JINR, E2-9249, Dubna, 1975.
4. Karczmarczuk J. Acta Phys.Pol., 1978, vol.9B, p.233.
5. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. ИИЛ, М.,1963.
6. Wakamatsu M. Nuovo Cim., 1980, vol.56A, p.336.
7. Lam C.S., Lo S.Y. Phys.Rev.Lett., 1984, vol.52, p.1184.
8. Lattes C.M.G. et al. Phys.Rep., 1980, vol.65, p.151.
9. Fowler G.N. et al. Phys.Lett., 1982, vol.116B, p.203.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1985 года.

Подгорецкий М.И. Р2-85-240

К вопросу об интерференционных корреляциях при большом числе тождественных пионов

Рассмотрены некоторые свойства интерференционных корреляций очень большого числа тождественных пионов. В рамках модели независимых одночастичных источников получена оценка ширины интерференционного пика и показано, что она равна по порядку величины $1/R\sqrt{n}$, где R - размеры области генерации, n - число тождественных пионов.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод автора

Podgoretsky M.I. P2-85-240

On Interference Correlations for a Large Number of Identical Pions

Some properties of interference correlations for a very large number of identical pions have been considered. Within the framework of the model of independent one-particle sources an estimation of the width of the interference peak has been obtained. By the order of magnitude the latter is shown to be equal to $1/R\sqrt{n}$, where R is the dimension of the generation range and n is the number of identical pions.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985