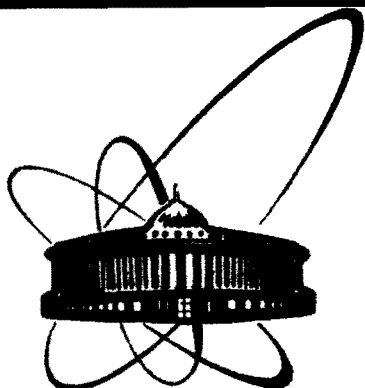


85-140



**сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна**

P2-85-140

Л.Г.Мардоян\*, Г.С.Погосян\*, А.Н.Сисакян,  
В.М.Тер-Антонян\*

ИЗОТРОПНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР:  
РАЗЛОЖЕНИЕ СФЕРОИДАЛЬНОГО БАЗИСА  
ПО СФЕРИЧЕСКОМУ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОМУ

---

\* Ереванский государственный университет

1. Известно, что методом разделения переменных уравнение Шредингера для потенциала изотропного осциллятора /и.о./ решается в декартовой, полярной цилиндрической, сферической<sup>/1/</sup>, эллиптической, цилиндрической<sup>/2-3/</sup>, вытянутой и сплюснутой сфероидальных<sup>/4/</sup> системах координат. Взаимные разложения между решениями /базисами/ в декартовой, полярной цилиндрической и сферической системах координат рассматривались в работах<sup>/5-8/</sup>.

Цель настоящей статьи получить преобразования, связывающие между собой полярный цилиндрический, сферический и вытянутый сфероидальные базисы и.о.

2. Рассмотрим сначала разложение цилиндрического базиса и.о. по сферическому. Разобьем оба базиса на подбазисы с данной четностью относительно преобразования  $z \rightarrow -z$  и запишем связь между ними в виде

$$\psi_{n m n_3}(\rho, \phi, z) = \sum_{\ell = |m|, |m|+1}^n W_{n \ell m}^{n_3(\pm)} \psi_{n \ell m}(r, \theta, \phi). \quad /1/$$

Информация о подбазисах дается формулами

$$\psi_{n \ell m}^{(\pm)}(z, \theta, \phi) = R_{n \ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad /2a/$$

$$R_{n \ell}(r) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{2\alpha}{(2\ell + 1)!!} \sqrt{\frac{2^\ell (n + \ell + 1)!!}{(n - \ell)!!}} (\alpha r)^\ell e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}}. \quad /2b/$$

$$\cdot F\left(-\frac{n - \ell}{2}; \ell + \frac{3}{2}; \alpha^2 r^2\right),$$

$$\psi_{n m n_3}^{(\pm)}(\rho, \phi, z) = F_{n m n_3}(\alpha \rho) \bar{H}_{n_3}(\alpha z) \frac{e^{i m \phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad /3a/$$

$$F_{n m n_3}(\alpha \rho) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{|m|!} \sqrt{\frac{(\frac{n + |m| - n_3}{2})!}{(\frac{n - |m| - n_3}{2})!}} (\alpha \rho)^{|m|} e^{-\frac{\alpha^2 \rho^2}{2}}. \quad /3b/$$

$$\cdot F\left(-\frac{n - |m| - n_3}{2}; |m| + 1; \alpha^2 \rho^2\right).$$

Квантовые числа  $\ell$  и  $n_3$  при фиксированных  $n, |m|$  для четных (нечетных) подбазисов пробегает соответственно значения  $|m|, |m| + 2, \dots, n-2, n(|m|+1, |m|+3, \dots, n-2, n)$  и  $0, 2, \dots, n-|m| (1, 3, \dots, n-|m|)$ . спектр энергий определяется формулой  $E = \hbar\omega(n+3/2), n=0, 1, \dots$ ,

а параметр  $\alpha = (\frac{M\omega}{\hbar})^{1/2}$ . Ортонормированные полиномы Эрмита  $\bar{H}_{n_3}(\alpha z)$

и сферические функции  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  в зависимости от четности  $n_3$  и  $\ell-|m|$  разбиваются на два выражения\*

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi(\ell+|m|)!(\ell-|m|)!}} (\sin\theta)^{|m|} e^{im\phi} \cdot \begin{cases} (-1)^{\frac{\ell-|m|}{2}} (\ell+|m|-1)!!(\ell-|m|-1)!! F(-\frac{\ell-|m|}{2}; \frac{\ell+|m|+1}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2\theta), \\ \text{при } \ell-|m| - \text{четном,} \\ (-1)^{\frac{\ell-|m|-1}{2}} (\ell+|m|)!!(\ell-|m|)!! \cos\theta F(-\frac{\ell-|m|-1}{2}; \frac{\ell+|m|+2}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2\theta), \\ \text{при } \ell-|m| - \text{нечетном,} \end{cases}$$

$$\bar{H}_{n_3}(\alpha z) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{(n_3)!}{2^{n_3}}} e^{-\frac{\alpha^2 z^2}{2}} \cdot \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n_3}{2}}}{(n_3/2)!} F(-\frac{n_3}{2}; \frac{1}{2}; \alpha^2 z^2), & n_3 - \text{четное,} \\ \frac{(-1)^{\frac{n_3-1}{2}}}{[(n_3-1)/2]!} 2\alpha z F(-\frac{n_3-1}{2}; \frac{3}{2}; \alpha^2 z^2), & n_3 - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Начнем с четного разложения. Перейдем от цилиндрических координат к сферическим, согласно

$$\rho = r \sin\theta, \quad z = r \cos\theta, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

устремим в обеих частях разложения /1/  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и воспользуемся идущей и.о. ортогональностью радиальных волновых функций /10/:

$$\int_0^\infty R_{n\ell}(r) R_{n'\ell'}(r) dr = \frac{2\alpha^2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad /4/$$

\* Функции  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  отличаются от приведенных в монографии /9/ фазорым множителем  $(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}$ .

Это позволяет записать коэффициенты разложения в виде интеграла и после использования формулы /11/

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} F(a; b; x) F(c; d; x) dx = \frac{\Gamma(d)\Gamma(\nu)\Gamma(d-c-\nu)}{\Gamma(d-c)\Gamma(d-\nu)} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a, \nu, 1+\nu-d \\ b, 1+\nu+c-d \end{matrix} \middle| 1 \right\} /5/$$

получить

$$W_{n\ell m}^{n_3(+)} = \frac{(-1)^{\frac{\ell-|m|-n_3}{2}} (n-|m|)!!}{(2|m|)!!} \frac{(n-|m|)!!}{(n_3)!!} \left\{ \frac{(n+|m|-n_3)!!(\ell+|m|)!(n_3)!(2\ell+1)}{(n-\ell)!!(n+\ell+1)!!(\ell-|m|)!(n-|m|-n_3)!} \right\}^{1/2} \cdot {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\frac{n-|m|-n_3}{2}, -\frac{\ell-|m|}{2}, \frac{\ell+|m|+1}{2} \\ |m|+1, -\frac{n-|m|}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right\} \quad /6/$$

Коэффициенты нечетного разложения вычисляются аналогично, с той лишь разницей, что перед тем как положить  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , разделим разложение /1/ с обеих сторон на  $\cos\theta$ . Окончательный результат таков:

$$W_{n\ell m}^{n_3(-)} = \frac{(-1)^{\frac{\ell-|m|-n_3}{2}} (n-|m|-1)!!}{(2|m|)!!} \frac{(n+|m|-n_3)!!(\ell+|m|)!(n_3)!(2\ell+1)}{(n-|m|-n_3)!!(\ell-|m|)!(n-\ell)!!(n+\ell+1)!!} \cdot {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\frac{n-|m|-n_3}{2}, -\frac{\ell-|m|-1}{2}, \frac{\ell+|m|}{2}+1 \\ |m|+1, -\frac{n-|m|-1}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right\} \quad /7/$$

Формулы /6/ и /7/ можно записать в одном и том же виде. Действительно, четырехкратно применяя тождество /12/

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a, a', -N \\ c', 1-N-c \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{\Gamma(c+a+N)\Gamma(c)}{\Gamma(c+a)\Gamma(c+N)} \cdot {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a, c'-a', -N \\ c', c+a \end{matrix} \middle| 1 \right\} \quad /8/$$

к соотношению /6/ и /7/, получим

Таблица 1

$n$	$m$	$\ell$	$n_3$	$W_{n\ell m}^{n_3}$
0	0	0	0	1,00000000
1	0	1	1	1,00000000
1	1	1	0	1,00000000
2	0	0	0	0,81649657
2	0	0	2	-0,57735026
2	0	2	0	0,57735026
2	0	2	2	0,81649657
2	1	2	1	1,00000000
2	2	2	0	1,00000000
3	0	1	1	0,63245553
3	0	1	3	-0,77459666
3	0	3	1	0,77459666
3	0	3	3	0,63245553
3	1	1	0	0,89442719
3	1	1	2	-0,44721359
3	1	3	0	0,44721359
3	1	3	2	0,89442719
3	2	3	1	1,00000000
3	3	3	0	1,00000000

$$W_{n\ell m}^{n_3(\pm)} = \left\{ \frac{(2\ell+1)(\ell+|m|)!(\ell-|m|)!(n-|m|-n_3)!(n+|m|-n_3)!}{(n+\ell+1)!(n-\ell)!(n_3)!} \right\}^{1/2}$$

$$\cdot \frac{2^{n_3-\ell}}{\Gamma\left(\frac{\ell+|m|-n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\ell-|m|-n_3}{2}+1\right)} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\frac{n-\ell}{2}, -\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2} \\ \frac{\ell+|m|-n_3}{2}+1, \frac{\ell-|m|-n_3}{2}+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}$$

Этот результат использован для вычисления значений  $W_{n\ell m}^{n_3(\pm)}$ , приведенных в табл.1.

3. Вытянутые сфероидальные координаты связаны со сферическими следующим образом:

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4r^2}{R^2} + \frac{4z}{R}} + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{R^2} - \frac{4z}{R}} \right\},$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4r^2}{R^2} + \frac{4z}{R}} - \sqrt{1 + \frac{4r^2}{R^2} - \frac{4z}{R}} \right\}.$$

Они изменяются в пределах  $1 \leq \xi < \infty, -1 \leq \eta \leq 1$  ( $R \geq 0$ ). Подбазисы с разной четностью относительно преобразования  $\eta \rightarrow -\eta$  даются выражениями <sup>14/</sup>

$$\psi_{n\ell m}^{(\pm)}(\xi, \eta, \phi; c) = N_{n\ell m}^{(\pm)}(c) X_{n\ell m}^{(\pm)}(\xi; c) Y_{n\ell m}^{(\pm)}(\eta; c) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$X_{n\ell m}^{(+)}(\xi; c) = e^{-\frac{c}{2}(\xi^2-1)} \frac{|m|}{(\xi^2-1)^2} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} h_s(c) (\xi^2-1)^s, \quad /9a/$$

$$X_{n\ell m}^{(-)}(\xi; c) = e^{-\frac{c}{2}(\xi^2-1)} \frac{|m|}{(\xi^2-1)^2} \xi \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|-1}{2}} g_s(c) (\xi^2-1)^s, \quad /9б/$$

$$Y_{n\ell m}^{(+)}(\eta; c) = e^{-\frac{c}{2}\eta^2} \frac{|m|}{(1-\eta^2)^2} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} a_{2s}(c) \eta^{2s}, \quad /9в/$$

$$Y_{n\ell m}^{(-)}(\eta; c) = e^{-\frac{c}{2}\eta^2} \frac{|m|}{(1-\eta^2)^2} \eta \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|-1}{2}} a_{2s+1}(c) \eta^{2s}. \quad /9г/$$

Коэффициенты  $a_s(c)$ ,  $h_s(c)$  и  $g_s(c)$  определяются трехчленными рекуррентными соотношениями:

$$-(s+1)(s+2) a_{s+2} + \beta_s a_s + 2c(n-|m|+2-s) a_{s-2} = 0, \quad /10а/$$

$$a_{-2} = a_{-1} = 0, \quad a_0 = a_1 = 1,$$

$$4(s+1)(s+|m|+1)h_{s+1} + \bar{\beta}_s h_s + 2c(n-|m|+2-s)h_{s-1} = 0, \quad /10б/$$

$$4(s+1)(s+|m|+1)g_{s+1} + \bar{\beta}_s g_s + 2c(n-|m|+1-s)g_{s-1} = 0, \quad /10в/$$

$$h_{-1} = g_{-1} = 0, \quad h_0 = g_0 = 1,$$

в которых

$$\beta_s = (s+|m|)(s+|m|+1) + 2c(s + \frac{1}{2}) - A(c),$$

$$\bar{\beta}_s = (2s+|m|)(2s+|m|+1) + 2c(n-|m|-2s + \frac{1}{2}) - A(c),$$

$$\tilde{\beta}_s = (2s+|m|+1)(2s+|m|+2) + 2c(n-|m|-2s + \frac{1}{2}) - A(c), \quad c = \frac{\alpha^2 R^2}{2},$$

и  $A(c)$  — сфероидальная константа разделения, собственные значения которой определяются из условия равенства нулю детерминантов, соответствующих рекуррентным соотношениям /10а/. Квантовое число  $q$  имеет смысл числа нулей угловой функции  $Y_{nqm}^{(\pm)}(\eta; c)$ , причем для четного (нечетного) подбазиса  $q$  пробегает значения  $0, 2, \dots, n-|m|-2, n-|m|$  ( $1, 3, \dots, n-|m|-2, n-|m|$ ). Фаза нормировочной постоянной  $q-1$   $N_{nqm}^{(\pm)}(c)$  выбрана равной  $(-1)^{q/2}$  — для четного подбазиса и  $(-1)^{\frac{q-1}{2}}$  — для нечетного.

Запишем разложения вытянутых сфероидальных подбазисов и.о. по сферическим

$$\psi_{nqm}^{(\pm)}(\xi, \eta, \phi; c) = \sum_{\ell=|m|, |m|+1}^n V_{n\ell m}^{q(\pm)} \psi_{n\ell m}^{(\pm)}(r, \theta, \phi). \quad /11/$$

Вычисление коэффициентов  $V_{n\ell m}^{q(\pm)}(c)$  проводится в полной аналогии с тем, что делалось в пункте 2. Это приводит к формулам

$$V_{n\ell m}^{q(+)}(c) = (-1)^{\frac{\ell-|m|-2}{2}} \frac{(\ell+|m|)!!}{\alpha^2(\ell-|m|-1)!!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}. \quad /12а/$$

$$\int_0^\infty X_{nqm}^{(+)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4r^2}{R^2}}; c \right\} R_n \ell(r) dr,$$

$$V_{n\ell m}^{q(-)}(c) = (-1)^{\frac{\ell-|m|-2}{2}} \frac{(\ell+|m|-1)!!}{\alpha^2(\ell-|m|)!!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}. \quad /12б/$$

$$\int_0^\infty X_{nqm}^{(-)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4r^2}{R^2}}; c \right\} R_n \ell(r) \frac{2r/R}{\sqrt{1 + 4r^2/R^2}} dr.$$

Пользуясь формулами /12а/, /12б/, /2б/ и интегрируя по  $dr$ , получаем

$$V_{n\ell m}^{q(+)}(c) = (-1)^{\ell-|m|-q} \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{c^{\frac{|m|}{2}} (\ell+|m|)!!}{\alpha^2(\ell-|m|-1)!!} |N_{nqm}^{(+)}(c)|.$$

$$\sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} \frac{2^n}{(n-\ell)!!(n+\ell+1)!!} \sum_{s=0}^{\ell-|m|} h_s(c) c^s \frac{\Gamma(\frac{\ell+|m|+1}{2}+s) \Gamma(\frac{n-|m|}{2}+1-s)}{\Gamma(\frac{\ell-|m|}{2}+1-s)}. \quad /13а/$$

$$V_{n\ell m}^{q(-)}(c) = (-1)^{\frac{\ell-|m|-2}{2}} \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{c^{\frac{|m|+1}{2}} (\ell+|m|-1)!!}{\alpha^2(\ell-|m|)!!} |N_{nqm}^{(-)}(c)|,$$

$$\sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} \frac{2^n}{(n-\ell)!!(n+\ell+1)!!} \sum_{s=0}^{\ell-|m|-1} g_s(c) c^s \frac{\Gamma(\frac{\ell+|m|}{2}+1+s) \Gamma(\frac{n-|m|+1}{2}-s)}{\Gamma(\frac{\ell-|m|}{2}-s)}. \quad /13б/$$

Используя /13а/ и /13б/, можно вычислить нормировочные постоянные  $N_{nqm}^{(\pm)}(c)$ . Действительно, обозначая

$$\tilde{V}_{n\ell m}^{q(\pm)}(c) = V_{n\ell m}^{q(\pm)}(c) / N_{nqm}^{(\pm)}(c),$$

имеем

$$|N_{nqm}^{(\pm)}(c)| = \left\{ \sum_{\ell=|m|, |m|+1}^n |\tilde{V}_{n\ell m}^{q(\pm)}(c)|^2 \right\}^{-1/2}.$$

Эта формула удобна для вычислений нормировочных постоянных. Выращения для  $V_{n\ell m}^{q(\pm)}(c)$  приведены в табл. 2 и 3.

4. Рассмотрим теперь разложение вытянутых сфероидальных подбазисов и.о. по цилиндрическим  $/n_3$  и  $n-|m|$  имеют одну четность/:

$$\psi_{nqm}^{(\pm)}(\xi, \eta, \phi; c) = \sum_{n_3=0,1}^{n-|m|} U_{nmn_3}^{q(\pm)}(c) \psi_{nmn_3}^{(\pm)}(\rho, \phi, z). \quad /14/$$

Переходя от вытянутых сфероидальных координат к цилиндрическим, выбирая  $\theta = \pi/2$  и пользуясь свойством ортогональности радиальной части цилиндрического базиса

$$\int_0^\infty F_{nmn_3}(\alpha\rho) F_{nmn_3}(\alpha\rho) \rho d\rho = \delta_{n_3 n_3'},$$

Таблица 2

n	m	l	q	$V_{nlm}^{q(+)}(c)$
0	0	0	0	1
1	$\pm 1$	1	0	1
2	0	0	0	$\left\{1 + 2 \left[ \frac{(2c+3) - \sqrt{9+4c+4c^2}}{(2c-3) - \sqrt{9+4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
2	0	0	2	$-\left\{1 + 2 \left[ \frac{(2c+3) + \sqrt{9+4c+4c^2}}{(2c-3) + \sqrt{9+4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
2	0	2	0	$\left\{1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{(2c-3) - \sqrt{9+4c+4c^2}}{(2c+3) - \sqrt{9+4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
2	0	2	2	$\left\{1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{(2c-3) + \sqrt{9+4c+4c^2}}{(2c+3) + \sqrt{9+4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
2	$\pm 2$	2	0	1
3	$\pm 1$	1	0	$\left\{1 + 4 \left[ \frac{(2c+5) - \sqrt{25+12c+4c^2}}{(2c-5) - \sqrt{25+12c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	$\pm 1$	1	2	$-\left\{1 + 4 \left[ \frac{(2c+5) + \sqrt{25+12c+4c^2}}{(2c-5) + \sqrt{25+12c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	$\pm 1$	3	0	$\left\{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(2c-5) - \sqrt{25+12c+4c^2}}{(2c+5) - \sqrt{25+12c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	$\pm 1$	3	2	$\left\{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{(2c-5) + \sqrt{25+12c+4c^2}}{(2c+5) + \sqrt{25+12c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	$\pm 3$	3	0	1

Таблица 3

n	m	l	q	$V_{nlm}^{q(-)}(c)$
1	0	1	1	1
2	$\pm 1$	2	1	1
3	0	1	1	$\left\{1 + \frac{2}{3} \left[ \frac{(2c+5) - \sqrt{25-4c+4c^2}}{(2c-5) - \sqrt{25-4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	0	1	3	$-\left\{1 + \frac{2}{3} \left[ \frac{(2c+5) + \sqrt{25-4c+4c^2}}{(2c-5) + \sqrt{25-4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	0	3	1	$\left\{1 + \frac{3}{2} \left[ \frac{(2c-5) - \sqrt{25-4c+4c^2}}{(2c+5) - \sqrt{25-4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	0	3	3	$\left\{1 + \frac{3}{2} \left[ \frac{(2c-5) + \sqrt{25-4c+4c^2}}{(2c+5) + \sqrt{25-4c+4c^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	$\pm 2$	3	1	1

получим

$$\dot{U}_{nmn_3}^{q(+)}(c) = (-1)^{\frac{n_3-q}{2}} \left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{1/4} |N_{nqm}^{(+)}(c)| \left(\frac{n_3}{2}\right)! \sqrt{\frac{2^{n_3}}{(n_3)!}} L_{nmn_3}^{q(+)}(c), \quad /15a/$$

$$U_{nmn_3}^{q(-)}(c) = (-1)^{\frac{n_3-q}{2}} \left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{1/4} |N_{nqm}^{(-)}(c)| \left(\frac{n_3-1}{2}\right)! \sqrt{\frac{2^{n_3}}{(n_3)!}} L_{nmn_3}^{q(-)}(c), \quad /15б/$$

где

$$L_{nmn_3}^{q(+)}(c) = \int_0^\infty X_{nqm}^{(+)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4\rho^2}{R^2}}; c \right\} F_{nmn_3}(a\rho) \rho d\rho,$$

$$L_{nmn_3}^{q(-)}(c) = \int_0^\infty X_{nqm}^{(-)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4\rho^2}{R^2}}; c \right\} F_{nmn_3}(a\rho) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 + \frac{4\rho^2}{R^2}}}.$$

Вычисление этих интегралов и подстановка их в /15а/ и /15б/ дает

$$U_{nmn_3}^{q(+)}(c) = \frac{(-1)^{\frac{n-|m|-q}{2}}}{\alpha \sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{\alpha^2}\right)^{1/4} \left(\frac{n_3}{2}\right)! \sqrt{\frac{2^{n_3}}{(n_3)!}} \frac{|N_{nqm}^{(+)}(c)| c^{\frac{n-n_3}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{n+|m|-n_3}{2}\right)! \left(\frac{n-|m|-n_3}{2}\right)!}}$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{n_3/2} h_{s+\frac{n-|m|-n_3}{2}} \frac{n-|m|-n_3(c)}{2} c^s \left(\frac{n+|m|-n_3}{2} + s\right)! \left(\frac{n-|m|-n_3}{2} + s\right)!$$

$$U_{nmn_3}^{q(-)}(c) = \frac{(-1)^{\frac{n-|m|-q}{2}}}{2\alpha \sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{\alpha^2}\right)^{1/4} \left(\frac{n_3-1}{2}\right)! \frac{|N_{nqm}^{(-)}(c)| c^{\frac{n-n_3+1}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{n-|m|-n_3}{2}\right)! \left(\frac{n+|m|-n_3}{2}\right)!}} /166/$$

$$\cdot \sqrt{\frac{2^{n_3}}{(n_3)!}} \sum_{s=0}^{\frac{n_3-1}{2}} h_{s+\frac{n-|m|-n_3}{2}} \frac{n-|m|-n_3(c)}{2} c^s \left(\frac{n+|m|-n_3}{2} + s\right)! \left(\frac{n-|m|-n_3}{2} + s\right)!$$

Выписанные в табл. 4 и 5 значения коэффициентов  $U_{nmn_3}^q(c)$  вычислены на основе этих формул.

5. При  $R \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$  вытянутые сфероидальные координаты вырождаются в сферические и цилиндрические соответственно. Проследим за пределы  $R \rightarrow 0$  в формулах /12/ и /15/. Из /4/ известно, что

$$|N_{nqm}^{(+)}(c)| X_{nqm}^{(+)}(\xi; c) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2\ell+1)(\ell+|m|)! (\ell-|m|)!}}{\sqrt{2} (\ell+|m|)! (\ell-|m|)!} R_{n\ell}^m(r). \quad /17a/$$

$$|N_{nqm}^{(-)}(c)| X_{nqm}^{(-)}(\xi; c) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2\ell+1)(\ell+|m|)! (\ell-|m|)!}}{\sqrt{2} (\ell+|m|-1)! (\ell-|m|-1)!} R_{n\ell}^m(r). \quad /17b/$$

Пользуясь этими формулами, сразу получаем  $V_{n\ell m}^{q(\pm)}(c) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \delta_{\ell\ell}$ . Подставим теперь /17/ в /15/ и учтем /6/. Тогда после четырехкратного применения формулы /8/ приходим к выводу, что

$$U_{nmn_3}^{q(\pm)}(c) \xrightarrow{R \rightarrow 0} W_{n\ell m}^{n_3(\pm)}$$

Рассмотрим теперь предел  $R \rightarrow \infty$ . В этом пределе, согласно /4/, имеем

$$|N_{nqm}^{(+)}(c)| X_{nqm}^{(+)}(\xi; c) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{(n_3)!}{2^{n_3}}} \frac{F_{n_3 n_3}(\alpha\rho)}{(n_3/2)!}$$

$$|N_{nqm}^{(-)}(c)| X_{nqm}^{(-)}(\xi; c) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{(n_3)!}{2^{n_3}}} \frac{F_{n_3 n_3}(\alpha\rho)}{\left(\frac{n_3-1}{2}\right)!}$$

n	m	n	q	$U_{nmn_3}^{q(+)}(c)$
0	0	0	0	1
1	$\pm 1$	0	0	1
2	0	0	0	$\left\{1 + \frac{1}{8} [(2c+1) - \sqrt{9+4c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
2	0	0	2	$\left\{1 + \frac{1}{8} [(2c+1) + \sqrt{9+4c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
2	0	2	0	$-\left\{1 + 8 [(2c+1) - \sqrt{9+4c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
2	0	2	2	$\left\{1 + 8 [(2c+1) + \sqrt{9+4c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
2	$\pm 2$	0	0	1
3	$\pm 1$	0	0	$\left\{1 + \frac{1}{16} [(2c+3) - \sqrt{25+12c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
3	$\pm 1$	0	2	$\left\{1 + \frac{1}{16} [(2c+3) + \sqrt{25+12c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
3	$\pm 1$	2	0	$-\left\{1 + 16 [(2c+3) - \sqrt{25+12c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
3	$\pm 1$	2	2	$\left\{1 + 16 [(2c+3) + \sqrt{25+12c+4c^2}]^2\right\}^{-1/2}$
3	$\pm 3$	0	0	1

Эти формулы приводят к результатам

$$V_{n\ell m}^{q(\pm)}(c) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} W_{n\ell m}^{n_3(\pm)}, \quad U_{nmn_3}^{q(\pm)}(c) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \delta_{n_3 n_3}$$

В заключение выражаем искреннюю благодарность С.И.Виницкому, А.В.Матвеевко, Л.И.Пономареву, Г.С.Саакяну и Я.А.Смородинскому за полезные обсуждения.

Таблица 5

$n$	$m$	$n_3$	$q$	$U_{n m n_3}^{q(-)}(c)$
1	0	1	1	1
2	$\pm 1$	1	1	1
3	0	1	1	$-\left\{1 + 24 \left[ (2c-1) - \sqrt{25-4c+4c^2} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	0	1	3	$\left\{1 + 24 \left[ (2c-1) + \sqrt{25-4c+4c^2} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	0	3	1	$\left\{1 + \frac{1}{24} \left[ (2c-1) - \sqrt{25-4c+4c^2} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	0	3	3	$\left\{1 + \frac{1}{24} \left[ (2c-1) + \sqrt{25-4c+4c^2} \right]^2 \right\}^{-1/2}$
3	$\pm 2$	1	1	1

## ЛИТЕРАТУРА

1. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. "Мир", М., 1974.
2. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, P2-84-211, Дубна, 1984.
3. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, E2-84-517, Дубна, 1984.
4. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, P2-85-141, Дубна, 1985.
5. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, P2-11962, Дубна, 1978.
6. Chasman R.R., Wahlborn S. Nucl.Phys., 1967, A90, p.401.
7. Pluhar Z., Tolar J. Czech.J.Phys., 1964, B14, p.287.
8. Chason E., de Llano M. Rev.Mex.de Fis., 1963, XII, p.57.
9. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
10. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. Изв. АН АрмССР, физика, 1984, 19, с.3-9.
11. Slater L. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge University Press, London, New York, 1966.
12. Bailey W.N. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Tracts No.32, Cambridge, 1935.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 февраля 1985 года.

Мардоян Л.Г. и др.

P2-85-140

Изотропный осциллятор: разложение сфероида-  
льного базиса по сферическому и цилиндрическому

Вычислены коэффициенты, определяющие разложения вытяну-  
того сфероида-льного базиса изотропного осциллятора по сфе-  
рическому и цилиндрическому. Составлены табличные значения  
этих коэффициентов для некоторых простых частных случаев.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Mardoyan L.G. et al.

P2-85-140

Isotropic Oscillator: Expansion of Spheroidal  
over Spherical and Cylindrical Basis

Coefficients are calculated for the expansion of an  
oblate spheroidal basis of an isotropic oscillator over  
a spherical and a cylindrical basis. These coefficients are  
tabulated for some simple particular cases.

The investigation has been performed at the Laboratory  
of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985