сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-85-233

Р.М.Ямалеев

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В БАЗИСЕ ОКТАВ

1985

1. ОСОБЕННОСТИ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ СПИНА 1/2 НА 3-МЕРНОЙ ЭВКЛИДОВОЙ СФЕРЕ В ОБЛАСТЬ БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ

В работе [1] было показано, что нерелятивистская теория частиц со спином 1/2 становится более последовательной и принимает каноническую форму, если она сформулирована на 3-мерной сфере 4-мерного эвклидова пространства. В этом случае оператор энергии имеет вид

$$H = \frac{2}{mR^2}\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2} + \vec{S}\right)^2 = \frac{1}{2mR^2}\left((2\hbar - i\vec{\tau}\,\vec{\mathfrak{M}})^2 - \hbar^2\right); \qquad (1.1)$$

который, как видно, выражается исключительно в терминах группы SU(2), реализующих конечномерное представление:

$$\vec{S} = -i\hbar\vec{\tau}/2 \qquad (1.2)$$

и бесконечномерное представление

$$\vec{\mathfrak{M}}/2 = -i\hbar\,\frac{\vec{\tau}^{\,ik}}{2}\,x_i\,\frac{\partial}{\partial x^k}. \qquad (1.3)$$

Такая теория содержит фундаментальную длину — радиус сферы R, так что при $R \to \infty$ (1.1) переходит в известный оператор энергии Паули.

Уравнение нерелятивистской квантовой механики на 3-мерной эвклидовой сфере впервые получил Шредингер [2]. Аналогично, релятивистское уравнение движения электрона — уравнение Дирака — было им сформулировано в сферическом мире де Ситтера [3]. Однако существенной особенностью работы [1] и предшествующих ей работ [4]) является использование прямой связи между оператором спина и пространственным репером при выводе оператора энергии для нерелятивистской частицы со спином 1/2. Важно, что в этом случае генератор трансляции $\vec{p} = -i\hbar\partial/\partial\vec{x}$ заменяется не на оператор

$$\vec{N}/R = (r_4\vec{p} - \vec{r}p_4)/R, \qquad (1.4)$$

а на сумму и разность операторов $\vec{M}/R$ и $\vec{N}/R$:

$$\vec{p} \to (\vec{M} \pm \vec{N})/R \equiv \vec{\mathfrak{M}}_{\pm}/R, \qquad (1.5)$$

что, вообще говоря, соответствует не только искривлению, но и кручению пространства.

Следующим существенным моментом применения оператора $\vec{\mathfrak{M}}_\pm$ является то, что $\mathfrak{M}_\pm/2$ и $\vec{S}_\pm$ из (1.2), (1.3) — объекты одной природы, компоненты которых удовлетворяют одним и тем же формулам коммутации:

$$[\eta_i, \eta_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\eta_k, \quad (\eta_k \in \mathfrak{M}_k/2, S_k). \tag{1.6}$$

Естественно, при построении релятивистской теории основные особенности нерелятивистской теории должны быть сохранены. В качестве первого шага рассмотрим, как следует изменить оператор

$$\vec{\mathfrak{M}}_\pm = [\vec{r} \times \vec{p}] \pm (r_4\vec{p} - \vec{r}p_4), \tag{1.7}$$

чтобы он, с одной стороны, имел лоренцев ковариантный вид, с другой — сохранил свои коммутационные свойства как углового момента. Этим требованиям можно удовлетворить только вводя четырехмерные временные компоненты $(\rho_4, \vec{\rho})$ (соответственно временные компоненты импульса $\pi_4, \vec{\pi}$). В этом случае преобразование Лоренца одновременно будет действовать в плоскостях $(\rho_4, \vec{r})$ и $(r_4, \vec{\rho})$, а аналог оператора (1.7) будет иметь вид (для него мы сохраняем то же обозначение):

$$\vec{\mathfrak{M}} = [\vec{r} \times \vec{p}] \pm (r_4\vec{p} - \vec{r}p_4) + [\vec{\rho} \times \vec{\pi}] \pm (\rho_4\vec{\pi} - \vec{\rho}\pi_4). \tag{1.8}$$

Это выражение можно было получить также из (1.3), которое для большей наглядности перепишем в следующем виде:

$$\vec{\mathfrak{M}} = (r_4, \vec{r})(\vec{r}) \begin{pmatrix} p_4 \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Поскольку при релятивизации /5/

$$\vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{r} & 0 \\ 0 & \vec{r} \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

то

$$\vec{\mathfrak{M}} = (r_4 \vec{r} \rho_4 \vec{\rho}) \begin{pmatrix} \vec{r} & 0 \\ 0 & \vec{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4 \\ \vec{p} \\ \pi_4 \\ \vec{\pi} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

что совпадает с (1.8). Аналогичным способом можно составить выражение для оператора $\vec{T}$:

$$\vec{T} = (r_4 \vec{r} \rho_4 \vec{\rho}) \begin{pmatrix} 0 & \vec{r} \\ \vec{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4 \\ \vec{p} \\ \pi_4 \\ \vec{\pi} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Компоненты векторов $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{T}$ будут удовлетворять тем же коммутационным соотношениям, что и матрицы

$$-i\hbar\vec{r} \equiv -i\hbar \begin{pmatrix} \vec{r} & 0 \\ 0 & \vec{r} \end{pmatrix}, \quad -i\hbar\vec{t} \equiv -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \vec{r} \\ \vec{r} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

являясь жордановыми отображениями последних. Отсюда следует, что $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{T}$ являются генераторами группы Лоренца. Объединим векторы $\vec{r}$ и $\vec{t}$ в один антисимметричный тензор

$$S_{\mu\nu} = -i\hbar\gamma_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \tag{1.14}$$

тогда

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu} = \gamma^{nk}_{\mu\nu} r_n p_k, \tag{1.15}$$

где $(n, k = 1,2,...8)$. Таким образом, обобщение нерелятивистской теории частиц со спином 1/2 с оператором Гамильтона (1.1) в область больших скоростей движения неизбежно приводит к удвоению числа измерений пространства-времени. Если учесть, что переменные $(\rho_4, \vec{\rho})$ являются временными, т.е.

$$(\rho_4, \vec{\rho}) = i(t, \vec{t}), \tag{1.16}$$

то ясно, что 8-мерное пространство-время является псевдоэвклидовым с сигнатурой (+ + + + - - - -). Ради удобства далее мы будем работать с вещественными переменными $(\rho_4, \vec{\rho})$.

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В БАЗИСЕ ОКТАВ

В алгебре 16 матриц Дирака можно выделить два восьмимерных базиса

$$(\gamma_\mu, \tilde{\gamma}_\mu) \text{ и } (I, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_5), \tag{2.1}$$

которые, согласно /6/, можно идентифицировать бикватернионом. Например,

$$(I, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_5) = q_1 + iq_2,$$

где q_1, q_2 — кватернионы в представлении базиса матриц Паули, i — мнимая единица. Множество бикватернионов не образует тело, поэтому базисы (2.1) не подходят для факторизации 8-мерного выражения для массы

$$m^2c^2 = p_4^2 + \vec{p}^2 + \pi_4^2 + \vec{\pi}^2. \tag{2.2}$$

Для факторизации соотношения (2.2), в принципе, можно было бы использовать γ — матрицы восьмимерного пространства (т.е. матрицы 8 x 8 в комплексных и 16 x 16 в вещественных единицах). В результате мы получили бы теорию Дирака в 8-мерном пространстве. Но это означало бы, что мы отошли от тех важных принципов, которые были сформулированы ранее.

Алгебраическим базисом нерелятивистской теории спина 1/2 является базис кватернионов. "Релятивизация", как мы видели выше, приводит к удвоению числа измерений пространства-времени и базиса Паули. Как известно, удвоением базиса кватернионов является базис октав /7/. Октавы образуют тело, базисные единицы октавы антикоммутируют друг с другом. Октавы можно представить через два кватерниона p и π :

$$Q \equiv (\mathrm{p}, \pi) \tag{2.3}$$

с правилом умножения

$$Q_1 Q_2 = (\mathrm{p}_1, \pi_1)(\mathrm{p}_2, \pi_2) = ((\mathrm{p}_1 \mathrm{p}_2 - \bar{\pi}_2 \pi_1), (\pi_2 \mathrm{p}_1 - \pi_1 \bar{\pi}_2)) . \tag{2.4}$$

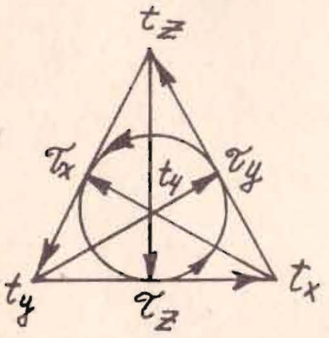
Правило умножения базисных единиц октавы не обладает свойством ассоциативности, поэтому октава непредставима в виде обычной матрицы. Из правила умножения (2.4) видно, что если не учесть некоммутативность p и π , то Q можно представить в виде матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} \mathrm{p} & \pi \\ -\bar{\pi} & \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix} . \tag{2.5}$$

Представление (2.5) позволяет привести в соответствие базисные единицы октав с известными матрицами Дирака. Имеет место следующее соответствие:

$$\vec{\Sigma}_{M(1,2,3)} \Rightarrow \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{r} & 0 \\ 0 & -\vec{r} \end{pmatrix} , \quad \vec{\Sigma}_{t(5,6,7)} \Rightarrow \vec{t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \vec{r} \\ \vec{r} & 0 \end{pmatrix} , \quad \Sigma_{0(4)} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.6}$$

Правило умножения октав с базисными единицами $\Sigma_i (\vec{r}, \vec{t}, t_4)$ $(i = 1,2,...7)$ удобно задать в виде известной схемы Фрейденталя (см.рис.).



Из координат $(\mathrm{r}_4, \vec{\mathrm{r}}, \rho_4, \vec{\rho})$ и импульсов $(\mathrm{p}_4, \vec{\mathrm{p}}, \pi_4, \vec{\pi})$ на основе базисных единиц (2.6) составим октавы

$$Q_r = \mathrm{r}_4 + \vec{\mathrm{r}}\vec{r} + \rho_4 t_4 + \vec{\rho}\vec{t} , \tag{2.7}$$

$$Q_p = \mathrm{p}_4 + \vec{\mathrm{p}}\vec{r} + \pi_4 t_4 + \vec{\pi}\vec{t} . \tag{2.8}$$

Координаты и импульсы являются точками семимерных сфер:

$$R^2 = Q_r \bar{Q}_r = \bar{Q}_r Q_r . \tag{2.9}$$

$$m^2 c^2 = \bar{Q}_p Q_p . \tag{2.10}$$

Пользуясь известными тождествами алгебры октав, преобразуем (2.10) следующим образом:

$$m^2 c^2 = (\bar{Q}_p (\frac{Q_r \bar{Q}_r}{R^2}) Q_p) = (\bar{Q}_p Q_r) \frac{1}{R^2} (\bar{Q}_r Q_p) . \tag{2.11}$$

Выполнив процедуру умножения в круглых скобках по схеме Фрейденталя, получим

$$\bar{Q}_r Q_p = s_1 + \mathfrak{M}^n \Sigma_n , \tag{2.12}$$

$$\bar{Q}_p Q_r = s_2 - \mathfrak{M}^n \Sigma_n , \tag{2.13}$$

где

$$s_1 = (\mathrm{r}\mathrm{p}) + (\mathrm{p}\pi) , \tag{2.14}$$

$$s_2 = (\mathrm{p}\mathrm{r}) + (\pi \mathrm{p}) . \tag{2.15}$$

Операторы $\mathfrak{M}_n (n = 1,2,...,7)$ в сумме

$$\mathfrak{M}_n \Sigma_n \equiv \vec{\mathfrak{M}} \vec{\Sigma}_M + \vec{\mathfrak{T}} \vec{\Sigma}_t + \mathfrak{T}_0 \Sigma_0 \tag{2.16}$$

имеют следующий вид:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathrm{r}_4 \vec{\mathrm{p}} - \vec{\mathrm{r}} \mathrm{p}_4 + [\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{p}}] - \{ \rho_4 \vec{\pi} - \vec{\rho} \pi_4 + [\vec{\rho} \times \vec{\pi}] \} ,$$

$$\vec{\mathfrak{T}} = \mathrm{r}_4 \vec{\pi} - \vec{\mathrm{r}} \pi_4 - [\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\pi}] + \rho_4 \vec{\mathrm{p}} - \vec{\rho} \mathrm{p}_4 - [\vec{\rho} \times \vec{\mathrm{p}}] , \tag{2.17}$$

$$\mathfrak{T}_0 = \rho_4 \mathrm{p}_4 - \mathrm{r}_4 \pi_4 - (\vec{\mathrm{r}} \vec{\pi}) + (\vec{\rho} \vec{\mathrm{p}}) .$$

В силу условия (2.9) имеем

$$s_1 = 0 , \quad s_2 = -i\hbar 8 . \tag{2.18}$$

Поскольку операторы $\mathfrak{M}_n$ коммутируются с R^2, то, учитывая (2.18), получим

$$(mcR)^2 = -(8i\hbar + \mathfrak{M}^n \Sigma_n)(\mathfrak{M}^n \Sigma_n) . \tag{2.19}$$

Полученная формула (2.19) является неудовлетворительной в том отношении, что операторы $\mathfrak{M}_n$ и Σ_n, образующие скалярное произведение, удовлетворяют разным коммутационным соотношениям. Дело в том, что базисные единицы Σ_n непредставимы через матрицы, а операторы $\mathfrak{M}_n$ выражаются через матрицы вида

$$\vec{r}^{\circ} \equiv \begin{pmatrix} \vec{r}^{+} & 0 \\ 0 & -\vec{r}^{+} \end{pmatrix} , \quad \vec{t}^{\circ} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{r}^{-} \\ \vec{r}^{-} & 0 \end{pmatrix} , \quad t_4^{\circ} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -I \\ +I & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.20}$$

а именно:

$$\mathfrak{M}_n = \overset{0}{\Sigma}{}^{ij}_n \, \mathrm{r}_i \mathrm{p}_j \, (i, j = 1, ... 8) , \qquad \overset{0}{\Sigma}{}^{ij}_n = (\vec{r}^{\circ}, \vec{t}^{\circ}, t_4^{\circ}) . \tag{2.21}$$

Если задаться целью исправить это положение, то необходимо уточнить одно свойство октавного умножения, важное для построения настоящей теории.

Как было упомянуто выше, октавы являются удвоением поля кватернионов. Если выбрать представление базисных единиц кватернионов через спиновые матрицы r_k^{ij} $(k = 1,2,3)$ $(i, j = 1,\ldots 4)$, то формулы умножения кватернионов можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{4} [(\delta^{4i}\delta^{mn} - \delta^{ik} r_k^{mn})(\delta^{4j}\delta^{n\ell} + \delta^{jp} r_p^{n\ell}) = = (\delta^{ij}\delta^{m\ell} + T_k^{ij} r_k^{m\ell}), \tag{2.22}$$

причем для кватернионов $T_k^{ij} = r_k^{ij}$. В случае октав вместо T_k^{ij} получим матрицы вида $\overset{0}{\Sigma}{}_k^{ij}$ из (2.20):

$$(\delta^{oi} - \delta^{ik}\Sigma_n)(\delta^{oj} + \delta^{jp}\Sigma_\ell) = (\delta^{ij} + \overset{0}{\Sigma}{}_k^{ij} \cdot \Sigma_k). \tag{2.23}$$

Далее мы будем полагать, переопределяя (2.23), что в (2.23) или стоят только выражения вида Σ_k, т.е.:

$$(\delta^{oi} - \delta^{ik}\Sigma_n)(\delta^{oj} + \delta^{jp}\Sigma_\ell) = (\delta^{ij} + \Sigma_k^{(ij)}\Sigma_k), \tag{2.24}$$

или только матрицы $\overset{0}{\Sigma}{}_k^{ij}$. Применение формулы умножения октав (2.24) приводит к тому, что компоненты $\mathfrak{M}_n$ будут иметь те же свойства коммутации, что и операторы

$$S_n = -\hbar\Sigma_n, \tag{2.25}$$

, а именно:

$$[\vec{\mathfrak{M}} \times \vec{\mathfrak{M}}] = 2\hbar\vec{\mathfrak{M}}, \quad [\vec{\mathfrak{M}} \times \vec{\mathfrak{J}}] = 2\hbar\vec{\mathfrak{J}}, \quad [\mathfrak{J}_i, \mathfrak{M}_i] = 2\hbar\mathfrak{J}_0. \tag{2.26}$$

Возвращаясь к формуле (2.19), с учетом (2.24) и (2.26) раскроем скобки. Получим

$$(mcR)^2 = \vec{\mathfrak{M}}^2 + 2S_n\mathfrak{M}^n. \tag{2.27}$$

До сих пор мы не выделяли в явном виде псевдоевклидовость пространства. Положим $\rho_k \to i\xi_k$, $\pi_k \to i\eta_k$. Тогда

$$\mathfrak{M}_n\mathfrak{M}^n = \mathfrak{J}_0^2 + \vec{\mathfrak{J}}^2 - \vec{\mathfrak{M}}^2, \quad 2S_n\mathfrak{M}^n = C_k\mathfrak{J}^k - 2(\vec{S}\vec{\mathfrak{M}}),$$
$$C_kC^k = +4\hbar^2, \quad S_iS^i = 3\hbar^2. \tag{2.28}$$

Здесь оператор $(\mathfrak{J}_0^2 + \vec{\mathfrak{J}}^2)/R^2$ соответствует квадрату полной энергии, а оператор $\vec{\mathfrak{M}}^2/R^2$ — кинетической энергии. Положим, что кинетическое движение отсутствует, т.е. $\vec{\mathfrak{M}}^2 = 0$. Тогда

$$(mcR)^2\Psi = (\mathfrak{J}_0^2 + \vec{\mathfrak{J}}^2 + 2\vec{C}\vec{\mathfrak{J}} + 2C_0\mathfrak{J}_0). \tag{2.29}$$

В левой части равенства стоит квадрат от вещественной величины, в правой — положительно неопределенный оператор, который кроме положительных собственных значений может иметь и отрицательные. Чтобы достигнуть согласованности, в правую часть необходимо добавить величину, равную $\vec{C}^2 + C^2 = +4\hbar^2$. Тогда уравнение (2.29) принимает вид

$$(mcR)^2\Psi = (\mathfrak{J}_0 + C_0)^2\Psi + (\vec{\mathfrak{J}} + \vec{C})^2\Psi. \tag{2.30}$$

Теперь положим, что координаты $(\rho_4, \vec{\rho})$ — циклические, а кинетическая часть энергии отлична от нуля. Тогда должно быть

$$(\vec{\mathfrak{M}}^2 + 2\vec{S}\vec{\mathfrak{M}})\Psi = \lambda\Psi, \quad \lambda \geq 0. \tag{2.31}$$

Однако это не так, поскольку положительно определенным является оператор

$$\vec{\mathfrak{M}}^2 + 2\vec{S}\vec{\mathfrak{M}} + \vec{S}^2 = (\vec{\mathfrak{M}} + \vec{S})^2, \tag{2.32}$$

которым мы и должны заменить (2.31). Суммируя изложенное, приходим к следующему уравнению:

$$(mcR)^2\Psi = (\mathfrak{M}_n + S_n)(\mathfrak{M}^n + S^n). \tag{2.33}$$

Уравнение (2.32) является обобщением уравнения Клейна-Гордона. При $R \to \infty$ оно переходит в уравнение Клейна-Гордона при условии, что

$$\mathcal{E} \equiv c[(\mathfrak{J}_0 + C_0)^2 + (\vec{\mathfrak{J}} + \vec{C})^2]^{1/2}/R \tag{2.34}$$

— есть оператор энергии (точнее, переходит в обычный оператор энергии). Существенное отличие (2.33) от уравнения Клейна-Гордона состоит в том, что уравнение (2.33) содержит оператор спина. Факторизуя (2.33), получим аналог уравнения Дирака. С этой целью приведем (2.33) к следующему виду:

$$(mcR)^2 = (4\hbar - i\Sigma_n\mathfrak{M}_n)(4\hbar - i\Sigma_n\mathfrak{M}_n), \quad \bar{m} = m\sqrt{1 + 17\hbar^2/c^2R^2}. \tag{2.35}$$

Уравнение (2.35) получено на основе соотношения

$$(i\Sigma_n\mathfrak{M}_n) = \vec{\mathfrak{M}}^2 + 6i\Sigma_n\mathfrak{M}_n. \tag{2.36}$$

которое является следствием (2.26). Таким образом, уравнение

$$\bar{m} c R \Psi = (4\hbar - i \Sigma_n \mathfrak{M}_n) \Psi \qquad (2.37)$$

можно рассматривать как следствие факторизации (2.33). Итак, мы получили аналог уравнения Дирака для частицы 1/2 на семимерной сфере в базисе октав.

3. КОВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим группу преобразований, относительно которой уравнение (2.37) ковариантно. Оператор $(\Sigma_n \mathfrak{M}_n)$ коммутирует с операторрами

$$G_n = \mathfrak{M}_n + S_n\,, \quad n = 1\,, \ldots 7\,. \qquad (3.1)$$

Следовательно, G_n можно рассматривать как генератор инфинитезимальных преобразований группы, которая обладает коммутационными свойствами (2.6). Оператор конечных преобразований будет иметь вид

$$U = \exp(i \theta^n G_n / 2\hbar)\,, \qquad (3.2)$$

где θ^n — параметр преобразования группы. В силу тождества эластичности имеем

$$U (4\hbar - i\Sigma_n \mathfrak{M}_n) U^{-1} = 4\hbar - i \Sigma_n \mathfrak{M}_n\,, \qquad \Psi' = U\Psi\,. \qquad (3.3)$$

Таким образом, уравнение (2.37) инвариантно относительно преобразований данной группы.

На семимерной сфере, согласно (2.12) и (2.18),

$$\Sigma_n \mathfrak{M}^n = \bar{Q}_r Q_p\,. \qquad (3.4)$$

Подвергнем (3.4) преобразованию

$$U (\Sigma_n \mathfrak{M}^n) U^{-1} = U (\bar{Q}_r Q_p) U^{-1}\,.$$

Применяя в правой части равенства центральное тождество Муфанга, получим

$$U (\bar{Q}_r Q_p) U^{-1} = (U \bar{Q}_r)(Q_p U^{-1})\,.$$

Проводя аналогию с преобразованием векторов в базисе матриц Дирака, когда

$$(p_\mu \gamma_\mu)' = \mathring{U} (p_\mu \gamma_\mu) \mathring{U}^{-1}\,, \qquad \Psi' = \mathring{U}\Psi\,, \qquad \mathring{U} = \exp(i \theta^{\nu\mu} \gamma_{\mu\nu} / 2\hbar)\,,$$

мы видим, что операторы $\mathfrak{M}_n$ преобразуются по "векторному" пред-

тавлению, а координаты и импульсы — по "спинорному" представлению. В отличие от нерелятивистской теории, где в равной мере допустимы как спинорные, так и векторные представления для координат,здесь аналога векторных преобразований не существует.Следует тметить, что не случайно термин "векторное представление" применительно к операторам $\mathfrak{M}_n$ взят в кавычки. На самом деле мы здесь меем дело с обычным автоморфизмом группы октав (Aut Ca). Известно, что группа Aut Ca транзитивно действует на сфере S^6. Действительно, рассматриваемая группа преобразований содержит 7 генераторов. Если, например, преобразование осуществляется в направлении Σ_k, то подвергаются изменению все шесть $\mathfrak{M}_i$ $(i \neq k)$. Можно показать, что эта группа изоморфна SU(3). Несмотря на столь сильное тличие от группы Лоренца, тем не менее последняя содержится в ви,е подгруппы, что видно из коммутационных соотношений (2.26).

До сих пор мы пользовались исключительно октавными базисными единицами. Это единственный алгебраический базис, пригодный для факторизации восьмимерного соотношения для массы (2.2).)днако при решении реальных задач существует необходимость перехода к матричному представлению. Оно возможно в силу принятого ами правила умножения (2.24). Мы еще не определили выражение

$$\mathfrak{M}_k = \Sigma_k^{(ij)} r_i p_j\,, \qquad (3.5)$$

правило действия оператора $\Sigma_k^{(ij)}$ на волновой вектор. Это решающее правило определим следующим образом:

Базисные единицы $\Sigma_k^{(ij)}$ действуют как матрицы вида (2.20) на -мерные векторы (строки и столбцы) и как базисные единицы октав - по отношению друг к другу. Назовем это правило матризацией ктав. С принятием правила матризации формулы (2.23) и (2.24) тановятся взаимно согласованными, а уравнение (2.37) равным образом может быть записано как

$$i c R \Psi^i = (4h \delta^{ij} - i \overset{0}{\Sigma}{}_n^{(ij)}) \Psi_j\,. \qquad (3.6)$$

Соль скоро мы перешли к матрицам $\overset{0}{\Sigma}{}_k^{ij}$, то ясно, как поведут себя операторы Σ_k при инверсии координат пространства. В этом случае латрицы (2.20) перейдут в матрицы вида

$$\vec{t}^{\,\circ} = \begin{pmatrix} -\vec{r}^{\,-} & 0 \\ 0 & \vec{r}^{\,-} \end{pmatrix}, \quad \vec{t}^{\,\circ} = -\begin{pmatrix} 0 & \vec{r}^{\,+} \\ \vec{r}^{\,+} & 0 \end{pmatrix}, \quad t^{\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ +I & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

Таким образом, имеется два типа уравнений Дирака (3.6), переходящие друг в друга при инверсии координат и соответствующие, как в [1], правым и левым электронам.

В заключение отметим вопросы, которые требуют специального исследования. Это и проблема включения электромагнитного поля, обобщение уравнений Максвелла-Дирака, и предельные переходы при $R \to \infty$ и $c \to \infty$. Наиболее важной и принципиальной является проблема интерпретации. Естественно, что для дальнейшего развития теории необходимо провести вторичное квантование уравнения (3.6) и, пользуясь тем, что энергия покоя имеет внутреннюю структуру (2.34), попытаться определить спектр масс. Также предстоит исследование одночастичного спектра уравнения (3.6) в традиционных полях (в кулоновском, осцилляторном и т.д.).

Автор благодарит В.А.Мещерякова, А.Б.Пестова, А.А.Владимирова за стимулирующую дискуссию и выражает искреннюю признательность М.Г.Мещерякову и И.В.Пузынину за поддержку и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р4-84-727, Дубна, 1984.
2. Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике, М., "Наука", 1976, с.239-247.
3. Dirac P.A.M. Ann.Math., 1935, 36, p.3.
4. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-80-619, Дубна, 1980; ОИЯИ, Р2-81-302, Дубна, 1981; ОИЯИ, Е2-84-197, Дубна, 1984.
5. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. "Наука", М., 1981.
6. Казанова Г. Векторная алгебра. "Мир", М., 1979.
7. Постников М.М. Группы и алгебры Ли. "Наука", М., 1982, с.300.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 апреля 1985 года.