объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-183

Н.С.Шавохина

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИСТЕМА ДВУХ ТЕЛ С СОБСТВЕННОЙ ОСЬЮ ВРЕМЕНИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Направлено в сборник
"Проблемы теории гравитации
и элементарных частиц"

1985

В работах[1-3] была поставлена и решена проблема релятивизации уравнений Ньютона

$$m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = G\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}, \quad m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = G\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \qquad /1/$$

для двух точечных тел с постоянной по модулю силой взаимодействия.

В[1] сформулирована краевая задача для минимальной двумерной поверхности, лежащей в пространственно-временном мире общего вида. Доказано, что краевая задача эквивалентна уравнениям /1/, коль скоро геометрия мира задается по Клейну группой Галилея. Решение проблемы релятивизации уравнений /1/ свелось к рассмотрению краевой задачи для минимальной двумерной поверхности, лежащей в пространственно-временном мире Пуанкаре-Минковского.

В работе[2] релятивистская задача двух тел представлена как задача о мировой поверхности, ограниченной двумя асимптотическими линиями постоянной кривизны. Эти линии суть мировые траектории рассматриваемых тел. Минимальная поверхность задается формулами Монжа, означающими, что изотропная сеть поверхности является сетью переноса. Указаны интегралы движения - вектор P^{α} и бивектор $M^{\alpha\beta}$.

В[3] переносчики взаимодействия названы минимонами. Мировые траектории минимонов составляют изотропную сеть минимальной поверхности - поверхности взаимодействия двух тел. Показано, что в случае притяжения, когда $G > 0$, вектор P^{α} направлен в "будущее". В таком случае уравнение

$$x^{\alpha}(P,P) - P^{\alpha}(P,x) = M^{\alpha\beta}P_{\beta}, \qquad /2/$$

как и в[4], определяет собственную ось времени системы. Все формулы приспособлены к заранее выбранной инерциальной системе отсчета и особенно к той, ось времени которой совпадает с собственной осью времени.

В настоящей работе будем считать, что $G > 0$ и что собственная ось времени лежит на поверхности взаимодействия. Для этого случая здесь будет введена система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, в которую входит уравнение, заменяющее в релятивистском случае уравнение

$$\frac{d^2\vec{K}}{dt^2} = -G\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}, \qquad /3/$$

тесно связанное с уравнениями /1/.

1. ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Минимальную поверхность задаем в виде

$$\vec{x} = \vec{x}(\eta, t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(t + \frac{\eta}{c}) + \vec{B}(t - \frac{\eta}{c})], \qquad /4/$$

где c - скорость света, t - время, η - параметр на поверхности, меняющийся в пределах

$$\xi_1(t) \le \eta \le \xi_2(t), \qquad /5/$$

и на функции

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{A}(t), \quad \vec{b}(t) = \frac{d}{dt}\vec{B}(t)$$

наложены условия

$$\vec{a}^2(t) = 1, \quad \vec{b}^2(t) = 1. \qquad /6/$$

Координаты рассматриваемых тел в момент времени t равны

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}(\xi_1(t), t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(u_1(t)) + \vec{B}(v_1(t))],$$
$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}(\xi_2(t), t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(u_2(t)) + \vec{B}(v_2(t))], \qquad /7/$$

где

$$u_1(t) = t + \frac{1}{c}\xi_1(t), \quad v_1(t) = t - \frac{1}{c}\xi_1(t),$$
$$u_2(t) = t + \frac{1}{c}\xi_2(t), \quad v_2(t) = t - \frac{1}{c}\xi_2(t). \qquad /8/$$

Если координатная и собственная оси времени параллельны, то краевые условия записываются в виде [3]:

$$\vec{p}_1(t) = \frac{G}{2}[\vec{A}(u_1(t)) - \vec{B}(v_1(t))],$$
$$\vec{p}_2(t) = \frac{G}{2}[\vec{B}(v_2(t)) - \vec{A}(u_2(t))], \qquad /9/$$

где $\vec{p}_1(t)$ и $\vec{p}_2(t)$ - импульсы рассматриваемых тел в момент времени t. Последние вычисляются через массы и скорости тел по формулам

$$\vec{p} = p^\circ \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad p^\circ = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\frac{d\vec{x}}{dt})^2}} \qquad /10/$$

релятивистской механики материальной точки.

Из предыдущего следует, что

$$p_1^\circ(t) = E_1 + \frac{G}{c^2}\xi_1(t), \quad p_2^\circ(t) = E_2 - \frac{G}{c^2}\xi_2(t), \qquad /11/$$

где E_1 и E_2 - постоянные интегрирования. Дальше будем считать, что собственная ось времени совпадает с координатной. Это значит, что [3]:

$$\vec{N} = p_1^\circ(t)\vec{x}_1(t) + p_2^\circ(t)\vec{x}_2(t) + \frac{G}{c^2}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \vec{x}(\eta, t)\, d\eta = 0. \qquad /12/$$

Сохраняющиеся величины, характеризующие внутреннее состояние рассматриваемой системы, суть энергия

$$E = E_1 + E_2 = p_1^0(t) + p_2^0(t) + \frac{G}{c^2}[\xi_2(t) - \xi_1(t)] \qquad /13/$$

и момент

$$\vec{M} = [\vec{x}_1(t)\vec{p}_1(t)] + [\vec{x}_2(t)\vec{p}_2(t)] +$$
$$+ \frac{G}{c^2}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} [\vec{x}(\eta, t), \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta, t)]\, d\eta. \qquad /14/$$

Так как

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta, t) = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{2}(\vec{A}(t + \frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t - \frac{\eta}{c})], \qquad /15/$$

то интегрированием по частям нетрудно привести момент к следующему виду:

$$\vec{M} = \frac{G}{4}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} [\vec{A}(t + \frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t - \frac{\eta}{c}), \vec{a}(t + \frac{\eta}{c}) - \vec{b}(t - \frac{\eta}{c})]\, d\eta. \qquad /16/$$

2. ЧАСТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Предположим теперь, что собственная ось времени лежит на поверхности /4/. Это значит, что собственная ось задается зависимостью $\eta = \eta(t)$, такой, что выполняется условие
$\vec{A}(t + \frac{\eta(t)}{c}) = -\vec{B}(t - \frac{\eta(t)}{c})$.

Дифференцируя это условие по t, получаем

$$\vec{a}(t+\frac{\eta(t)}{c})[1+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\eta(t)] = -\vec{b}(t-\frac{\eta(t)}{c})[1-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\eta(t)].$$

Возводя в квадрат обе части полученного равенства, в силу условий /6/ находим

$$[1+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\eta(t)]^2 = [1-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\eta(t)]^2,$$

т.е. $\frac{d}{dt}\eta(t) = 0$, а значит, $\eta(t) = \mathrm{const}$. Поскольку в заданной инерциальной системе отсчета параметр η определяется с точностью до аддитивной постоянной, то можно считать, что $\eta(t) = 0$, а следовательно,

$$\vec{A}(t) = -\vec{B}(t). \qquad /17/$$

Мы доказали, что в рассматриваемом случае минимальная поверхность задается в виде

$$\vec{x} = \vec{x}(\eta, t) = \frac{c}{2}[\vec{B}(t-\frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t+\frac{\eta}{c})], \qquad /18/$$

где функция $\vec{B}(t)$ по-прежнему удовлетворяет условию

$$\vec{b}^2(t) = 1. \qquad /19/$$

Для такой поверхности потребуем, чтобы выполнялось одно из краевых условий /9/, скажем, второе:

$$\vec{p}(t) = \frac{G}{2}[\vec{B}(v(t)) + \vec{B}(u(t))], \qquad /20/$$

где номер частицы опускаем и по-прежнему пользуемся формулами /10/. При этом

$$\vec{x}(t) = \frac{c}{2}[\vec{B}(v(t)) - \vec{B}(u(t))], \qquad /21/$$

а аргументы u, v равняются

$$u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c}, \quad v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c}. \qquad /22/$$

К такой частной краевой задаче мы приходим в случае $m_1 = \infty$, $m_2 = m$. Действительно, в этом случае собственная ось времени совпадает с мировой траекторией первого тела, а параметр η меняется в пределах

$$0 \le \eta \le \xi(t), \qquad /23/$$

причем $\xi_1(t) = 0$, $\xi_2(t) = \xi(t)$, $\vec{x}_1(t) = \vec{x}(0, t) = 0$, $\vec{x}_2(t) = \vec{x}(t)$, $\vec{p}_2(t) = \vec{p}(t)$.

Подобным образом решается случай $m_1 = m$, $m_2 = \infty$, когда собственная ось времени совпадает с мировой траекторией второго тела. В этих случаях параметр η меняется в пределах

$$-\xi(t) \le \eta \le 0, \qquad /24/$$

причем $\xi_1(t) = -\xi(t)$, $\xi_2(t) = 0$, $\vec{x}_1(t) = -x(t)$, $\vec{x}_2(t) = \vec{x}(0, t) = 0$, $\vec{p}_1(t) = -\vec{p}(t)$.

К такой же задаче приходим и в случае $m_1 = m = m_2$. Действительно, если две предыдущие поверхности соединить в одну, заставляя параметр η меняться в пределах

$$-\xi(t) \le \eta \le \xi(t), \qquad /25/$$

и если вместе с равенствами /17/ положить

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}(t) = -\vec{x}_1(t), \quad \vec{p}_2(t) = \vec{p}(t) = -\vec{p}_1(t), \quad \xi_2(t) = \xi(t) = -\xi_1(t), \qquad /26/$$

то все условия общей краевой задачи, которые изложены в разделе 1, будут удовлетворены, коль скоро удовлетворятся все условия частной краевой задачи.

Наконец, к частной краевой задаче дело сводится и при произвольных массах m_1, m_2, если тела движутся по прямой либо по окружностям.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Итак, частная краевая задача содержится в формулах /18/, /19/, /20/, /21/, /10/, /22/, /23/. Из этих формул следует, что сохраняются энергия

$$E = p^0(t) + \frac{G}{c^2}\xi(t) \qquad /27/$$

и момент

$$\vec{M} = [\vec{x}(t), \vec{p}(t)] + \frac{G}{c^2}\int_0^{\xi(t)} [\vec{x}(\eta, t), \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta, t)\, d\eta = \qquad /28/$$

$$= \frac{G}{4}\int_0^{\xi(t)} [\vec{B}(t-\frac{\eta}{c}) + \vec{B}(t+\frac{\eta}{c}), \vec{b}(t-\frac{\eta}{c}) + \vec{b}(t+\frac{\eta}{c})]\, d\eta.$$

По аналогии с /12/ рассмотрим функцию

$$\vec{K}(t) = p^0(t)\vec{x}(t) + \frac{G}{c^2}\int_0^{\xi(t)} \vec{x}(\eta, t)\, d\eta. \qquad /29/$$

Нетрудно подсчитать ее производную:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}(t)=\vec{p}(t)+\frac{G}{c^2}\int\limits_0^{\xi(t)}\frac{\partial}{dt}\vec{x}(\eta,t)\,d\eta, \qquad /30/$$

а так как

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta,t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}[\vec{B}(t-\frac{\eta}{c})+\vec{B}(t+\frac{\eta}{c})], \qquad /31/$$

то

$$\dot{\vec{K}}(t)=\frac{d}{dt}\vec{K}(t)=G\vec{B}(t). \qquad /32/$$

Из /32/ и /19/ получаем

$$|\frac{d^2}{dt^2}\vec{K}(t)|=G. \qquad /33/$$

а из /32/, /18/, /20/ и /21/

$$\vec{x}(\eta,t)=\frac{c}{2G}[\dot{\vec{K}}(t-\frac{\eta}{c})-\dot{\vec{K}}(t+\frac{\eta}{c})], \qquad /34/$$

$$\vec{p}(t)=\frac{1}{2}[\dot{\vec{K}}(v(t))+\dot{\vec{K}}(u(t))]. \qquad /35/$$

$$\vec{x}(t)=\frac{c}{2G}[\dot{\vec{K}}(v(t))-\dot{\vec{K}}(u(t))]. \qquad /36/$$

Далее, нетрудно видеть, что функция /34/ равняется

$$\vec{x}(\eta,t)=-\frac{c^2}{2G}\frac{\partial}{\partial\eta}[\vec{K}(t-\frac{\eta}{c})+\vec{K}(t+\frac{\eta}{c})]. \qquad /37/$$

Подставляя это выражение в /29/, получаем

$$p^0(t)\vec{x}(t)=\frac{1}{2}[\vec{K}(v(t))+\vec{K}(u(t))]. \qquad /38/$$

Из /36/ и /38/ следует дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом для функции $\vec{K}(t)$:

$$\frac{cp^0(t)}{2}[\dot{\vec{K}}(v(t))-\dot{\vec{K}}(u(t))]=\frac{G}{2}[\vec{K}(v(t))+\vec{K}(u(t))]. \qquad /39/$$

Остается подставить сюда одно из следующих трех выражений для функции $p^0(t)$.

4. ТРИ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ $p^0(t)$

Первое выражение для функции $p^0(t)$ дает закон сохранения энергии /27/. Второе получаем, подставляя в формулу

$$p^0=\sqrt{m^2+\frac{\vec{p}^{\,2}}{c^2}}$$

функцию /35/:

$$p^0(t)=\sqrt{m^2+\frac{1}{4c^2}[\dot{\vec{K}}(v(t))+\dot{\vec{K}}(u(t))]^2}. \qquad /40/$$

К третьему приходим, подставляя в формулу

$$p^0p^0[1-\frac{1}{c^2}(\frac{d\vec{x}}{dt})^2]=m^2$$

функцию /36/ и пользуясь условием /33/:

$$p^0(t)\,p^0(t)\,\dot{u}(t)\,\dot{v}(t)\,\frac{G^2+\ddot{\vec{K}}(u(t))\ddot{\vec{K}}(v(t))}{2G^2}=m. \qquad /41/$$

Уравнение /39/ надо рассматривать вместе с условием /33/ и со всеми тремя указанными здесь выражениями для функции $p^0(t)$. Таким образом, получаем систему уравнений для определения функций $\vec{K}(t)$ и $\xi(t)$. Если обычно в дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом отклонение задается заранее /5/, то в нашем случае оно наряду с другими является искомой величиной.

5. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

В нерелятивистском пределе $c\to\infty$ оба выражения /40/ и /41/ сводятся к

$$p^0(t)=m, \qquad /42/$$

а уравнение /39/ переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-m\xi(t)\ddot{\vec{K}}(t)=G\vec{K}(t). \qquad /43/$$

Так как условие /33/ сохраняется, то, согласно /43/,

$$m\xi(t)=|\vec{K}(t)|. \qquad /44/$$

Подставляя /44/ в /43/, приходим к уравнению Ньютона /3/. Это и естественно, поскольку, согласно /29/ и /42/, в нерелятивистском пределе

$$\vec{K}(t) = m\vec{x}(t). \qquad /45/$$

Что касается выражения /27/, то и в нерелятивистском пределе оно представляет закон сохранения энергии, а именно:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 + G|\vec{x}| = e, \qquad /46/$$

где

$$e = \lim_{c\to\infty} c^2(E - m). \qquad /47/$$

Отметим, что в нерелятивистском случае собственная ось времени всегда лежит на минимальной поверхности.

В заключение заметим, что представление о взаимодействии элементарных частиц путем обмена носителями 4-вектора энергии-импульса развивалось ранее К.П.Станюковичем [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.42, №1, с.59-70.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.43, №3, с.356-366.
3. Черников Н.А., Шавохина Н.С. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Энергоатомиздат, М., 1984, вып.14, с.113-119.
4. Синг Дж.Л. Классическая динамика. Физматгиз, М., 1963, 448 с.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. "Наука", М., 1971.
6. Станюкович К.П. Гравитационное поле и элементарные частицы. "Наука", М., 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1985 года.

Шавохина Н.С. P2-85-183
Релятивистская система двух тел
с собственной осью времени на поверхности взаимодействия

В релятивистской задаче двух тел с постоянной по модулю силой взаимодействия рассмотрен случай, когда собственная ось времени лежит на поверхности взаимодействия. Получена система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, в которой искомой величиной наряду с другими является и само отклонение аргумента.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Shavokhina N.S. P2-85-183
Relativistic System of Two Bodies
with Proper Time Axis on the Interaction Surface

In the relativistic problem of two bodies with a modulo constant interaction force the case is considered, when the proper time axis lies on the interaction surface. A system of differential equations with a deviating argument is derived, in which the searched quantity also is the very deviation of the argument.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985