сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-97

В.Б.Беляев, О.П.Соловцова

МОДЕЛЬ ЛИ В ЭВОЛЮЦИОННОМ ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ МЕТОДЕ

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Эволюционный по константе связи /ЭКС/ метод, предложенный и разработанный в [1], представляет собой альтернативный к обычному метод описания динамических систем. Применения этого метода к проблемам описания пион-ядерного взаимодействия при низких и средних энергиях оказались довольно плодотворными [2]. Однако следует иметь в виду, что эти применения содержат в себе значительный элемент феноменологии. Попытки учесть в явном виде процессы поглощения и испускания π -мезонов [3] привели для простейшей πd -системы к довольно громоздкой формулировке. Одна из трудностей, возникающих здесь, связана с необходимостью вычисления части амплитуды, ответственной только за эффекты многократного рассеяния без поглощения пиона на нуклонах мишени. Уже для системы $(\pi 3N)$ решение уравнений Якубовского представляет собой значительную проблему. Применение же метода ЭКС дает возможность достаточно корректно учесть эффекты многократного рассеяния пионов на нуклонах. С другой стороны, исходная формулировка метода ЭКС относилась к теоретико-полевым задачам. В связи с этим представляется вполне оправданным ожидать адэкватного описания π -ядерного взаимодействия на основе метода ЭКС, учитывающего теоретико-полевые аспекты проблемы.

Проведение этой программы мы начнем с формулировки решаемых моделей теории поля в рамках метода ЭКС, с тем, чтобы затем убедиться в корректности приближений, применяемых при практическом использовании метода ЭКС.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭКС-МЕТОДА ДЛЯ МОДЕЛИ ЛИ

Итак, начнем с модели Ли [4] в секторе /1.1/. В других секторах, имитирующих процессы $pp \to pp$, $\pi^+ d \to \pi^+ d$ и др., модель Ли стандартными методами рассматривалась в [5].

Рассмотрим гамильтониан статической модели Ли

$$H = H_0 + gH_I \, , \qquad /2.1/$$

где

$$H_0 = m^0_A A^+ A + m^0_B B^+ B + \int d\vec{k}\, \omega_k a^+_k a_k \, , \qquad /2.2/$$

$$H_I = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}\, f(k)}{\sqrt{2\omega_k}} [A^+ B a_k^+ + B^+ A a_k], \quad \omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2}. \qquad /2.3/$$

A и B - фермионные операторы, a_k - бозонный оператор; они удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\{A^+, A\} = \{B^+, B\} = 1, \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^+] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$\{A, B\} = \{A^+, B\} = \{A^+, B^+\} = \{A, B^+\} = 0, \qquad /2.4/$$

$$[a_k, A] = [a_k, B] = [a_k^+, A] = [a_k^+, B] = 0.$$

Гамильтониан /2.1/ описывает процессы $A + a \to B \to A + a$. Пусть $|n)$ - собственные векторы гамильтониана H, т.е.

$$H|n) = M_n |n). \qquad /2.5/$$

Эволюционное уравнение для вектора состояния $|n)$ получается путем дифференцирования уравнения /2.5/ по константе g:

$$\frac{\partial}{\partial g}|n) = \sum_m |m) \frac{(m|H_I|n) - (m|n)\frac{\partial M_n}{\partial g}}{M_n - M_m + i\epsilon}. \qquad /2.6/$$

Для производной собственного значения M_n легко получается соотношение:

$$\frac{\partial M_n}{\partial g} = (n|H_I|n). \qquad /2.7/$$

В традиционной формулировке метода ЭКС кроме уравнений /2.6/ и /2.7/ имеются также дифференциальные уравнения для матричных элементов $(m|H_I|n)$), однако ниже мы не будем пользоваться этими уравнениями, находя матричные элементы непосредственно.

Пусть $|n>$ - собственное состояние свободного гамильтониана H_0:

$$H_0 |n> = M_n^0 |n>. \qquad /2.8/$$

Легко убедиться, что собственное состояние свободного гамильтониана $|A> = A^+|0>$ является также собственным состоянием полного гамильтониана

$$H|A> = M_A |A> \qquad /2.9/$$

с собственным значением $M_A = M_A^0$. Таким образом, состояние $|A)$ не перенормируется, т.е.

$$|A) = |A>, \quad M_A = M_A^0. \qquad /2.10/$$

Будем интересоваться состояниями $|B)$ и $|Aa_k) \equiv |\vec{k})$. Принимая во внимание структуру гамильтониана взаимодействия /2.3/ и исполь-

зуя уравнения /2.6/ и /2.7/, получаем систему уравнений, которую будем решать:

$$\frac{\partial|B)}{\partial g} = \int d\vec{k} \frac{|\vec{k})(\vec{k}|H_I|B)}{M_B - M_A - \omega_k + i\epsilon}, \qquad /2.11/$$

$$\frac{\partial M_B}{\partial g} = (B|H_I|B), \qquad /2.12/$$

$$\frac{\partial|\vec{k})}{\partial g} = \frac{|B)(B|H_I|\vec{k})}{M_A - M_B + \omega_k + i\epsilon} + \int d\vec{k}_1 \frac{|\vec{k}_1)(\vec{k}_1|H_I|\vec{k})}{\omega_k - \omega_{k_1} + i\epsilon}. \qquad /2.13/$$

Используя выражение для S-матрицы процесса $A + a_{\vec{k}} \to A + a_{\vec{k}'}$,

$$S_{\vec{k}'\vec{k}} = \delta(\vec{k}' - \vec{k}) - 2\pi i \delta(\omega_{k'} - \omega_k) t_{\vec{k}'\vec{k}}, \qquad /2.14/$$

где $t_{\vec{k}'\vec{k}} = g(\vec{k}'|H_I|\vec{k}>$, для t - матрицы получаем уравнение:

$$\frac{\partial t_{\vec{k}'\vec{k}}}{\partial g} = (\vec{k}'|H_I|\vec{k}) + 2\pi i \int d\vec{k}_1 (\vec{k}'|H_I|\vec{k}_1) t_{\vec{k}_1\vec{k}}\, \delta(\omega_{k_1} - \omega_k). \qquad /2.15/$$

При получении этого уравнения мы воспользовались соотношением

$$|\vec{k}) = |\vec{k}> + (M_A^0 + \omega_k - H + i\epsilon)^{-1} gH_I|\vec{k}>. \qquad /2.16/$$

Отделяя угловые переменные в уравнении /2.15/, получаем уравнение для фазы рассеяния:

$$\frac{\partial \delta_e(k)}{\partial g} = -k\omega_k 4\pi^2 (\vec{k}'|H_I|\vec{k})_e, \quad k^2 = k'^2. \qquad /2.17/$$

3. РЕШЕНИЕ ЭКС-УРАВНЕНИЙ

Итак, нас будет интересовать фаза рассеяния $\delta_e(k)$ и значение перенормированной массы M_B. Из структуры гамильтониана взаимодействия следуют соотношения:

$$H_I|B> = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{f(k)}{\sqrt{2\omega_k}} |\vec{k}>, \qquad /3.1/$$

$$H_I|\vec{k}> = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{f(k)}{\sqrt{2\omega_k}} |B>. \qquad /3.2/$$

Для вычисления матричного элемента $(B|H_I|B)$ воспользуемся полнотой состояний свободного гамильтониана H_0 и явным видом H_I. В результате с учетом /3.1/ и /3.2/ получаем:

$$(B|H_I|B) = (B|H_I|B\rangle\langle B|B) + \int d\vec{k}\,(B|H_I|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|B) =$$

$$= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{f(k)}{\sqrt{2\omega_k}} \left[(B|\vec{k}\rangle\langle B|B) + (B|B\rangle\langle\vec{k}|B)\right]. \qquad /3.3/$$

Из соотношений /2.16/ и /3.2/ для интеграла перекрытия получаем

$$(B|\vec{k}\rangle = (B|\vec{k}) - (B|(M_A + \omega_k - H + i\epsilon)^{-1}\ gH_I|\vec{k}\rangle =$$

$$= -\frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{f(k)}{\sqrt{2\omega_k}} \cdot \frac{(B|B\rangle}{M_A + \omega_k - M_B}. \qquad /3.4/$$

С учетом соотношения /3.4/ выражение /3.3/ принимает вид:

$$(B|H_I|B) = 2g \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)} \frac{f^2(k)}{2\omega_k (M_B - M_A - \omega_k)} |(B|B\rangle|^2. \qquad /3.5/$$

С другой стороны, для матричного элемента $(B|H_I|B)$, по определению, имеем:

$$(B|H_I|B) = \frac{1}{g}(B|H - H_0|B) = \frac{M_B}{g} - \frac{1}{g}(B|H_0|B) =$$

$$= \frac{M_B}{g} - \frac{1}{g}\left[(B|H_0|B\rangle\langle B|B) + \int d\vec{k}\,(B|H_0|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|B)\right] =$$

$$= \frac{M_B}{g} - \frac{1}{g}\Big[M_B^0 - g^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{f^2(k)}{2\omega_k} \cdot \frac{1}{M_B - M_A - \omega_k} + \qquad /3.6/$$

$$+ g^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{f^2(k)}{2\omega_k} \cdot \frac{M_B}{(M_B - M_A - \omega_k)^2}\Big] |(B|B\rangle|^2.$$

Решая уравнения /3.5/ и /3.6/, для $(B|H_I|B)$ получаем:

$$(B|H_I|B) = \frac{2M_B\, g I(M_B)}{M_B^0 + g^2 I(M_B) - g^2 M_B \dfrac{\partial I(M_B)}{\partial M_B}}, \qquad /3.7/$$

где

$$I(M_B) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{f^2(k)}{2\omega_k} \cdot \frac{1}{M_B - M_A - \omega_k}. \qquad /3.8/$$

Подставляя /3.7/ в уравнение /2.12/, приходим к линейному относительно функции $g^2(M_B)$ уравнению:

$$\frac{dg^2}{dM_B} + \frac{M_B I'(M_B) - I(M_B)}{M_B I(M_B)} g^2 = \frac{M_B^0}{M_B} \cdot \frac{1}{I(M_B)}. \qquad /3.9/$$

Решение этого уравнения с граничным условием

$$g^2(M_B^0) = 0 \qquad /3.10/$$

определяет перенормировку массы частицы B:

$$M_B = M_B^0 + g^2 I(M_B). \qquad /3.11/$$

Выражение /3.11/ для перенормированной массы, полученное решением ЭКС-уравнений, в точности совпадает с выражением, получаемым стандартным методом решения уравнения $H|B) = M_B|B)$ /см., например, [6] /.

Перейдем теперь к нахождению S-фазы рассеяния бозона a на фермионе A. Как следует из уравнения для фазы /2.17/, необходимо найти матричный элемент $(\vec{k}'|H_I|\vec{k})$ при $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$ как функцию константы связи g.

Используя представление /2.16/ для вектора состояния $|\vec{k})$, искомый матричный элемент представим в виде суммы трех слагаемых:

$$(\vec{k}'|H_I|\vec{k}) = A_1 + A_2 + A_3, \qquad /3.12/$$

где

$$A_1 = \langle\vec{k}'|H_I|\vec{k}\rangle, \qquad /3.13а/$$

$$A_2 = g\langle\vec{k}'|H_I\left[(M_A + \omega_k - H - i\epsilon)^{-1} + (M_A + \omega_k - H + i\epsilon)^{-1}\right]H_I|\vec{k}\rangle, \qquad /3.13б/$$

$$A_3 = g^2 \langle\vec{k}'|H_I (M_A + \omega_k - H - i\epsilon)^{-1} H_I (M_A + \omega_k - H + i\epsilon)^{-1} H_I|\vec{k}\rangle. \qquad /3.13в/$$

Из соотношений /3.1/ и /3.2/ следует, что

$$A_1 = 0. \qquad /3.14/$$

Далее, вспоминая определение t-матрицы /2.14/ и используя представление /2.16/ и соотношение /3.2/, находим следующее представление для t-матрицы:

$$\frac{1}{g} t_{\vec{k}'\vec{k}} = g\langle\vec{k}'|H_I (M_A + \omega_k - H - i\epsilon)^{-1} H_I|\vec{k}\rangle =$$

$$= \frac{g}{(2\pi)^3} \cdot \frac{f^2(k)}{2\omega_k} \langle B|(M_A + \omega_k - H - i\epsilon)^{-1}|B\rangle. \qquad /3.15/$$

На основе этого представления для члена A_2 получаем:

$$A_2 = \frac{1}{g}\left(t_{\vec{k}\vec{k}} + t^{+}_{\vec{k}\vec{k}}\right). \qquad /3.16/$$

Для нахождения слагаемого A_3 снова воспользуемся условием полноты собственных векторов $|n\rangle$ свободного гамильтониана H_0:

$$A_3 = g^2 \sum_n \langle \vec{k}'|H_I (M_A + \omega_k - H - i\epsilon)^{-1} H_I|n\rangle\langle n|(M_A + \omega_k - H + i\epsilon)^{-1} H_I|\vec{k}\rangle. \qquad /3.17/$$

Учитывая структуру гамильтониана взаимодействия, легко установить, что ненулевой вклад в сумму /3.17/ дают только состояния $|B\rangle$ и $|\vec{k}\rangle$. Имея это в виду и принимая во внимание /3.1/ и /3.2/, для A_3 находим:

$$A_3 = g^2 \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k)}{2\omega_k}\int\frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{f(k_1)}{\sqrt{2\omega_{k_1}}}\left[\langle B|(M_A+\omega_k - H - i\epsilon)^{-1}|\vec{k}_1\rangle \times\right.$$

$$\left.\times \langle B|(M_A + \omega_k - H + i\epsilon)^{-1}|B\rangle + \text{э.с.}\right]. \qquad /3.18/$$

Применяя тождество для функций Грина

$$(M_A+\omega_k-H-i\epsilon)^{-1} = (M_A+\omega_k-H_0-i\epsilon)^{-1} + (M_A+\omega_k-H-i\epsilon)^{-1} g H_I (M_A+\omega_k-H_0-i\epsilon)^{-1}, \qquad /3.19/$$

матричный элемент из /3.18/ можно представить в виде:

$$\langle B|(M_A+\omega_k-H-i\epsilon)^{-1}|\vec{k}_1\rangle = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{f(k_1)}{2\omega_k}\cdot\frac{\langle B|(M_A+\omega_k-H-i\epsilon)^{-1}|B\rangle}{\omega_k-\omega_{k_1}-i\epsilon}. \qquad /3.20/$$

В результате для A_3 получаем:

$$A_3 = \frac{2g^3}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k)}{2\omega_k} P\int\frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k_1)}{2\omega_{k_1}(\omega_k-\omega_{k_1})}\left|\langle B|(M_A+\omega_k-H-i\epsilon)^{-1}|B\rangle\right|^2. \qquad /3.21/$$

Матричный элемент в /3.21/ можно снова выразить через t-матрицу, если воспользоваться представлением /3.15/. Таким образом, уравнение для фазы рассеяния принимает вид:

$$\frac{\partial\delta(k)}{\partial g} = \frac{1}{g}\left(t_{k'k} + t^{+}_{k'k}\right) + \frac{2}{g}|t_{k'k}|^2\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{f^2(k)}{2\omega_k}\right]^{-1}\times$$

$$\times P\int\frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k)}{2\omega_{k_1}}\cdot\frac{1}{\omega_k-\omega_{k_1}}. \qquad /3.22/$$

Для S-гармоники t-матрицы, как известно, имеем:

$$t_{kk'} = -\frac{2\pi}{\omega_k}\cdot\frac{1}{2ik}\left[e^{2i\delta(k)} - 1\right]. \qquad /3.23/$$

Учитывая выражение /3.23/, из /3.22/ получаем уравнение для функции $tg\delta/k$ *:

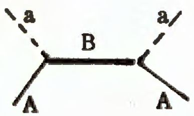
$$\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{tg\delta}{k}\right) = \frac{2}{g}\{\frac{tg\delta}{k} - \left(\frac{tg\delta}{k}\right)\frac{1}{4\pi^2\omega_k}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k)}{2\omega_k}\right]^{-1}\times$$

$$\times P\int\frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k_1)}{2\omega_{k_1}}\cdot\frac{1}{\omega_k-\omega_{k_1}}. \qquad /3.24/$$

Решение уравнения /3.24/ имеет вид:

$$\frac{tg\delta}{k} = \frac{\dfrac{g}{(2\pi)^3}\cdot\dfrac{f^2(k)}{2\omega_k}}{C + \dfrac{g^2}{4\pi^2\omega_k}P\displaystyle\int\frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k_1)}{2\omega_{k_1}}\cdot\frac{1}{\omega_{k_1}-\omega_k}}. \qquad /3.25/$$

Константу C найдем из следующих соображений. Ясно, что при $g\to 0$ низшая по g диаграмма, дающая вклад в процесс упругого рассеяния, имеет вид:

$M^0 =$ 

.

Для того, чтобы выражение /3.25/ давало фазу, определяемую матричным элементом M^0 при $g \to 0$, необходимо положить

$$C = \frac{2\pi}{\omega_k}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\left(M_B^0 - M_A - \omega_k\right). \qquad /3.26/$$

Окончательно для $tg\delta$ получаем:

---

*Отметим, что уравнение /3.24/ напоминает аналогичное уравнение для случая потенциального рассеяния на сепарабельном потенциале $V(k, k') = f(k) f(k')$.

$$\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{k} = \frac{\omega_k}{2\pi}\cdot\frac{g^2\dfrac{f^2(k)}{2\omega_k}}{M_B^0 - M_A - \omega_k + g^2 P\int\dfrac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\cdot\dfrac{f^2(k_1)}{2\omega_{k_1}}\cdot\dfrac{1}{\omega_k-\omega_{k_1}}}. \qquad /3.27/$$

Исключая из /3.27/ неперенормированную массу M_B^0 с помощью соотношения /3.11/ для тангенса фазы находим:

$$\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{k} = \frac{\omega_k}{2\pi}\cdot\frac{g^2 f^2(k)/2\omega_k}{M_B - M_A - \omega_k}\cdot\Big[1 + g^2 P\int\frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k_1)}{2\omega_{k_1}}\times \qquad /3.28/$$

$$\times\frac{1}{(M_B - M_A - \omega_k)(\omega_k - \omega_{k_1})}\Big]^{-1}.$$

Это выражение снова совпадает с выражением, получаемым в стандартном подходе [6].

Нетрудно убедиться, что фазе /3.28/ соответствует t -матрица:

$$t_{k'k} = \frac{g^2}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k)}{2\omega_k}\Big[M_A + \omega_k - M_B^0 - g^2\int\frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{f^2(k_1)}{2\omega_{k_1}(\omega_k - \omega_{k_1} + i\epsilon)}\Big]^{-1}. \qquad /3.29/$$

В заключение авторы выражают благодарность Д.А.Киржницу и М.Х.Ханхасаеву за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киржниц Д.В. ЖЭТФ, 1965, 49, с. 1544;
   Киржниц Д.В. В сб.: "Проблемы теоретической физики", посвященном памяти И.Е.Тамма. "Наука", М., 1972, с. 74.
   Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж. ЭЧАЯ, 1979, 10,с.741.
2. Беляев В.Б., Соловцова О.П. ЯФ, 1981, 33, с. 699.
   Беляев В.Б., Ханхасаев М.Х. ОИЯИ, Р4-83-593, Дубна, 1983.
3. Mizutani T., Koltun D.S. Ann. of Phys., 1977, 109, p. 1.
4. Хенли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля, ИИЛ, М., 1963.
5. Schmit C., Maillet J.P. Nucl.Phys., 1978, A312, p. 236;
   Sawicki M., Schutte D. Z.Naturforschung, 1981, 36A, p. 1261;
   Sawicki M. Phys.Rev., 1983, C27, p. 1415; Bodden P. Nucl. Phys., 1982, A384, p. 449; Fuda M.G. Phys.Rev., 1982, C25, p. 1972.
6. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, М., 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 февраля 1984 года.

Беляев В.Б., Соловцова О.П. Р2-84-97
Модель Ли в эволюционном по константе связи методе

С целью проверки приближений метода ЭКС /эволюционный по константе связи/ в теоретико-полевых задачах дается решение модели Ли в рамках этого метода. Получена перенормировка массы фермиона и фаза рассеяния бозона на фермионе. Показано, что метод ЭВС приводит к тем же решениям модели, что и традиционный подход.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов.

Belyaev V.B., Solovtsova O.P. P2-84-97
Lie Model in the Evolution in Coupling Counstant Method

With the aim of checking applicability of the ECC-method (evolution in coupling constant) to the field-theoretical problems solution of the Lie model in the frame of this method is given. Renormalization of the heavy particle mass and phase schift for the boson by the fermion scattering is obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984