ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 8418

А.Б.Пестов

КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТАТИЧЕСКОМ СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8418

А.Б.Пестов

КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТАТИЧЕСКОМ СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

Направлено в сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"

В работе [1] приведены правила квантования электромагнитного поля в статических римановых мирах. Для любых римановых миров эти правила были сформулированы в работе [2]. Здесь мы применяем указанные правила к электромагнитному полю в статическом сферическом мире, который представляется как прямое произведение оси времени и трехмерной сферы. В силу компактности сферического пространства собственные векторы оператора поляризации [1] образуют счетный базис, а спектр его собственных значений и, как следствие, частоты фотонов оказываются дискретными. Счетность полученного базиса позволяет ввести полную счетную совокупность операторов рождения и уничтожения фотонов. Отметим также, что ввиду конформной инвариантности поведения фотонов, доказанной в работе [2], все результаты данной работы справедливы для любого конформно статического сферического мира. Замечание такого же рода, естественно, относится и к работе [1].

1. Трехмерная сфера

Трехмерная сфера радиуса r представляется гиперповерхностью

$$\delta_{ab} x^a x^b = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = r^2$$

в 4-мерном евклидовом пространстве. Задавая сферу S_3 параметрическими уравнениями

$$x^1 = r \sin\zeta \sin\xi, \quad x^2 = r\cos\zeta \sin\eta,$$

$$x^3 = r\sin\zeta\cos\xi, \quad x^4 = r\cos\zeta\cos\eta,$$

вводим на ней бисферические координаты ξ, η, ζ. Они меняются в пределах $0 \le \xi, \eta < 2\pi$, $0 \le \zeta \le \pi/2$. На S_3 квадрат элемента длины и скалярное произведение (a,b) дифференциальных форм $a = a_1 d\xi + a_2 d\eta + a_3 d\zeta$, $b = b_1 d\xi + b_2 d\eta + b_3 d\zeta$ равняются

$$d\ell^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\, d\xi^i d\xi^k =$$

$$= r^2(\sin^2\zeta\, d\xi^2 + \cos^2\zeta\, d\eta^2 + d\zeta^2)\,, \qquad /1/$$

$$(a,b) = \int a \wedge * b = r^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a_i b^i) \sin\zeta \cos\zeta\, d\xi d\eta d\zeta\,. \qquad /2/$$

В бисферических координатах задача на собственные значения оператора поляризации $\hat{P}$ /1/

$$\hat{P} a = \pm p a \qquad /3/$$

приводит к системе дифференциальных уравнений $(r = 1)$

$$\operatorname{tg}\zeta\left(\frac{\partial a_3}{\partial \eta} - \frac{\partial a_2}{\partial \zeta}\right) = \pm p a_1,$$

$$\operatorname{ctg}\zeta\left(\frac{\partial a_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial a_3}{\partial \xi}\right) = \pm p a_2, \qquad /4/$$

$$\frac{1}{\sin\zeta \cos\zeta}\left(\frac{\partial a_2}{\partial \xi} - \frac{\partial a_1}{\partial \eta}\right) = \pm p a_3.$$

Решения этой системы проще всего находятся методами теории групп.

Трехмерная сфера допускает шестипараметрическую группу с инфинитезимальными операторами

$$X_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a} = k^i_{ab} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\,,$$

где ξ^i - координаты на сфере. Векторные поля $k^i_{ab} = -k^i_{ba}$ являются линейно независимыми решениями уравнений Киллинга

$$k^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} g_{j\ell} + g_{ji} \frac{\partial k^i}{\partial \xi^\ell} + g_{i\ell} \frac{\partial k^i}{\partial \xi^j} = \nabla_j k_\ell + \nabla_\ell k_j = 0\,. \qquad /5/$$

В координатах ξ, η, ζ

$$X_{12} = -\operatorname{ctg}\zeta \sin\eta \cos\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \operatorname{tg}\zeta \cos\eta \sin\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \sin\eta \sin\xi \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$X_{13} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\,,$$

$$X_{23} = -\operatorname{ctg}\zeta \sin\eta \sin\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\zeta \cos\eta \cos\xi \frac{\partial}{\partial \eta} + \sin\eta \cos\xi \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$X_{14} = -\operatorname{ctg}\zeta \cos\eta \cos\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\zeta \sin\eta \sin\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \cos\eta \sin\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\,,$$

$$X_{24} = -\frac{\partial}{\partial \eta}\,,$$

$$X_{34} = \operatorname{ctg}\zeta \cos\eta \sin\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\zeta \sin\eta \cos\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \cos\eta \cos\xi \frac{\partial}{\partial \zeta}\,.$$

Оператор $\hat{L}$, определяемый векторным полем k^i, переводит форму a в форму $\hat{L}a = (\hat{L}a)_i\, d\xi^i$, где

$$(\hat{L}a)_i = k^j \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} + a_j \frac{\partial k^j}{\partial \xi^i}\,. \qquad /6/$$

Операторы $\hat{L}_{ab}$, определяемые векторными полями Киллинга k^i_{ab}, удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{L}_{ab}, \hat{L}_{cd}] = \delta_{ad}\hat{L}_{bc} - \delta_{ac}\hat{L}_{bd} + \delta_{bc}\hat{L}_{ad} - \delta_{bd}\hat{L}_{ac} \qquad /7/$$

и, следовательно, задают реализацию алгебры Ли группы O_4. Обобщим скалярное произведение /2/ на дифференциальные формы с комплексными коэффициентами, полагая

$$(a,b)_* = r^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (\bar{a}_i b^i) \sin\zeta\cos\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad /8/$$

где $\bar{a}_i$ - коэффициенты дифференциальной формы $\bar{a} = \bar{a}_i d\xi^i$, комплексно сопряженной форме $a = a_i d\xi^i$. Тогда операторы $K_{ab} = -i L_{ab}$ будут эрмитовыми относительно скалярного произведения /8/. Действительно, для любого оператора $K = -i L$, определяемого векторным полем Киллинга k^i,

$$(\hat{K}\bar{a})_\ell b^\ell - \bar{a}_\ell (\hat{K} b)^\ell = i k^\ell \frac{\partial}{\partial \xi^\ell}(\bar{a}_j b^j) = i \nabla_\ell (k^\ell \bar{a}_j b^j),$$

так как согласно /5/ $\nabla_\ell k^\ell = 0$. Следовательно, $(\hat{K}a, b)_* - (a, \hat{K}b)_* = 0$, что и требовалось доказать.

2. *Собственные значения и собственные векторы оператора поляризации*

Как и в спинорном варианте[3], рассмотрим следующие комбинации операторов $\hat{K}_{ab}$.

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{43} + \hat{K}_{12}), \hat{M}_2 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{41} + \hat{K}_{23}), \hat{M}_3 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{42} + \hat{K}_{31}),$$

$$\hat{N}_1 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{43} + \hat{K}_{21}), \hat{N}_2 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{41} + \hat{K}_{32}), \hat{N}_3 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{24} + \hat{K}_{31}),$$

$$\hat{M}^2 = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + \hat{M}_3^2, \quad \hat{N}^2 = \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2.$$

Операторы $\hat{M}_i$ / так же как и операторы $\hat{N}_i$ / задают реализацию алгебры Ли группы трехмерных вращений, поскольку

$$\hat{M}_1\hat{M}_2 - \hat{M}_2\hat{M}_1 = i\hat{M}_3, \quad \hat{M}_3\hat{M}_1 - \hat{M}_1\hat{M}_3 = i\hat{M}_2, \hat{M}_2\hat{M}_3 - \hat{M}_3\hat{M}_2 = i\hat{M}_1, \qquad /9/$$

$$\hat{N}_1\hat{N}_2 - \hat{N}_2\hat{N}_1 = i\hat{N}_3, \quad \hat{N}_3\hat{N}_1 - \hat{N}_1\hat{N}_3 = i\hat{N}_2, \hat{N}_2\hat{N}_3 - \hat{N}_3\hat{N}_2 = i\hat{N}_1.$$

Кроме того,

$$\hat{M}_k\hat{N}_j - \hat{N}_j\hat{M}_k = 0. \quad (k,j = 1,2,3). \qquad /10/$$

Перестановочные соотношения /9/, /10/ означают, что в окрестности единичного элемента группа O_4 есть прямое произведение двух групп трехмерных вращений. Довольно громоздкие, хотя и элементарные выкладки позволяют проверить следующий результат:

$$\hat{P} = \hat{M}^2 - \hat{N}^2, \ \hat{P}^2 = 2(\hat{M}^2 + \hat{N}^2). \qquad /11/$$

Как хорошо известно, $\hat{M}^2 = \ell(\ell+1)$, $\hat{N}^2 = k(k+1)$, где ℓ, k - любые целые или полуцелые положительные числа. Уравнение $(\hat{M}^2 - \hat{N}^2)^2 = 2(\hat{M}^2 + \hat{N}^2)$ имеет два решения, $\ell = k+1, k = \ell + 1$. Полагая для первого решения $s = 2k$, $p = s+2$, получим

$$\ell(\ell+1) = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p, \quad k(k+1) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p.$$

Полагая для второго решения $s = 2\ell$, $p = s+2$, получим

$$\ell(\ell+1) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p, \quad k(k+1) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p.$$

Отсюда следует, что собственные значения оператора поляризации равны $\pm p$, где $p = 2, 3, 4, \ldots$ Собственные же значения m, n операторов $\hat{M}_3$, $\hat{N}_3$, очевидно, равняются

$$m = -\frac{s}{2} - 1, -\frac{s}{2}, \ldots, \frac{s}{2} + 1, \quad n = -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2} + 1, \ldots, \frac{s}{2},$$

когда собственные значения оператора поляризации равны $p = s + 2$ и

$$m = -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2} + 1, \ldots, \frac{s}{2}, \quad n = -\frac{s}{2} - 1, -\frac{s}{2}, \ldots, \frac{s}{2} + 1,$$

когда собственные значения $\hat{P}$ равны $p = -(s+2)$.

Обратимся теперь к решению уравнений /4/. Так как операторы $\hat{P}$, $\hat{M}_3$, $\hat{N}_3$ коммутируют друг с другом, то переменные ξ, η, ζ в этих уравнениях разделяются. Общее решение системы уравнений

$$\hat{M}_3 a = m a, \quad \hat{N}_3 a = n a$$

есть

$$a = e^{i(m+n)\xi} e^{i(m-n)\eta} \cdot a(\zeta).$$

Подставляя это решение в уравнение $\hat{P} a = -p a$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $a(\zeta)$:

$$\operatorname{tg}\zeta\left(\frac{da_2}{d\zeta} - i(m-n)a_3\right) = p a_1,$$

$$\operatorname{ctg}\zeta\left(i(m+n)a_3 - \frac{da_1}{d\zeta}\right) = p a_2,$$

$$\frac{1}{\sin\zeta\cos\zeta}\left(i(m-n)a_1 - i(m+n)a_2\right) = p a_3.$$

Решения этой системы выражаются через функции $Z^{\ell}_{mn}(\zeta) = P^{\ell}_{-m,n}(\cos 2\zeta)$, равные

$$Z^{\ell}_{mn}(\zeta) = i^{-m-n}\sqrt{(\ell-m)!(\ell+m)!(\ell-n)!(\ell+n)!}\,(\cos\zeta)^{2\ell} \times$$

$$\times \sum_{k=A}^{B} \frac{(-1)^k (\operatorname{tg}\zeta)^{2k-m-n}}{k!(\ell+m-k)!(\ell+n-k)!(k-m-n)!},$$

где 2ℓ, $\ell+m$, $\ell+n$ - целые положительные числа,

$$A = \max(0, m+n), \quad B = \min(\ell+m, \ell+n).$$

Положим

$$A(\zeta) = \sqrt{(\ell+n)(\ell+n+1)}\, Z^{\ell}_{m,n-1}(\zeta) + \sqrt{(\ell-n)(\ell-n+1)}\, Z^{\ell}_{m,n+1}(\zeta);$$

$$B(\zeta) = \sqrt{(\ell+n)(\ell+n+1)}\, Z^{\ell}_{m,n-1}(\zeta) - \sqrt{(\ell-n)(\ell-n+1)}\, Z^{\ell}_{m,n+1}(\zeta),$$

$$C(\zeta) = \sqrt{(\ell+n+1)(\ell-n+1)}\, Z^{\ell}_{m,n}(\zeta),$$

$$D(\zeta) = \sqrt{(\ell+m+1)(\ell-m+1)}\, Z^{\ell+1}_{m,n}(\zeta).$$

Тогда

$$\frac{m + n\cos 2\zeta}{\sin 2\zeta} C(\zeta) = \frac{i(\ell+1)}{2} B(\zeta) - \frac{in}{2} A(\zeta),$$

$$D(\zeta) = \cos 2\zeta\, C(\zeta) + \frac{i \sin 2\zeta}{2} A(\zeta),$$

$$\frac{dC(\zeta)}{d(\zeta)} = i(\ell+1)A(\zeta) - in B(\zeta),$$

$$\frac{dA(\zeta)}{d(\zeta)} = 4i\ell C(\zeta) + \frac{2(m + n\cos 2\zeta)}{\sin 2\zeta} B(\zeta) - \frac{2\cos 2\zeta}{\sin 2\zeta} A(\zeta);$$

$$a_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{2c}}\left(D(\zeta) - C(\zeta)\right),$$

$$a_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{2c}}\left(D(\zeta) + C(\zeta)\right),$$

$$a_3(\zeta) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{2c}} B(\zeta).$$

Для уравнения $Pa = pa$ имеем

$$\tilde{a}_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{2c}}(\tilde{D}(\zeta) - \tilde{C}(\zeta)),$$

$$\tilde{a}_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{2c}}(-\tilde{D}(\zeta) - \tilde{C}(\zeta)),$$

$$\tilde{a}_3(\zeta) = \frac{1}{2\pi p\sqrt{2c}}\tilde{B}(\zeta),$$

причем $\tilde{A}(\zeta)$, $\tilde{B}(\zeta)$, $\tilde{C}(\zeta)$, $\tilde{D}(\zeta)$ получаются заменой в формулах для $A(\zeta)$, $B(\zeta)$, $C(\zeta)$, $D(\zeta)$, m на n и наоборот. Полученные результаты проверяются с помощью свойств функций $P^{\ell}_{mn}(\cos 2\zeta)$, приведенных в /4/.

Обозначим найденные собственные векторы оператора поляризации $a^{\lambda,p}_{m,n}$. Здесь λ - индекс поляризации, принимающий два значения: $\lambda = \pm 1$. Собственные векторы $a^{\lambda,p}_{mn}$ нормированы относительно скалярного произведения /8/ на $r/2pc$. Смысл нормировки будет ясен из дальнейшего. Нетрудно убедиться, что

$$a^{\lambda,p}_{-m,-n} = (-1)^{m+n} a^{\lambda,p}_{m,n}. \qquad /13/$$

В рассматриваемом базисе операторы $\hat{P}$, $\hat{M}_3$, $\hat{N}_3$ диагональны

$$\hat{P}a^{+1,p}_{m,n} = p\,a^{+1,p}_{m,n}, \qquad \hat{P}a^{-1,p}_{m,n} = -p\,a^{-1,p}_{m,n},$$

$$\hat{M}_3 a^{+1,p}_{m,n} = m\,a^{+1,p}_{m,n}, \qquad \hat{M}_3 a^{-1,p}_{m,n} = n\,a^{-1,p}_{m,n},$$

$$\hat{N}_3 a^{+1,p}_{m,n} = n\,a^{+1,p}_{m,n}, \qquad \hat{N}_3 a^{-1,p}_{m,n} = m\,a^{-1,p}_{m,n}.$$

Из операторов $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$, $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ составим комбинации

$$\hat{M}_\pm = \hat{M}_1 \pm i\hat{M}_2, \quad \hat{N}_\pm = \hat{N}_1 \pm i\hat{N}_2.$$

Операторы $\hat{M}_\pm$, $\hat{N}_\pm$ действуют на базисные решения следующим образом:

$$\hat{M}_\pm a^{+1,p}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{p+2}{2} \pm m\right)\left(\frac{p}{2} \mp m\right)}\; a^{+1,p}_{m\pm1,n},$$

$$\hat{N}_\pm a^{+1,p}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm n\right)\left(\frac{p-2}{2} \mp n\right)}\; a^{+1,p}_{m,n\pm1},$$

$$\hat{M}_\pm a^{-1,p}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm n\right)\left(\frac{p-2}{2} \mp n\right)}\; a^{-1,p}_{m,n\pm1},$$

$$\hat{N}_\pm a^{-1,p}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{p+2}{2} \pm m\right)\left(\frac{p}{2} \mp m\right)}\; a^{-1,p}_{m\pm1,n}.$$

3. Операторы рождения и уничтожения фотона

Собственные векторы $a^{\lambda,p}_{m,n}$ оператора поляризации удовлетворяют уравнению $\delta a = 0$, так как $\delta\hat{P} = 0$. Чтобы удовлетворить уравнениям Максвелла, которые в конформно статических римановых мирах имеют вид /1/

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \hat{P}^2 a = 0, \qquad /14/$$

$$\delta a = 0, \qquad /15/$$

рассмотрим форму $c^{\lambda,p}_{m,n} \cdot a^{\lambda,p}_{mn}$, где $c^{\lambda,p}_{m,n}$ - скалярная функция от времени t. Подставляя $c^{\lambda,p}_{m,n} \cdot a^{\lambda,p}_{m,n}$ в уравнение /4/, найдем, что функции $c^{\lambda,p}_{m,n}$ должны подчиняться уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2 c^{\lambda,p}_{m,n}(t)}{dt^2} + \frac{p^2}{r^2} c^{\lambda,p}_{m,n}(t) = 0. \qquad /16/$$

Уравнение /16/ имеет два линейно независимых решения $e^{-i\nu_p t}$, $e^{i\nu_p t}$, где ν_p - частота, равная

$$\nu_p = \frac{c}{r}p, \qquad p = 2, 3, 4, \ldots \qquad /17/$$

Таким образом, в статическом сферическом мире частота выражается через скорость света и абсолютную длину -

радиус сферы. Минимальная частота отлична от нуля. Ввиду /17/

$$\nu_{\min} = \frac{2c}{r} . \qquad /18/$$

Обозначим решение $e^{-i\nu_p t} \; a^{\lambda,p}_{m,n}$ уравнений /14/, /15/ через $u^{\lambda,p}_{m,n}$. Имеем

$$<u^{\lambda,p}_{m,n} | u^{\lambda',p'}_{m',n'}> = <\bar{u}^{\lambda,p}_{m,n} | \bar{u}^{\lambda',p'}_{m',n'}> = 0 , \qquad /19/$$

$$<\bar{u}^{\lambda,p}_{m,n} | u^{\lambda',p'}_{m',n'}> = i(\nu_p + \nu_{p'})\, e^{i(\nu_p - \nu_{p'})t} (a^{\lambda,p}_{m,n} , a^{\lambda',p'}_{m',n'})_* , \qquad /20/$$

$$<u^{\lambda,p}_{m,n} | \bar{u}^{\lambda',p'}_{m',n'}> = -i(\nu_p + \nu_{p'})\, e^{-i(\nu_p - \nu_{p'})t} (a^{\lambda,p}_{m,n} , a^{\lambda',p'}_{m',n'})_* , \qquad /21/$$

где [1]

$$<u|v> = (v, \frac{\partial u}{\partial t}) - (u, \frac{\partial v}{\partial t}) \qquad /22/$$

- антисимметричное скалярное произведение в пространстве решений уравнений /14/, /15/. Правила квантования электромагнитного поля выражаются через это не зависящее от времени скалярное произведение [1].

Разлагая оператор a в ряд по $u^{\lambda,p}_{m,n}$,

$$\hat{a} = \sum_{\lambda,p,m,n} (\hat{c}^{\lambda,p}_{m,n} u^{\lambda,p}_{m,n} + \hat{c}^{\lambda,p*}_{m,n} \bar{u}^{\lambda,p}_{m,n}) , \qquad /23/$$

используя /19/, /20/, /21/ и условие нормировки

$$(a^{\lambda,p}_{m,n} , a^{\lambda,p}_{m,n}) = \frac{r}{2cp} = \frac{1}{2\nu_p} ,$$

получим

$$<u^{\lambda,p}_{m,n} | \hat{a}> = -i\, \hat{c}^{\lambda,p*}_{m,n} , \qquad /24/$$

$$<\bar{u}^{\lambda,p}_{m,n} | \hat{a}> = i\, \hat{c}^{\lambda,p}_{m,n} . \qquad /25/$$

Применяя указанные в [1] правила квантования электромагнитного поля, найдем коммутатор операторов $\hat{c}, \hat{c}^*$.

$$[\hat{c}^{\lambda,p}_{m,n} , \hat{c}^{\lambda',p'*}_{m',n'}] = \hbar\, \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{pp'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} ,$$

и, стало быть, операторы c , c^* следует называть операторами уничтожения и рождения фотонов.

Оператор энергии $\hat{H}$ также выражается через скалярное произведение [1]

$$\hat{H} = \frac{1}{2} <\hat{a} | \frac{\partial \hat{a}}{\partial t}> . \qquad /26/$$

Подставляя /23/ в /26/ и используя /24/, /25/, найдем оператор энергии в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,p,m,n} \nu_p (\hat{c}^{\lambda,p}_{m,n} \hat{c}^{\lambda,p*}_{m,n} + \hat{c}^{\lambda,p*}_{m,n} \hat{c}^{\lambda,p}_{m,n}) . \qquad /27/$$

Оператор энергии дает возможность однозначно определить вакуумное состояние электромагнитного поля.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Н.А.Черникову за ценные советы.

Литература

1. *А.Б.Пестов. Препринт ОИЯИ, Р2-8070, Дубна, 1974.*
2. *А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, 8370, Дубна, 1974.*
3. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. ТМФ, 16, 77 /1973/; Препринт ОИЯИ, Р2-6351, Дубна, 1972.*
4. *Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. "Наука", М., 1965.*

Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1974 года.