85-141

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-141

Л.Г.Мардоян*, Г.С.Погосян*, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян*

ИЗОТРОПНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР: СФЕРОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

* Ереванский государственный университет

1985

ВВЕДЕНИЕ

Известно[1], что уравнение Шредингера для изотропного осциллятора /ИО/ допускает разделение переменных в восьми ортогональных системах координат: декартовой, полярной цилиндрической, сферической, эллиптической цилиндрической, вытянутой сфероидальной, сплюснутой сфероидальной, сфероконической и эллипсоидальной. Первые три типа решений изучены досконально и приводятся во многих руководствах по квантовой механике [2,3], в эллиптических цилиндрических координатах задача об ИО решена в работах [4-6], остальные решения еще не рассматривались. Перечисленные выше решения важны по нескольким причинам. Во-первых, каждый из базисов* соответствует определенному набору сохраняющихся величин [7]; во-вторых, знание базисов конкретизирует связь скрытой симметрии с разделением переменных [8]; наконец, расширяются возможности решения многих практических задач, в которых невозмущенной системой является ИО, а возмущение таково, что полная задача допускает разделение переменных в одной из указанных выше восьми систем координат.

В настоящей статье решена задача об ИО в вытянутых и сплюснутых сфероидальных координатах. Статья построена следующим образом. В §1 даются некоторые формулы, относящиеся к вытянутым и сплюснутым сфероидальным координатам. В §2 строится вытянутый сфероидальный базис ИО. Соотношения ортогональности рассматриваются в §3. Вытянутые и сплюснутые сфероидальные координаты в пределе $R\to 0$ и $R\to\infty$ /R - размерный параметр, входящий в определение вытянутых и сплюснутых сфероидальных координат/ переходят в сферические и полярные цилиндрические [9]. В §4 и §5 исследуются эти пределы и показывается, что вытянутый сфероидальный базис ИО содержит в себе в качестве пределов сферический и полярный цилиндрический базисы. В §6 приводятся результаты, касающиеся сплюснутого сфероидального базиса ИО. В §7 дан явный вид как вытянутого, так и сплюснутого сфероидального базиса ИО для некоторых малых значений квантовых чисел.

---

*Под базисом ниже понимается решение уравнения Шредингера методом разделения переменных в любой из указанных в тексте восьми систем координат.

§2. ВЫТЯНУТЫЙ СФЕРОИДАЛЬНЫЙ БАЗИС ИО

В вытянутых сфероидальных координатах ξ, η, ϕ разделение переменных

$$\psi(\xi,\eta,\phi;R) = N(R)\,X(\xi;R)\,Y(\eta;R)\,\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad /2.1/$$

приводит к уравнениям

$$\frac{d}{d\xi}\{(\xi^2-1)\frac{dX}{d\xi}\} + [b^2\xi^2 - \frac{m^2}{\xi^2-1} - c^2\xi^2(\xi^2-1) - A(R^2)]\,X = 0, \qquad /2.2а/$$

$$\frac{d}{d\eta}\{(1-\eta^2)\frac{dY}{d\eta}\} + [-b^2\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2} + c^2\eta^2(\eta^2-1) + A(R^2)]\,Y = 0, \qquad /2.2б/$$

в которых приняты обозначения / $A(R^2)$ - константа разделения/

$$b^2 = \frac{E}{h\omega}\,\frac{a^2R^2}{2}, \qquad c^2 = \frac{a^4R^4}{16}, \qquad a = (\frac{M\omega}{h})^{1/2}. \qquad /2.2в/$$

Объединяя /2.2а/ и /2.2б/ в уравнение $(-\infty < x < \infty)$

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{dU}{dx}\} + [A(R^2) - \frac{m^2}{1-x^2} - b^2x^2 - c^2x^2(1-x^2)]\,U = 0, \qquad /2.3/$$

учитывая инвариантность /2.3/ относительно инверсии $x \to -x$, выделяя особые точки $x = \pm 1$ и $x = \infty$ и пользуясь процедурой исследования сходимости рядов, предложенной в работе /10/, можно показать, что вытянутый сфероидальный базис ИО определяется формулами

$$Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c,R;\eta) = e^{-\frac{c}{2}\eta^2}(1-\eta^2)^{\frac{|m|}{2}}\,f^{(\pm)}_{nqm}(b,c,R;\eta), \qquad /2.4а/$$

$$X^{(\pm)}_{nkm}(b,c,R;\xi) = e^{-\frac{c}{2}(\xi^2-1)}(\xi^2-1)^{\frac{|m|}{2}}\,f^{(\pm)}_{nkm}(b,c,R;\xi), \qquad /2.4б/$$

в которых

$$f^{(+)}_{nqm}(b,c,R;x) = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} a_{2s}(c)\,x^{2s}, \qquad /2.5а/$$

$$f^{(-)}_{nqm}(b,c,R;x) = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|-1}{2}} a_{2s+1}(c)\,x^{2s+1}. \qquad /2.5б/$$

Коэффициенты a_s удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\alpha_s a_{s+2} + \beta_s a_s + \gamma_s a_{s-2} = 0, \qquad /2.6/$$

$$\alpha_s = -(s+1)(s+2), \qquad /2.6а/$$

$$\beta_s = (s+|m|)(s+|m|+1) + 2cS - A'(c), \qquad /2.6б/$$

$$\gamma_s = 2c(n-|m|-s+2), \qquad /2.6в/$$

$$A'(c) = A(c) - c \qquad /2.6г/$$

и условиям $a_{-1} = a_{-2} = 0$, $a_0 = a_1 = 1$, а q и k - целые числа, нумерующие собственные значения константы разделения и равные числу нулей функций /2.4а/ и /2.4б/. Квантовые числа q и k связаны линейным образом:

$$n - |m| - q = 2k. \qquad /2.7/$$

Здесь n - целое число / $n = 0,1,2,\ldots$/, определяющее энергетический спектр $(E = \hbar\omega(n+3/2))$. Доказательство связи /2.7/ таково. Разность $n-|m|$ равна числу нулей полиномов /2.5а/ и /2.5б/ на оси $(-\infty,\infty)$, q равно числу нулей тех же полиномов на отрезке $[-1,1]$. Число нулей в областях $(-\infty,-1]$ и $[1,\infty)$ одинаково /определенная симметрия относительно инверсии $x \to -x$/, и поэтому оно равно $(n-|m|-q)/2$.

Собственные значения константы разделения $A(c)$ и явный вид коэффициентов a_s определяются из системы однородных уравнений /2.6/. Уравнения на константы $A^{(\pm)}(c)$, соответствующие решениям /2.4а/ и /2.4б/, имеют вид

$$D^{(\pm)} = \det\begin{vmatrix} \beta_0\alpha_0 & & \\ \gamma_2\,\beta_2\alpha_2 & & \\ \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & & \\ & & \gamma_{2N}\,\beta_{2N} \end{vmatrix} = 0, \quad 2N = n - |m|, \qquad /2.8а/$$

$$D \equiv \det\begin{vmatrix} \beta_1\alpha_1 & & \\ \gamma_3\,\beta_3\alpha_3 & & \\ \cdots\cdots & & \\ & & \gamma_{2N+1}\,\beta_{2N+1} \end{vmatrix} = 0, \quad 2N+1 = n - |m|, \qquad /2.8б/$$

Таким образом, вытянутый сфероидальный базис ИО определяется формулами

$$\psi^{(\pm)}_{nqm}(\xi,\eta,\phi;c) = N^{(\pm)}_{nqm}(c) X^{(\pm)}_{nkm}(\xi;c) Y^{(\pm)}_{nqm}(\eta;c) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} . \qquad /2.9/$$

§3. СООТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Обсудим несколько общих результатов, касающихся уравнения /2.3/ и его решений.

3.1. Уравнение /2.3/ является довольно общим. Легко убедиться, что:

а/ в пределе $\alpha \to 0$ /2.3/ переходит в уравнение, получающееся из уравнения Гельмгольца путем разделения переменных в вытянутых сфероидальных координатах;

б/ в пределе $R \to 0$ $(x = \eta \to \cos\theta)$ /2.3/ переходит в уравнение Лежандра;

в/ в пределах $R \to 0$ $(x = \xi \to \frac{2r}{R})$ и $R \to \infty$ $(x = \xi \to 1 + \frac{2\rho^2}{R^2})$ /2.3/ переходит в уравнение Лаггера;

г/ в пределе $R \to \infty$ $(x = \eta \to \frac{2z}{R})$ /2.3/ переходит в уравнение Эрмита.

3.2. Запишем уравнение /2.3/ для разных квантовых чисел и различных значений входящих в него параметров /при данном n /

$$\left\{ \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \left[A_{nqm} - \frac{m^2}{1-x^2} - b^2x^2 - c^2x^2(1-x^2)\right]\right\} U_{nqm}(b,c,x) = 0 ,$$

$$\left\{ \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - \left[A_{nq'm'} - \frac{m'^2}{1-x^2} - b'^2 - c'^2x^2(1-x^2)\right]\right\} U_{nq'm'}(b',c',x) = 0 .$$

Умножая первое из этих уравнений на $U_{q'm'}(b',c',x)$, второе - на $U_{qm}(b,c,x)$, вычитая полученные результаты друг из друга и интегрируя в пределах (a,d), таких, что $U_{qm}(b,c;d) = U_{qm}(b,c;a) = 0$, получим

$$(A_{nqm} - A_{nq'm'}) \int_a^d U_{nqm}(b,c;x)\, U_{nq'm'}(b',c';x)\, dx = \qquad /3.1/$$

$$= \int_a^d \left\{ \frac{m^2 - m'^2}{1-x^2} - (b^2 - b'^2)x^2 - (c^2 - c'^2)x^2(1-x^2)\right\} U_{nqm}(b,c,x) U_{nq'm'}(b',c',x)\, dx .$$

Из /3.1/ в частных случаях имеем следующие соотношения ортогональности:

$$\int_1^\infty X^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x) X^{(\pm)}_{nq'm}(b,c;x)\, dx = \int_{-1}^1 Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x) Y^{(\pm)}_{nq'm}(b,c;x)\, dx = 0 ,$$

$$\int_1^\infty X^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x) X^{(\pm)}_{nqm'}(b,c;x) \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-1}^1 Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x) Y^{(\pm)}_{nqm'}(b,c;x) \frac{dx}{1-x^2} = 0 ,$$

$$\int_1^\infty X^{(\pm)}_{nqm}(b,c,x) X^{(\pm)}_{nqm}(b',c',x) x^2 dx = \int_{-1}^1 Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c,x) Y^{(\pm)}_{nqm}(b',c,x) x^2 dx = 0 ,$$

$$\int_1^\infty X^{(\pm)}_{nqm}(b,c,x) X^{(\pm)}_{nqm}(b,c',x) x^2 (1-x^2)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^1 Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c,x)\, Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c',x)\, x^2(1-x^2)\, dx = 0 .$$

3.3. Рассматривая в условии /3.1/ пределы $c \to c'$, $b \to b'$ и $m \to m'$, легко доказать тождества:

$$\int_{-1}^1 [Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x)]^2 x^2(1-x^2)\, dx = \frac{1}{2c} \frac{\partial A^{(\pm)}_{nqm}(b,c;R^2)}{\partial c} \int_{-1}^1 [Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x)]^2 dx ,$$

$$\int_{-1}^1 [Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x)]^2 x^2 dx = \frac{1}{2b} \frac{\partial A^{(\pm)}(b,c;R^2)}{\partial b} \int_{-1}^1 [Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c;x)]^2 dx ,$$

$$\int_{-1}^1 [Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c,x)]^2 \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2m} \frac{\partial A^{(\pm)}_{nqm}(b,c,R^2)}{\partial m} \int_{-1}^1 [Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c,x)]^2 dx .$$

Эти тождества говорят о том, что собственные значения констант $A^{(\pm)}_{nqm}(b,c,R^2)$ являются монотонно возрастающими функциями параметров b, c и m. Заметим также, что, согласно осцилляционной теореме, с увеличением числа нулей q функций $Y^{(\pm)}_{nqm}(b,c;\eta)$ растут собственные значения констант $A^{(\pm)}_{nqm}(b,c,R^2)$, т.е.

$$A^{(\pm)}_{nqm}(b,c,R^2) < A_{n,q+1,m}(b,c,R^2) .$$

§4. СФЕРИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Исследуем поведение вытянутого сфероидального базиса ИО /2.9/ в пределе $R \to 0$. Исходным пунктом служат уравнения /2.8а/ и /2.8б/, определяющие собственные значения константы разделения $A(c)$. При $R \to 0$ матрицы в /2.8а/ и /2.8б/ упрощаются, а сами условия /2.8а/ и /2.8б/ принимают вид

$$A_q^{(\pm)}(c) \xrightarrow{R\to 0} (q+|m|)(q+|m|+1) \equiv \ell(\ell+1)$$

и

$$\beta_{2s}(R) \xrightarrow{R\to 0} (2s-\ell+|m|)(2s+\ell+|m|+1) \equiv \beta_{2s,\ell-|m|}, \qquad /4.1/$$

$$s = 0, 1, \dots \frac{n-|m|}{2}, \qquad (\ell-|m|) \text{ - четно}$$

$$\beta_{2s+1}(R) \xrightarrow{R\to 0} (2s+1-\ell+|m|)(2s+2+\ell+|m|) \equiv \beta_{2s+1,\ell-|m|}, \qquad /4.2/$$

$$s = 0, 1, \dots \frac{n-|m|-1}{2}, \qquad (\ell-|m|) \text{ - нечетно.}$$

Предел $R\to 0$ в рекуррентных соотношениях /2.6/ обладает следующей особенностью: при $2s=\ell-|m|$ и $2s=\ell-|m|-1$ средний коэффициент β_s обращается в нуль и в нем нужно учитывать члены порядка R^2. Однако учет таких членов затруднителен - детерминанты в общем случае аналитически не вычисляются. Проблему можно обойти, если раскручивать рекуррентные соотношения с "двух сторон" - $s=0$ и с $s=\frac{n-|m|}{2}$, $s=\frac{n-|m|-1}{2}$ и далее результат сшивать при $2s=\ell-|m|$ и $2s+1=\ell-|m|$. Такая процедура приводит к соотношениям:

$$\alpha_{2s}a_{2s+2}+\beta_{2s,\ell-|m|}a_{2s}=0, \quad 0<s<\frac{\ell-|m|}{2}-1,$$

$$\beta_{2s,\ell-|m|}a_{2s}+\gamma_{2s}a_{2s-2}=0, \quad \frac{\ell-|m|}{2}+1\le s\le\frac{n-|m|}{2}, \qquad /4.3/$$

$$\alpha_{2s+1}a_{2s+3}+\beta_{2s+1,\ell-|m|}a_{2s+1}=0, \quad 0\le s\le\frac{\ell-|m|-1}{2}-1,$$

$$\beta_{2s+1,\ell-|m|}a_{2s+1}+\gamma_{2s+1}a_{2s-1}=0, \quad \frac{\ell-|m|-1}{2}-1\le s\le\frac{n-|m|-1}{2} \qquad /4.4/$$

и условию сшивки

$$\lim_{R\to 0}\frac{dA(c)}{dc}=\frac{(2n+3)[2\ell(\ell+1)-2m^2-1]}{(2\ell-1)(2\ell+3)}. \qquad /4.5/$$

Раскручивая двухчленные рекуррентные соотношения /4.3/ и /4.4/, имеем

$$a_{2s}(0)=\frac{\left(-\frac{\ell-|m|}{2}\right)_s\left(\frac{\ell+|m|+1}{2}\right)_s}{s!\,(1/2)s}, \quad 0\le s\le\frac{\ell-|m|}{2}-1, \qquad /4.6/$$

$$a_{2s+1}(0)=\frac{\left(-\frac{\ell-|m|-1}{2}\right)_s\left(\frac{\ell+|m|+2}{2}\right)_s}{s!\,(3/2)s}, \quad 0\le s\le\frac{\ell-|m|-1}{2}-1, \qquad /4.7/$$

$$a_{\ell-|m|+2k}(c)\xrightarrow{R\to 0}\frac{a_{\ell-|m|}(0)}{k!}\,\frac{\left(-\frac{n-\ell}{2}\right)_k}{(\ell+3/2)_k}\,c^k, \qquad /4.8/$$

причем последний результат справедлив при любой четности числа $\ell-|m|$. Нужно, однако, иметь в виду, что

$$a_{\ell-|m|}(0)=\frac{(-1)^{\frac{\ell-|m|}{2}}(2\ell-1)!!}{(\ell-|m|-1)!!\,(\ell+|m|-1)!!}, \quad \ell-|m| \text{ - четно,}$$

$$a_{\ell-|m|}(0)=\frac{(-1)^{\frac{\ell-|m|-1}{2}}(2\ell-1)!!}{(\ell+|m|)!!\,(\ell-|m|)!!}, \quad \ell-|m| \text{ - нечетно}$$

/последние результаты получаются из /4.6/ и /4.7//. Учет полученных соотношений и формулы /11/

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi)=(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}e^{im\phi}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi(\ell+|m|)!\,(\ell-|m|)!}}(\sin\theta)^{|m|}.$$

$$\begin{cases} (-1)^{\frac{\ell-|m|}{2}}(\ell+|m|-1)!!(\ell-|m|-1)!!\,F\left(-\frac{\ell-|m|}{2},\frac{\ell+|m|+1}{2};\frac{1}{2},\cos^2\theta\right) \\ \qquad\qquad \text{при } \ell-|m| \text{ четном} \\ (-1)^{\frac{\ell-|m|-1}{2}}(\ell+|m|)!!(\ell-|m|)!!\,F\left(-\frac{\ell-|m|-1}{2},\frac{\ell+|m|+1}{2};\frac{3}{2};\cos^2\theta\right) \\ \qquad\qquad \text{при } \ell-|m| \text{ нечетном.} \end{cases}$$

показывает, что если еще иметь в виду условие нормировки

$$\int|\psi_{nqm}^{(\pm)}|^2dv=1, \qquad /4.9/$$

то можно сделать вывод о том, что при $R\to 0$ вытянутый сфероидальный базис ИО /2.9/ переходит в сферический базис ИО:

$$\psi_{nqm}^{(\pm)}(\xi,\eta,\phi;c)\xrightarrow{R\to 0}\psi_{n\ell m}^{(\pm)}(r,\theta,\phi), \quad N_{nqm}^{(\pm)}(c)\xrightarrow{R\to 0}c^{\ell/2}.$$

§5. ПРЕДЕЛ ПОЛЯРНОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрим теперь предел $R\to\infty$.

5.1. В пределе $R\to\infty$ в определителях /2.8а/ и /2.8б/ можно сохранить только члены, пропорциональные R^2, и получить

$$\beta_{2s}(c) \xrightarrow{R\to\infty} 2c(2s-n_3) \equiv \beta_{2s,n_3}, \qquad n_3 \text{ - четно} \qquad /5.1/$$

$$\beta_{2s+1}(c) \xrightarrow{R\to\infty} 2c(2s-n_3-1) \equiv \beta_{2s+1,n_3}, \qquad n_3 \text{ - нечетно}, \qquad /5.2/$$

где n_3 нумерует значения константы $A'(c)$: $A'(c) \xrightarrow{R\to\infty} 2cn_3$.

Как и в §4, рекуррентные соотношения /2.6/ при $R\to\infty$ необходимо раскручивать как "снизу", так и "сверху", а получающиеся результаты сшить при $2s=n_3$ и $2s=n_3+1$. В итоге получаются двухчленные рекуррентные соотношения

$$\alpha_{2s}\, a_{2s+2} + \beta_{2s,n_3}\, a_{2s} = 0, \qquad 0 \le s \le \frac{n_3}{2} - 1, \qquad /5.3/$$

$$\alpha_{2s+1}\, a_{2s+3} + \beta_{2s+1,n_3}\, a_{2s+1} = 0, \qquad 0 \le s \le \frac{n_3-1}{2} - 1, \qquad /5.4/$$

$$\beta_{2s,n_3}\, a_{2s} + \gamma_{2s} a_{2s-2} = 0, \qquad \frac{n_3}{2} + 1 \le s \le \frac{n-|m|}{2}, \qquad /5.5/$$

$$\beta_{2s+1,n_3}\, a_{2s+1} + \gamma_{2s+1} a_{2s-1} = 0, \qquad \frac{n_3-1}{2} + 1 \le s \le \frac{n-|m|-1}{2} \qquad /5.6/$$

и условие сшивки

$$A'(c) \xrightarrow{R\to\infty} (2n_3+1)(n-n_3+1) + m^2 - 1 .$$

Из /5.3/-/5.6/ следует, что

$$a_{2s}(c) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{(-\frac{n_3}{2})_s}{(1/2)_s\, s!}\, c^s, \qquad 0 \le s \le \frac{n_3}{2} - 1,$$

$$a_{2s+1}(c) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{(-\frac{n_3-1}{2})_s}{(3/2)_s\, s!}\, c^s, \qquad 0 \le s \le \frac{n_3-1}{2} - 1,$$

$$a_{n_3+2k}(c) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{(-\frac{n-|m|-n_3}{2})_k}{k!} \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n_3}{2}}\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n_3}{2})}\, c^{\frac{n_3}{2}} & n_3 \text{ - четно}, \\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n_3-1}{2}}\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(\frac{n_3}{2}+1)}\, c^{\frac{n_3-1}{2}} & n_3 \text{ - нечетно}. \end{cases}$$

5.2. Полученные формулы позволяют легко убедиться, что в пределе больших R справедливы соотношения

$$Y^{(+)}_{nqm}(\eta;c) \xrightarrow{R\to\infty} e^{-\frac{\alpha^2 z^2}{2}}\, F(-\frac{n_3}{2};\frac{1}{2};\alpha^2 z^2),$$

$$Y^{(-)}_{nqm}(\eta;c) \xrightarrow{R\to\infty} e^{-\frac{\alpha^2 z^2}{2}}\, \frac{2z}{R}\, F(-\frac{n_3-1}{2};\frac{3}{2};\alpha^2 z^2),$$

и, следовательно, что вытянутый сфероидальный базис при $R\to\infty$ переходит в полярный цилиндрический базис ИО.

5.3. Исследование предела $R\to\infty$ в функциях /2.4б/ осложняется тем, что в этом пределе "хорошей" переменной является не ξ $(\xi \to 1+\frac{2\rho^2}{R^2})$, а выражение ξ^2-1. Перепишем /2.5а/ и /2.5б/ в виде

$$f^{(+)}_{nqm}(\xi;c) = f^{(+)}_{nqm}(\xi=1;c) \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} h_s(c)\,(\xi^2-1)^s, \qquad /5.7/$$

$$f^{(-)}_{nqm}(\xi;c) = f^{(-)}_{nqm}(\xi=1;c)\,\xi \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|-1}{2}} g_s(c)\,(\xi^2-1)^s, \qquad /5.8/$$

считая, что $h_0(c) = g_0(c) = 1$.

Из /5.7/, /5.8/ и уравнения /2.2а/ следуют рекуррентные соотношения

$$\alpha_s h_{s+1} + \beta_s h_s + \gamma_s h_{s-1} = 0, \qquad h_{-1} = 0, \quad h_0 = 1, \qquad /5.9/$$

$$\alpha_s g_{s+1} + \bar\beta_s g_s + \bar\gamma_s g_{s-1} = 0, \qquad g_{-1} = 0, \quad g_0 = 1, \qquad /5.10/$$

$$\alpha_s = 4(s+1)(s+|m|+1),$$

$$\beta_s = (2s+|m|)(2s+|m|+1) + 2c\,(n-|m|-2s) - A'(c),$$

$$\bar\beta_s = (2s+|m|+1)(2s+|m|+2) + 2c\,(n-|m|-2s) - A'(c),$$

$$\gamma_s = 2c\,(n-|m|-2s+2), \qquad \bar\gamma_s = 2c\,(n-|m|-2s+1).$$

После этих предварительных преобразований предельный переход $R\to\infty$ производится точно так, как это делалось в предыдущем пункте 5.2. Пусть $n-|m|$ — четно. Тогда из /5.9/ следуют соотношения

$$\alpha_s h_{s+1} + \beta_s^{(1)} h_s = 0, \quad 0 \le s \le N-1, \qquad /5.11/$$

$$\beta_s^{(1)} h_s + \gamma_s h_{s-1} = 0, \quad N+1 \le s \le \frac{n-|m|}{2}, \qquad /5.12/$$

в которых $N = \frac{n-|m|-n_3}{2}$, $\beta_s^{(1)} = 4c\,(N-s)$.

Раскручивая /5.11/ и /5.12/, имеем

$$h_s(c) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{(-N)_s}{(|m|+1)_s}\,\frac{c^s}{s!}, \quad 0 \le s \le N,$$

$$h_{s+N}(c) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{(-1)^s\,(-n_3/2)_s}{s!}\, h_N, \quad 1 \le s \le \frac{n_3}{2},$$

При нечетном $n-|m|$, действуя аналогично, приходим к двухчленным рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_s g_{s+1} + \beta_s^{(1)} g_s = 0, \quad 0 \le s \le N-1,$$

$$\beta_s^{(1)} g_s + \gamma_s g_{s-1} = 0, \quad N+1 \le s \le \frac{n-|m|-1}{2},$$

из которых получается поведение величины g_s при $R\to\infty$:

$$g_s(c) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{(-N)_s}{(|m|+1)_s}\,\frac{c^s}{s!}, \quad 0 \le s \le N,$$

$$g_{N+s}(c) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{(-1)^s\,\left(-\frac{n_3-1}{2}\right)_s}{s!}\, g_N, \quad 1 \le s \le \frac{n_3-1}{2}.$$

Из полученных формул следует равенство

$$\lim_{R\to\infty} \frac{f^{(\pm)}_{nqm}(\xi;c)}{f^{(\pm)}_{nqm}(\xi=1;c)} = F(-N;\,|m|+1;\,a^2\rho^2),$$

доказывающее, что в пределе $R\to\infty$ вытянутый сфероидальный базис переходит в полярный цилиндрический базис ИО.

§6. СПЛЮСНУТЫЙ СФЕРОИДАЛЬНЫЙ БАЗИС ИО

Сравнение формул /1.1а/ и /1.1б/ показывает, что сплюснутые сфероидальные координаты получаются из вытянутых заменой

$$R \to -iR, \quad \xi \to i\bar{\xi}, \quad c \to -c \equiv p = \frac{a^2\bar{R}^2}{4}. \qquad /6.1/$$

Отсюда следует, что /1.1б/ - это те же вытянутые сфероидальные координаты, но в областях $R\in[0,-i\infty)$, $\xi\in[0,i\infty)$, и потому сплюснутый сфероидальный базис ИО, который мы обозначим $\psi^{(\pm)}_{nqm}(\xi,\eta,\phi;p)$, определяется формулой

$$\psi^{(\pm)}_{nqm}(\xi,\eta,\phi;p) = N^{(\pm)}_{nqm}(p)\, X^{(\pm)}_{nkm}(\xi;p)\, Y^{(\pm)}_{nqm}(\eta;p),$$

где

$$Y^{(\pm)}_{nqm}(\eta;p) = e^{\frac{p}{2}(\eta^2-1)}\,(1-\eta^2)^{\frac{|m|}{2}}\, f^{(\pm)}_{nqm}(\eta;p), \qquad /6.2/$$

$$f^{(+)}_{nqm}(\eta;p) = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} h_s(p)\,(1-\eta^2)^s,$$

$$f^{(-)}_{nqm}(\eta,p) = \eta \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|-1}{2}} g_s(p)(1-\eta^2)^s,$$

$$\alpha_s h_{s+1} + \beta_s h_s + \gamma_s h_{s-1} = 0, \quad h_{-1}=0, \quad h_0 = 1,$$

$$\alpha_s g_{s+1} + \bar{\beta}_s g_s + \bar{\gamma}_s g_{s-1} = 0, \quad g_{-1}=0, \quad g_0 = 1,$$

$$\alpha_s = -4\,(s+1)(s+|m|+1),$$

$$\beta_s = (2s+|m|+1)(2s+|m|) + 4ps - 2p\,(n-|m|) - A'(p),$$

$$\bar{\beta}_s = (2s+|m|+1)(2s+|m|+2) + 4ps - 2p\,(n-|m|) - A'(p),$$

$$\gamma_s = 2p\,(n-|m|+2-2s), \quad \bar{\gamma}_s = 2p\,(n-|m|+1-2s),$$

$$X^{(\pm)}_{nkm}(\xi;p) = e^{-\frac{p}{2}\xi^2}\,(\xi^2+1)^{\frac{|m|}{2}}\, f^{(\pm)}_{nkm}(\xi;p),$$

$$f^{(+)}_{nkm}(\xi;p) = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} a_{2s}(p)\,\xi^{2s},$$

$$f^{(-)}_{nkm}(\xi;p) = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|-1}{2}} a_{2s+1}(p)\,\xi^{2s+1},$$

$$\alpha_s a_{s+2} + \beta_s a_s + \gamma_s a_{s-2} = 0, \quad a_{-2} = a_{-1} = 0, \quad a_0 = a_1 = 0,$$

$$\alpha_s = (s+1)(s+2), \quad \beta_s = (s+|m|)(s+|m|+1) - 2ps - A'(p), \qquad /6.3/$$

$$\gamma_s = 2p\,(n-|m|+2-s), \quad A'(p) = A(p) + p.$$

Собственные значения константы разделения $A(p)$ могут быть найдены из /2.8а/ и /2.8б/, если сделать в них преобразование

/6.1/. Квантовые числа q и k нумеруют число нулей функций /6.2/ и /6.3/ и связаны между собой соотношением /2.7/.

Используя результаты §§4,5, можно показать, что в пределе $R\to 0$ и $R\to\infty$ сплюснутый сфероидальный базис ИО переходит в сферический и полярный цилиндрический.

§7. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Приведем явный вид вытянутого и сплюснутого сфероидального базисов ИО, нормированных условием /4.9/ для $n = 0,1,2,3$.

1/ Вытянутый сфероидальный базис ИО:

$$\psi^{(+)}_{0q0} = a\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}, \quad A'=0,$$

$$\psi^{(-)}_{1q0} = 2a\sqrt{c}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}, \quad A'=2+2c,$$

$$\psi^{(+)}_{1q1} = a\sqrt{2c}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}\left[(\xi^2-1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad A'=2,$$

$$\psi^{(+)}_{2q0} = a\sqrt{3}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\left\{1+2\left(\frac{A'}{A'-6}\right)^2\right\}^{-1/2}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}\times$$

$$\times\left(1-\frac{A'}{2}\eta^2\right)\left(1+\frac{A'-4c}{4}(\xi^2-1)\right), \quad A'(A'-6)=4c(A'-2),$$

$$\psi^{(-)}_{2q1} = 2ac\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}\left[(\xi^2-1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\xi\eta\times\frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$A'=6+2c,$$

$$\psi^{(+)}_{2q2} = ac\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}(\xi^2-1)(1-\eta^2)\frac{e^{\pm 2i\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad A'=6,$$

$$\psi^{(-)}_{3q0} = a\sqrt{10c}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}\cdot\left\{1+\frac{2}{3}\left[\frac{A'-2-2c}{A'-12-2c}\right]^2\right\}^{-1/2}\times$$

$$\times\xi\eta\left\{1-\frac{A'-2-2c}{6}\eta^2\right\}\left\{1+\frac{A'-2-6c}{4}(\xi^2-1)\right\},$$

$$(A'-2)(A'-12)=4c(2A'-15)-12c^2,$$

$$\psi^{(+)}_{3q1} = a\sqrt{5c}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\left[1+4\left(\frac{A'-2}{A'-12}\right)^2\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}\left[(\xi^2-1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left\{1-\frac{A'-2}{2}\eta^2\right\}\left\{1+\frac{A'-2-4c}{8}(\xi^2-1)\right\}\frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$(A'-2)(A'-12)=4c(A'-4),$$

$$\psi^{(-)}_{3q2} = a\sqrt{2c^3}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}(\xi^2-1)(1-\eta^2)\frac{e^{\pm 2i\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad A'=12+2c,$$

$$\psi^{(+)}_{3q3} = a\sqrt{\frac{c^3}{3}}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{c}{2}(\xi^2+\eta^2-1)\right\}\left[(\xi^2-1)(1-\eta^2)\right]^{3/2}\frac{e^{\pm 3i\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$A'=12.$$

2/ сплюснутый сфероидальный базис ИО:

$$\psi^{(+)}_{0q0} = a\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}, \quad A'=0,$$

$$\psi^{(-)}_{1q0} = 2a\sqrt{p}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}, \quad A'=2-2p,$$

$$\psi^{(+)}_{1q1} = a\sqrt{2p}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}\frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[(\xi^2+1)(1+\eta^2)\right]^{1/2}, \quad A'=2,$$

$$\psi^{(+)}_{2q0} = a\sqrt{3}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\left\{1+2\left(\frac{A'}{A'-6}\right)^2\right\}^{-1/2}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}\times$$

$$\times\left[1-\frac{A'-4c}{4}(1-\eta^2)\right]\left[1+\frac{A'}{2}\xi^2\right], \quad A'(A'-6)=4p(2-A'),$$

$$\psi^{(-)}_{2q1} = 2ap\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}\left[(\xi^2+1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\xi\eta\frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad A'=6-2p,$$

$$\psi^{(+)}_{2q2} = ap\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\left\{(1+\xi^2)(1-\eta^2)\right\}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}\frac{e^{\pm 2i\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad A'=6,$$

$$\psi^{(-)}_{3q0} = a\sqrt{10p}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\left\{1+2\left[\frac{A'-2-2p}{A'-12+2p}\right]^2\right\}^{-1/2}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}\times$$

$$\times\xi\eta\left[1+\frac{A'-2+2p}{6}\xi^2\right]\left[1-\frac{A'-2+6p}{4}(1-\eta^2)\right],$$

$$(A'-2)(A'-12)=4p(15-2A')-12p^2,$$

$$\psi^{(+)}_{3q1} = a\sqrt{5p}\left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\left[1+4\left(\frac{A'-2}{A'-12}\right)^2\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}\times$$

$$\times\left[(\xi^2+1)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\left[1-\frac{A'-2+4p}{8}\right]\left[1+\frac{A'-2}{2}\xi^2\right]\frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$(A' - 2)(A' - 12) = 4p(4 - A'),$$

$$\psi^{(-)}_{3q2} = \alpha\sqrt{2p^3}\,\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}(\xi^2+1)(1-\eta^2)\,\frac{e^{\pm 2i\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$A' = 12 - 2p,$$

$$\psi^{(+)}_{3q3} = \alpha\sqrt{\frac{p^3}{3}}\,\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{p}{2}(\xi^2-\eta^2+1)\right\}[(\xi^2+1)(1-\eta^2)]^{3/2} \times$$

$$\times\frac{e^{\pm 3i\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad A' = 12.$$

В заключение выражаем искреннюю благодарность С.И.Виницкому, А.В.Матвеенко, Л.И.Пономареву, Г.С.Саакяну и Я.А.Смородинскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смородинский Я.А. и др. ЯФ, 1968, 7, с.625.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1974.
3. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. "Мир", М., 1977, т.1.
4. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-84-211, Дубна, 1984.
5. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Е2-84-517, Дубна, 1984.
6. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-84-526, Дубна, 1984.
7. Попов В.С. В сб.: Физика высоких энергий и элементарных частиц. "Наукова думка", Киев, 1967.
8. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. "Мир", М., 1981.
9. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976.
10. Coulson C.A., Robinson P.D. Proc.Phys.Soc.London, 1958, 71, p.815.
11. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1985 года.

Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М. Р2-85-141

Найдены решения уравнения Шредингера для изотропного осциллятора /ИО/ в вытянутых и сплюснутых сфероидальных координатах. Показано, что полученные решения переходят при $R \to 0$ и $R \to \infty$ /R - размерный параметр, входящий в определение вытянутых и сплюснутых сфероидальных координат/ соответственно в сферические и цилиндрические базисы ИО. Дан явный вид как для вытянутого, так и сплюснутого базиса ИО для низших квантовых состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Mardoyan L.G., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M. P2-85-141

Solutions of the Schrödinger equation are found for an isotropic oscillator (IO) in prolate and oblate spheroidal coordinates. It is shown that the obtained solutions turn into spherical and cylindrical bases of the isotropic oscillator at $R \to 0$ and $R \to \infty$ (R is the dimensional parameter entering into the definition of prolate and oblate spheroidal coordinates). The explicit form is given for both prolate and oblate basis of the isotropic oscillator for the lowest quantum states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985