СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8493

А.Б.Борисов

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ GL(3,R) В БАЗИСЕ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8493

А.Б.Борисов

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ GL(3,R) В БАЗИСЕ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

P2 - 8493

Борисов А.Б.

Представления группы GL(3,R) в базисе группы вращений

Методом индуцированных представлений исследованы унитарные (бесконечномерные) представления группы линейных преобразований в пространстве трех измерений GL(3,R). Найдены три серии представлений этой группы в дискретном ортонормированном базисе подгруппы 0(3).

Приведены матричные элементы генераторов, найдены неприводимые представления внутри каждой серии. Указаны эквивалентные представления.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

P2 - 8493

Borisov A.B.

GL(3,R) Group Representations in the Rotational Group Basis

Unitary (infinite dimensional) representations of the liner transformation group in the three-dimensional space of GL(3,R) are studied using the induced representation method. Three sets of representations of this group are found in the discrete orthonormal basis of 0(3) subgroup. Matrix elements of generators are presented, and irreducible representations are found inside each set. Equivalent representations are pointed out.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

Введение

Цель этой статьи - исследовать унитарные /бесконечномерные/ представления группы линейных преобразований в пространстве трех измерений GL(3,R). Существует несколько областей применения бесконечномерных представлений этой группы в физике элементарных частиц.

Дотаном, Гелл-Манном и Нееманом /1/ предложено рассматривать специальную линейную группу SL(3,R) /подгруппа GL(3,R) / как порождающую орбитальные возбуждения адронных состояний. Такие возбуждения могут быть введены /2/ при помощи квадрупольного тензор-оператора

$$T_2^M = \frac{1}{i}[H, g_2^M] \quad (M = 2,1,0,-1,-2),$$

где $H = p^2/2m + V(r)$ - гамильтониан системы и оператор массового квадрупольного момента $g_2^M \sim mr^2 Y_2^M$. Операторы T_2^M и $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$ порождают алгебру некомпактной группы SL(3,R). Ее неприводимые представления включают состояния с орбитальным угловым моментом $L = 0,2,4,6, \ldots$ и $L = 1,3,5,7, \ldots$ и являются алгебраической моделью полюсов Редже. Авторы работы /1/ также заметили, что такие серии хорошо известны в ядерной физике как вращательные состояния деформированных ядер.

Несколько позднее Л.Биденхарн /2/ и др. предприняли попытку классификации вращательных спектров ядер, полагая, что состояния ядра образуют базис для одного неприводимого представления SL(3,R). Тогда вероятность $E2$-переходов ядра из одного вращательного состояния (α) в другое (β) пропорциональна квадрату матричного элемента от генераторов T^2_M, т.е. $|<\alpha\mid T^2_M \mid\beta>|^2$. Эта модель удовлетворительно согласуется с экспериментом.

Авторами /3/ было доказано, что гравитация является теорией нелинейной реализации $SL(4,R)$ и конформной группы симметрии и что группа $SL(3,R)$ является кандидатом на классификацию частиц в гравитационном взаимодействии.

$SL(3,R)$ - некомпактная группа и, как следствие, ее унитарные представления бесконечномерны. Некоторые серии представлений линейных групп найдены в классической работе Гельфанда и Граева /4/ методом индуцированных представлений. Искомые представления реализованы в функциональных пространствах. Однако для конкретных приложений удобней реализация в терминах дискретного базиса, элементы которого классифицируются по подгруппе $0(3)$. Эта задача решена в данной работе.

Линейная группа $GL(3,R)$ состоит из всех линейных преобразований трехмерного пространства

$$x'_\alpha = g_{\alpha\beta}\, x_\beta \qquad \alpha,\beta = 1,2,3 \quad \text{и } g\in GL(3,R). \qquad /1/$$

Алгебра $GL(3,R)$ состоит из генераторов группы вращений $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ собственно линейных преобразований $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$

$$\frac{1}{i}[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = \delta_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} - (\alpha\leftrightarrow\beta)$$

$$\frac{1}{i}[M_{\alpha\beta}, R_{\gamma\delta}] = \delta_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} - (\alpha\leftrightarrow\beta) \qquad /2/$$

$$\frac{1}{i}[R_{\alpha\beta}, R_{\gamma\delta}] = \delta_{\alpha\gamma} M_{\delta\beta} + \delta_{\alpha\delta} M_{\gamma\beta} + (\alpha\leftrightarrow\beta).$$

Специальная линейная группа $SL(3,R)$ состоит из преобразований /2/ с $\det g_{\alpha\beta} = 1$.

Мы находим три серии представлений: главную, дополнительную и дискретную. Эти серии реализуются в пространстве базисных векторов $|m,\ell,n>m$, где ℓ - орбитальный момент, n - его проекция, а индекс m, $-\ell \le m \le \ell$ характеризует мультиплетность состояний. Матричные элементы квадрупольного оператора Q^2_p и оператора растяжения в этом базисе

$$Q^2_p\,|m,\ell,n> = \sum_{a=-2}^{a=2} \Big\{ -i\big(m+\tfrac{1}{2}(a-b)\big)\, C^{\ell+a,\,m+2}_{\ell,2;\,m,2}\, \frac{N(m)}{N(m+2)}\,|m+2,\ell+a,n+p> + i\big(m-\frac{a-b}{2}\big)\, C^{\ell+a,\,m-2}_{\ell,2;\,m,-2}\, \frac{N(m)}{N(m-2)}$$

$$|m-2,\ell+a,n+p> + \frac{2i}{\sqrt{6}}\, C^{\ell+a,\,m}_{\ell,2;\,m,0}\, \Big[(2k+3) - a\big(\ell+\frac{1+a}{2}\big)\Big].$$

$$|m,\ell+a,n+p>\; C^{\ell+a,\,m}_{\ell,2;\,m,0} \Big\}\; C^{\ell+a,\,n+p}_{\ell,2;\,n,p} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2(\ell+a)+1}}$$

$$D\,|m,\ell,n> \equiv R_{\mu\mu}\,|m,\ell,n> = -i(a+b+c)\,|m,\ell,n>, \qquad /3a/$$

где $k = \frac{1}{4}(-a-b+2c)$, $N(m) \equiv N(m,\ell)$ и числа a,b,c характеризуют серии представлений. В главной серии представлений $N(m) = 1$ существуют простейшие представления без мультипольности при $m = 0$;

$$a = b = \frac{1}{3}[3+i(\omega-\rho)]; \quad c = \frac{1}{3}[-6+i(2\rho+\omega)]; \quad \rho$$

и ω - вещественные числа. Следуя Биденхарну, назовем их примитивными. Они состоят, соответственно, из двух подпространств с четными и нечетными спинами. Остальные представления главной серии характеризуются значениями $a=2+i\rho$; $b=i\omega$; $c=-2+i\kappa$ и имеют четыре подпространства, начинающиеся соответственно с $|0,0,0\rangle$, $|1,1,n\rangle$; $|\frac{1}{2},\frac{1}{2},n\rangle$; $|-\frac{1}{2},\frac{1}{2},n\rangle$.

Дополнительная серия имеет матричные элементы генераторов /3а/ с

$$N(m)=\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{2}-\frac{4-a+b}{4}\right)!}{\left(\frac{m}{2}-\frac{a-b}{4}\right)!}} \quad (z!=\Gamma(z+1)),$$

причем $a=(1+\frac{\rho}{2})+i\omega$; $b=(1-\frac{\rho}{2})+i\omega$; $c=-2+i\kappa$ $(\rho>1)$. Инвариантные подпространства соответственно начинаются с базисных векторов

$$|0,0,0\rangle \quad (1<\rho<4),$$

$$|-\frac{1}{2},\frac{1}{2},n\rangle, \quad |\frac{1}{2},\frac{1}{2},n\rangle \quad (1<\rho<3).$$

Дискретные серии характеризуются значениями $a=(1+\frac{k_1}{2})+i\omega$, $b=(1-\frac{k_1}{2})+i\omega$, $c=-2+i\kappa$, где k_1 - целое число, $k_1=1,2,3,\ldots$ Инвариантное подпространство $D^{(+)}_{\text{дискр.}}$ состоит из базисных векторов $|m,\ell,n\rangle$ с $m\geq\frac{a-b}{2}$. Матричные элементы генераторов следуют из формулы /3а/ с

$$N(m)=\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{2}+\frac{4-(a-b)}{4}\right)!}{\left(\frac{m}{2}-\frac{a-b}{4}\right)!}}$$

Подпространство $D^{(-)}_{\text{дискр.}}$ образовано множеством векторов $|m,\ell,n\rangle$ $m<\frac{a-b}{2}$

$$N(m)=\left[\frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{a-b}{4}-1\right)!}{\left(-\frac{m}{2}-\frac{a-b}{4}\right)!}\right]^{1/2}.$$

Статья спланирована следующим образом. В разделе 1 мы рассматриваем общую схему построения индуцированных представлений $GL(3,R)$ в базисе функций, заданных на ортогональной группе. Полная классификация возможных серий представлений, матричные элементы генераторов даны в разделе 2. Громоздкие вычисления инфинитезимальных операторов представления для удобства вынесены в приложение.

1. Метод индуцированных представлений

Представления, полученные в нашей работе, найдены методом индуцированных представлений /5/ суть которого мы вкратце обсудим.

Рассмотрим гильбертово пространство L /элементы его обозначим x,y,z /, в котором реализуются представления группы $GL(3,R)$ операторами T_g

$$T_g\, x = x'. \tag{3}$$

Используем разложение Ивасавы: $g\in GL(3,R)$

$$g=k\,u, \tag{4a}$$

где u - ортогональная 3×3 матрица и k - верхняя треугольная матрица, т.е. ее элементы подчиняются условию $k_{ij}=0$ при $i\leq j$; $i,j=1,2,3$. В пространстве представления существует только один общий собственный вектор x_0 для операторов T_k

$$T_k\, x_0=\alpha(k)\, x_0, \tag{4}$$

где комплекснозначная функция $\alpha(k)$ удовлетворяет условиям $\alpha(k_1 k_2)=\alpha(k_1)\alpha(k_2)$. Поставим в соответствие каждому вектору $x\in L$ вектор-функцию от g, определяемую следующим образом:

$$f(g)=(x_0, T_g\, x), \tag{5}$$

где скобки обозначают скалярное произведение. Нетрудно убедиться, что это соответствие взаимооднозначно и позволяет определить представление T_g в пространстве вектор-функций:

$$T_{g_0}\, f(g) = f(g\, g_0)\,. \qquad /6/$$

Тогда важное ограничение на функции $f(g)$

$$f(k\, g) = \alpha(k)\, f(g)\,, \qquad /7/$$

сразу следует из /4/ и /5/ и дает возможность рассматривать преобразование группы $GL(3,R)$ в пространстве функций, заданных на подгруппе ортогональных матриц $0(3)$. Действительно, искомое преобразование нетрудно получить, используя разложение /4а/ и условие /1/.

$$T_g\, f(u) = \alpha(k')\, f(u')$$

$$T_{u_0}\, f(u) = f(u\, u_0) \qquad u_0 \in 0(3)\,, \qquad /8/$$

где матрицы k' и u' находятся из разложения

$$u\, g = k'\, u'\,. \qquad /9/$$

Уточним вид функции $\alpha(k)$. Поскольку она является одномерным прндставлением /характером/ подгруппы k $(\alpha(k_1 k_2) = \alpha(k_1)\,\alpha(k_2))$, то $\alpha(k)$ может зависеть только от мультипликативных параметров матрицы, т.е. от ее диагональных элементов:

$$\alpha(k) = (k_{11})^a\, (k_{22})^b\, (k_{33})^c$$

$$k_{11}\, k_{22}\, k_{33} = 1, \quad \text{если} \quad g \in SL(3,R)\,, \qquad /10/$$

где a, b, c - в общем случае комплексные числа.

Общая форма представления получена, и мы можем сделать более точные вычисления. В дальнейшем найдем явный вид генераторов преобразования /8/ и матричные элементы генераторов представления в базисе неприводимых представлений $0(3)$. Условие унитарности представления определит впоследствии численное значение параметров a, b, c.

2. Представления $GL(3,R)$

Конечная форма преобразований на функциях $f(u)$ имеет вид

$$T_g\, f(u) = (k_{11})^a\, (k_{22})^b\, (k_{33})^c f(u')\,, \qquad /11/$$

$$T_{u_0}\, f(u) = f(u\, u_0)\,, \qquad /12/$$

где элементы k_{ii} и u'_{ik} находятся из разложения $u g = k u'$.

В дальнейшем мы интересуемся представлением $GL(3,R)$ на неприводимых представлениях $0(3)$. Известно, что неприводимые представления $0(3)$ реализуются на функциях $\sqrt{2\ell+1}\, D^{\ell}_{mn}(\theta, \phi, \psi)$ /где θ, ϕ, ψ - углы Эйлера, параметризующие матрицу $u \in 0(3)$, $-\ell \le m,n \le \ell$ /, образующих полную ортогональную нормировочную систему функций относительно инвариантной меры du на группе $0(3)$:

$$\int D^{\ell}_{mn}(u)\, D^{s}_{pg}(u)\, du = \frac{1}{(2\ell+1)}\, \delta_{\ell s}\, \delta_{mp}\, \delta_{ng}\,, \qquad /13/$$

и действие инфинитезимальных операторов M_i $(i=1,2,3)$ группы вращений в этом базисе:

$$(M_1 + i M_2) D^{\ell}_{mn} = \sqrt{(\ell \mp n)(\ell \pm n + 1)}\; D^{\ell}_{m\, n\pm 1} \qquad /14/$$

$$M_3 D^{\ell}_{mn} = n \; D^{\ell}_{mn} \quad . \qquad /15/$$

Представление может быть сейчас дано матричными элементами в этом дискретном базисе
$|m,\ell,n>' = \sqrt{2\ell+1}\, D^{\ell}_{mn} \; (\theta,\phi,\psi)$.
Наиболее интересный случай преобразования /11/ - когда g-симметричная матрица. Тогда соответствующими инфинитезимальными операторами представления являются оператор растяжения $D = R_{\alpha\alpha}$ и квадрупольный элемент алгебры Q_p $(p = 2,1,0,-1,-2)$. Для того чтобы определить, является ли представление унитарным, нужно проверить условие эрмитовости генераторов представления

$$Q^+_p = (-1)^p Q_{-p} \quad M^+_i = M_i \qquad D^+ = D . \qquad /16/$$

Но для определения сопряженных операторов необходимо определить инвариантную норму. Наиболее общей нормировкой функций является

$$(f,f) = \int \bar{f}\,(u)\; g(u,u')\; f(u')du\, du' \qquad /17/$$

с некоторой функцией $g(u,u')$, зависящей, в общем, согласно /11/, от параметров a,b,c. В дискретном базисе $|m,\ell,n>$ необходимо положить

где $\quad < m,\ell,n\,|\, m,\ell,n>' = |N'(a,b,c,m)|^2$,

$$< m,\ell,n\,|\, m,\ell,n>' = |N'(a,b,c,m)|^2 ,$$

$$|N'(a,b,c,m)|^2 = (2\ell+1)\int du\, du' \qquad /18/$$

$$D^{\ell}_{mn}\,(u)\; g(u.u')\, D^{\ell}_{mn}\;(u') .$$

Удобней, однако, работать сразу в ортонормированном базисе

$$|m,\ell,n> = \sqrt{2\ell+1}\;\; N(m,a,b,c)\, D^{\ell}_{mn}\;\; (\phi,\theta,\psi)$$

$$/19/$$

$$N(a,b,c,m) \;\equiv [N'(a,b,c,m)]^{-1} .$$

Как мы увидим ниже, условие эрмитовости генераторов представления, заданных в матричной форме, приводит к решаемой системе конечно-разностных уравнений для нормы состояния. Явный вид генераторов R_{12} получен в приложении. Простые, но утомительные выкладки определяют квадрупольный оператор Q^2_p в базисе $|m,\ell,n>$

$$Q^2_p\,|m,\ell,n> = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=2} \{-i(m+\frac{1}{2}(a-b))\; C^{\ell+\alpha,\; m+2}_{\ell,2;\; m,2}$$

$$\frac{N(m)}{N(m+2)}\,|m+2,\; \ell+\alpha, n+p> + i\,(m - \frac{a-b}{2})$$

$$C^{\ell+\alpha,\, m-2}_{\ell,2;m,-2}\;\; \frac{N(m)}{N(m-2)}\;|m-2,\; \ell+\alpha,\, n+p> +$$

$$+\frac{2i}{\sqrt{6}}\;\; C^{\ell+\alpha,\, m}_{\ell,2,m,0}\quad [(2k+3) - \alpha\,(\ell \cdot \frac{1+\alpha}{2})]\,|\, m,\ell+\alpha,n+p>\}$$

$$C^{\ell+\alpha,\, n-p}_{\ell,2:n.p}\;\; \sqrt{\frac{2\ell+1}{2(\ell+\alpha)+1}}$$

$$D\,|\,m,\ell,n> = R_{\mu\mu}\;|\,m,\ell,n> = -i\,(a+b+c)\,|\,m,\ell,n> , \qquad /20/$$

где

$$k = \frac{1}{4}(-a-b+2c),\ N(m) \equiv N(m,a,b,c) \qquad C^{\ell j}_{\ell_1,\ell_2;n_1 n_2}$$

являются коэффициентами Клебша-Гордона с выбором фаз по Кондону и Шортли /7/. Набор чисел $\xi = (a,b,c)$ связан с операторами Казимира и в дальнейшем пространство функций с определенными a,b,c в преобразовании /11/ кратко обозначим как D_ξ.

Проанализируем матричные элементы /20/ генераторов Q^2_p. Они состоят из трех членов, образующих переходы соответственно $m \to m+2$, $m \to m-2$ и m. Во-первых, имеются простейшие представления, в которых представление группы $O(3)$ с данным ℓ встречается только один раз. Действительно, полагая $m=0$, $a=b$, мы получаем искомое представление. Условие унитарности представлений $Q^{2+}_p = (-1)^p Q^2_{-p}$ фиксирует нам численное значение параметров $a = b = \frac{1}{3}[3 \cdot i(\omega - \rho)]$, $c = \frac{1}{3}[6 + i(2\rho + \omega)]$, где ρ и ω - вещественные числа. Представления состоят из целых моментов $\ell = 0,2,4,\ldots$ и $\ell = 1,3,5,\ldots$ Рассмотрим вопрос о неприводимости представлений. Назовем представление операторно-неприводимым /8/, если любой перестановочный оператор со всеми операторами представления кратен единичному. Для конечномерных представлений это утверждение эквивалентно отсутствию в пространстве представления замкнутых инвариантных подпространств. В бесконечномерных представлениях это не так, и операторная неприводимость еще не есть настоящая неприводимость. Исследуем сначала вопрос об эквивалентности представлений. Как известно, представление $T_{\xi_1}(g)$ эквивалентно представлению $T_{\xi_2}(g)$, если в пространстве представления есть ненулевой оператор A, имеющий непрерывный обратный, так что

$$A\, T_{\xi_1}(g) = T_{\xi_2}(g)\, A. \qquad /21/$$

Тогда для инфинитезимальных операторов выполняются равенства:

$$A\, Q^2_p = Q^2_p\, A.$$

Используя вид операторов Q^2_p, получаем, что оператор A диагонален в базисе $|m,\ell,n>$, его матричные элементы не зависят от ℓ, n и удовлетворяют условиям

$$\left(m+2 - \frac{a_1-b_1}{2}\right) A_{m+2,m+2} = \left(m+2 - \frac{a_2-b_2}{2}\right) A_{m,m}$$

$$\left(m + \frac{a_2-b_2}{2}\right) A_{m+2,m+2} = \left(m + \frac{a_1-b_1}{2}\right) A_{m,m}$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 - c_2$$

$$-a_1 - b_1 + 2c_1 = -a_2 - b_2 + 2c_2. \qquad /22/$$

Сравнение равенств приводит к выводу о том, что при $A_{mm} \neq 0$ представления эквивалентны, если либо $\xi_1 = \xi_2$, либо

$$a_2 + b_2 = a_1 + b_1;\ c_1 = c_2;\ \frac{a_2-b_2}{2} = 2 - \frac{a_1-b_1}{2}.$$

При $\xi_1 = \xi_2$ пространства представления совпадают. Поскольку единственными линейными операторами, перестановочными с операторами представления, являются кратные единичному ($A_{m+2,m+2} = A_{m,m} \to A = \lambda E$), то пространства операторно неприводимы. Во втором случае

при $x_1 \equiv \frac{a_1-b_1}{2} = 2 - x_2$ из соотношения /22/ получаем

$$A_{mm} = \frac{\left(\frac{m}{2} - \frac{4+2x_1}{4}\right)!}{\left(\frac{m}{2} - \frac{x_1}{2}\right)!}$$

В случае, если $2x_1$ не является целым числом, оператор A^{-1} существует и непрерывен /его матрицей в базисе $|m,\ell,n>$ является диагональная с элементами $A^{-1}_{m,m}$ /, и представления T_{ξ_1} и T_{ξ_2} эквивалентны. Вопрос об эквивалентности представлений, когда $2x_1$ - целое число, рассмотрим ниже.

Вернемся, наконец, к унитарности представлений. Условие эрмитовости генераторов Q_p^2 $(Q_p^+ = (-1)^p Q_{-p}$ приводит к системе конечноразностных уравнений для нормы состояния

$$\frac{\alpha\left(\ell + \frac{1+\alpha}{2}\right) + (2k+3)^*}{\alpha\left(\ell + \frac{1+\alpha}{2}\right) - (2k+3)} = 1$$

$$\left|\frac{N(m)}{N(m+2)}\right|^2 = \frac{m+2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^*}{m+\frac{a-b}{2}} \qquad /23/$$

$$\left|\frac{N(m)}{N(m-2)}\right|^2 = \frac{m-2+\frac{a-b}{2}}{m-\frac{a-b}{2}} .$$

Уравнения /23/ могут быть разрешены относительно $N(m)$ тогда и только тогда, когда их правые части положительны и не сингулярны. Таким образом, имеются три серии унитарных представлений, в каждом из которых чисто мнимы $(2k+3)$ и $(a+b+c)$:

I. $(a-b)+(a-b)^* = 4$;
II. $(a-b)$ - вещественное, не равное целому;
III. $(a-b)$ - целое число.

Обсудим отдельно эти случаи.

I. Параметры a, b, c равны:
$a = 2 + i\rho$; $b = i\omega$; $c = -2 + i\kappa$.
ρ, ω, κ - действительные числа, характеризующие представления. Представления с таким набором параметров назовем представлениями главной серии $D_{гл}$. Поскольку операторы Q_p^2 имеют лишь матричные элементы для переходов $m \to m$, $m \pm 2$, $\ell \to \ell + \alpha$, существуют инвариантные

подпространства. Из выражения /20/ нетрудно убедиться, что их всего четыре.

а/ $D_{гл}(0,0)$ и $D_{гл}(1,1)$. Эти подпространства начинаются соответственно с базисных векторов $|0,0,0\rangle$ и $|1,1,n\rangle$. С четным /нечетным/ ℓ представления $D_{гл}(0,0)$ и $D_{гл}(1,1)$ редуцируются соответственно на $\ell + 1(\ell)$ и $\ell(\ell+1)$ представлений подгруппы $O(3)$ с орбитальным моментом ℓ.

б/ $D_{гл}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $D_{гл}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Эти подпространства начинаются с циклических базисных векторов $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n\rangle$ и $|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n\rangle$. Число неприводимых представлений подгруппы $O(3)$ с данным ℓ равно $\ell + \frac{1}{2}$ в каждом из подпространств.

II. Серия представлений, ниже называемая дополнительной, характеризуется

$a = (1 + \frac{\rho}{2}) + i\omega$; $b = (1 - \frac{\rho}{2}) + i\omega$; $c = -2 + i\kappa$, $(\rho > 1)$

и нормой

$$N(m) = \left[\frac{\left(\frac{m}{2} - \frac{4-(a-b)}{4}\right)!}{\left(\frac{m}{2} - \frac{a-b}{4}\right)!}\right]^{1/2} .$$

Инвариантными подпространствами являются $D_{доп}(0,0)$ $(1<\rho<4)$ и $D_{доп}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(1<\rho<3)$, $D_{доп}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(1<\rho<3)$.

Согласно сказанному выше, представления при $\rho_1 = 1-\rho$ $(\rho > 1)$ эквивалентны $D_{доп}$ с $\rho > 1$.

III. Серия характеризуется $a = (1 + \frac{k_1}{2}) + i\omega$;
$b = (1 - \frac{k_1}{2}) + i\omega$; $c = -2 + i\kappa$,

где k_1 - целое число $(k_1 = 1, 2, 3, \ldots)$. Представления этой серии назовем дискретными представлениями. Инвариантными подпространствами являются $D^{(+)}_{дискр}$ и $D^{(-)}_{дискр}$. Подпространство $D^{(+)}_{дискр}$ состоит из базисных векторов

$|m, \ell, n\rangle$ $m \geq -\frac{a-b}{2}$ с нормой

$$N(m)=\frac{\left(\frac{m}{2}-\frac{4-(a-b)}{4}-1\right)!^{\,1/2}}{\left(\frac{m}{2}-\frac{a-b}{4}\right)!}.$$

Аналогично подпространство $D^{(-)}_{\text{дискр}}$ образовано множеством векторов $|m,\ell,n>, m\leq -\frac{a-b}{2}$ и нормой состояний

$$N(m)=\frac{\sqrt{\left(-\frac{m}{2}+\frac{a-b}{4}-1\right)!}}{\sqrt{\left(-\frac{m}{2}-\frac{a-b}{4}\right)!}}.$$

Существуют также два инвариантных подпространства при $k=0,-1,-2..$, но они эквивалентны $D^{(+)}_{\text{дискр}}$ и $D^{(-)}_{\text{дискр}}$. Операторы, связывающие эквивалентные представления, могут быть легко построены. Сказанное выше о представлениях в равной мере применимо и к $SL(3,R)$ /при $b=0$ в матричных элементах и нормах состояний/.

Кроме того, существует еще одна серия представлений, связывающая состояния с орбитальным моментом, отличающимся на две единицы. Ее матричные элементы получаются из /20/, если полагать $m=a=b=0$. Эти представления унитарны при $c=-3+i\rho$ /где ρ — вещественное число/ и $N(m)=1$. Такие представления могут быть реализованы в пространстве функций от трех переменных x_1, x_2, x_3 с генераторами $R_{ij}=\frac{1}{i}(x_i\partial_j+x_j\partial_i)$ и ортонормированным базисом представления:

$$|\rho,\ell,n>=\sqrt{2\ell+1}\; r^{-\frac{3}{2}+i\rho}\; D^{\ell}_{0n}(\theta,\psi)$$

$$<\rho',\ell',n'|\rho\ell n>=\delta(\rho-\rho')\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{nn'}.$$

Элегантное построение этой серии дано в работе /9/ при помощи операторов рождения и уничтожения. Причем оказывается, что эта серия представлений алгебры $SL(3,R)$ в пространстве чисел заполнения допускает и полуцелые ℓ. В подходе, начинающемся сразу с конечных преобразований /11/, такие представления алгебры отсутствуют.

Автор приносит глубокую благодарность В.И.Огиевецкому за предложенную задачу, ценные и плодотворные обсуждения. Приятно поблагодарить Э.Сокачева за обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Инфинитезимальные операторы индуцированных представлений

Согласно методу индуцированных представлений, поставим в соответствие каждому элементу $g\in GL(3,R)$ оператор T_g в пространстве функций $f(u)$ $(u\in O(3))$

$$T_g\, f(u)=\alpha(k')f(u'), \qquad /П1/$$

причем матрицы u' и k' находим из разложения

$$ug=g'=k'\cdot u'$$

и

$$\alpha(k)=(k_{11})^a(k_{22})^b(k_{33})^c.$$

Разложение Ивасавы $g'=k'\cdot u'$ нетрудно выполнить, учитывая соотношение ортогональности $u_{is}\cdot u_{js}=\delta_{ij}$

$$k_{33}=g'_{3s}\,g'_{3s}$$

$$u'_{3s}=g'_{3s}\,(k'_{33})^{-1} \qquad /П2/$$

$$k'_{22}=g_{2s}\,g'_{2s}-g'_{2s}\,g'_{3s}\,k_{33}^{-1}$$ и т.д.

Искомое разложение определяет величины k'_{ii} и u'_{ik} в законе преобразования /П1/. Дискретный базис в разделе 2 определен на функциях $D^{\ell}_{mn}(\theta,\phi,\psi)$, зависящих от углов Эйлера. Параметризуем матрицу u тремя углами Эйлера

$$u = e^{iM_3\phi}\, e^{iM_1\theta}\, e^{iM_3\psi}$$

или в матричной форме:

$$u = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2}\cos(\phi+\psi) + \sin^2\frac{\theta}{2}\cos(\phi-\psi) & -\cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\phi+\psi) + \sin^2\frac{\theta}{2}\sin(\phi-\psi) & \sin\theta\,\sin\phi \\ \cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\phi+\psi) + \sin^2\frac{\theta}{2}\sin(\phi-\psi) & \cos^2\frac{\theta}{2}\cos(\phi+\psi) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos(\phi-\psi) & -\sin\theta\,\cos\phi \\ \sin\theta\,\sin\psi & \sin\theta\,\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Один из способов получить явное выражение преобразованных углов Эйлера - это выразить их через элементы матрицы u_{ik}, закон преобразования которых нам известен

$$\theta = \arccos u_{33}$$

$$\phi = \arcsin \frac{u_{21} - u_{12}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} - \arccos \frac{u_{32}}{\sin\theta}$$

$$\psi = \arccos \frac{u_{32}}{2\sin\theta}.$$

Найдем явное выражение для генераторов представления. Рассмотрим матрицы с бесконечно малым t:

$$e^{iR_{11}t} = \begin{pmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e^{iR_{12}t} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и т.д., отвечающие преобразованиям $GL(3,R)$ с генераторами R_{11}, R_{12} и т.д. Используя разложение /П2/, нетрудно определить бесконечно малые изменения k'_{ii} и u'_{ij} как функции u_{ik} и параметра t и, следовательно, инфинитезимальные преобразования углов Эйлера. Приведем лишь операторы R_{12} в явной форме

$$R_{12} = \frac{1}{i}\Big[\cos 2\psi\,\partial_\psi + \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\sin 2\psi\,\partial_\theta + \Big(-\cos\theta\,\cos 2\psi + \cos^4\frac{\theta}{2}\cos(2\phi+2\psi) - \sin^4\frac{\theta}{2}\cos(2\phi-2\psi)\Big)\partial_\phi + \frac{1}{2}(a-b)\sin^4\frac{\theta}{2}\sin(2\phi-2\psi) + \frac{1}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin(2\phi+2\psi)(-a+b) + \frac{1}{4}\sin^2\theta\,\sin 2\psi\,(-a-b+2c).\qquad /\text{П3}/$$

Компоненты неприводимого тензорного оператора Q^2_p определяются из разложения $R_{12} = i\frac{1}{2}(Q^2_2 - Q^2_{-2})$ и соотношений коммутации

$$[M, Q^2_p] = \sum_{p'} \langle 2,p'|M|2,p\rangle.$$

Литература

1. Y.Dothan, M.Gell-Mann and Neeman. Phys. Lett., 17, 148 (1966).
2. L.Weaver, L.C.Biedenharn. Nucl.Phys., A185, 1 (1972).
3. А.Б.Борисов, В.И.Огиевецкий. Препринт ОИЯИ, Е2-7684, Дубна, 1974.
4. И.М.Гельфанд, И.И.Граев. Известия АН СССР, сер. мат., 17, 189, 1953.
5. М.А.Наймарк. Труды международной школы по теоретической физике в Ялте. Наукова Думка , Киев, 1967, 184.
6. Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965.
7. Е.Кондон, Г.Шортли. Теория атомных спектров. ИЛ, 1949.
8. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений /"Обобщенные функции", вып. 5/, Физматгиз, 1962.
9. Э.Сокачев, В.И.Огиевецкий. Препринт ОИЯИ, Е2-8088, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1974 года.