ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-84-870

Л.С.Давтян*, Г.С.Погосян*, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян*

ДВУХМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА

Взаимные разложения полярного и параболического базисов в непрерывном спектре

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

* Ереванский государственный университет

1984

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в уравнении Шредингера для двухмерного атома водорода /ДАВ/ переменные разделяются в полярных [1], параболических [2] и эллиптических координатах [3]. При данной энергии эти решения, или базисы, могут быть разложены друг по другу. Знание таких межбазисных разложений существенно облегчает задачу вычисления матричных элементов, в которых начальное и конечное состояния заданы в виде различных базисов.

В области дискретного спектра взаимные связи между указанными выше тремя базисами установлены в работах [4-7].

Для полного решения проблемы межбазисных разложений в ДАВ необходимо также исследовать область непрерывного спектра*. В настоящей работе делается первый шаг в этом направлении, а именно: найдено разложение параболического базиса по полярному и обратное ему разложение. В §1 приводятся формулы, определяющие эти два базиса, в §2 получено разложение резерфордовского базиса по полярному, в §3 - разложение общего параболического базиса по полярному, в §4 - разложение полярного базиса по параболическому, в §§5 и 6 - согласованность разложений в непрерывном и дискретных спектрах.

§1. БАЗИСЫ

В атомной системе единиц ($\hbar = \mu = e = 1$, $k = \sqrt{-2E}$, $E > 0$) полярный и параболический базисы ДАВ имеют вид

$$\Psi_{km}(r,\phi) = C_{km}\frac{(-2ikr)^{|m|}}{(2|m|)!}\, e^{ikr}\, F\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k},\, 2|m|+1,\, -2ikr\right)\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad /1/$$

$$\Psi^{(\pm)}_{k\beta}(u,v) = C^{(\pm)}_{k\beta}\, e^{ik\frac{(u^2+v^2)}{2}}\, f^{(\pm)}_{k\beta}(u)\, f^{(\pm)}_{k,-\beta}(v), \qquad /2/$$

где β - параболическая константа разделения,

$$f^{(+)}_{k\beta}(z) = F\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{2k},\, \frac{1}{2},\, -ikz^2\right), \quad f^{(-)}_{k\beta}(z) = z\,F\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{2k},\, \frac{3}{2},\, -ikz^2\right),$$

а координаты выбраны так:

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi;\ x = \frac{u^2-v^2}{2},\ y = uv,\ 0 \le u < \infty,\ -\infty < v < \infty.$$

---

* Для трехмерного атома водорода такое исследование частично было проведено в работах [8-10].

Отметим еще, что соблюдение условия

$$\int \Psi^*_{k'm'}(r,\phi)\Psi_{km}(r,\phi)\,dv = 2\pi\delta(k'-k)\delta_{m'm}$$

обеспечивается константой C_{km}, равной

$$C_{km} = (i)^{|m|}\, e^{\pi/2k}\sqrt{2k}\,|\Gamma(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k})| \qquad /3/$$

/о константах $C^{(\pm)}_{k\beta}$ будет сказано ниже в §4/.

Кулоновская фаза рассеяния определяется выражением

$$\delta_{|m|} = \arg\Gamma(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k}). \qquad /4/$$

Разбиение параболического базиса на два подбазиса объясняется тем, что формально парам (u,v) и $(-u,-v)$ соответствуют одни и те же декартовы координаты (x,y): $\Psi(u,v)$ может быть произведением двух функций с данной четностью относительно инверсии своего аргумента.

§2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО БАЗИСА ПО ПОЛЯРНОМУ /РЕЗЕРФОРДОВСКИЙ СЛУЧАЙ/

Резерфордовская волновая функция получается из /2/ при $\beta = -1-\frac{ik}{2}$. Легко проверить, что при таком выборе в пределе $v\to\infty$ /2/ /с индексом "+"/ с точностью до характерных для кулоновского поля логарифмических искажений переходит в суперпозицию плоской и круговой расходящейся волн. Выбирая амплитуду падающей плоской волны за единицу, получим

$$\Psi_k(u,v) = \frac{e^{\pi/2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i}{k})\, e^{ik\frac{u^2-v^2}{2}} F(\frac{i}{k},\frac{1}{2},ikv^2).$$

Рассмотрим теперь разложение

$$\Psi_k(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{km}\Psi_{km}(r,\phi).$$

Пользуясь ортонормируемостью функций $e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}$ и предварительно убедившись в равенстве

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[\frac{1}{2}-\frac{i}{k},\frac{1}{2},-ikr(1-\cos\phi)]\,e^{-im\phi}\,d\phi =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}+|m|)(2ikr)^{|m|}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i}{k})(2|m|)!} F(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k},2|m|+1,-2ikr),$$

приходим к разложению

$$\Psi_k(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(i)^{|m|}\frac{e^{i\delta_{|m|}}}{\sqrt{k}}\Psi_{km}(r,\phi), \qquad /5/$$

в котором $\delta_{|m|}$ дается выражением /4/.

Как известно[/4/], в дискретном спектре разложение параболического базиса ДАВ по полярному имеет вид

$$\Psi_{jt}(u,v) = \sum_{m=-j}^{j} d^j_{mt}(\pi/2)\Psi_{jm}(r,\phi), \qquad /6/$$

где d^j_{mt} - вещественная функция, связанная с D-функцией Вигнера соотношением[/8/]:

$$D^j_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-iM\alpha}d^j_{MM'}(\beta)e^{-iM'\gamma},$$

а индексы имеют следующий смысл:

$$j = \frac{n_1+n_2}{2},\quad t = \frac{n_1-n_2}{2},\quad E_j = -\frac{1}{2(j+\frac{1}{2})^2}$$

$(n_1, n_2 = 0,1,2,\ldots)$. Сами базисы определяются выражениями

$$\Psi_{jm}(r,\phi) = \Psi_{nm}(r,\phi) = (2\lambda^3)^{1/2}\sqrt{\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}}\frac{(2\lambda r)^{|m|}}{(2|m|)!}e^{-\lambda r}\times$$

$$\times F(-n+|m|,2|m|+1,2\lambda r)\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Psi_{jt}(u,v) = \Psi_{n_1n_2}(u,v) = (\frac{\lambda}{\pi})^{1/2}\frac{H_{n_1}(\sqrt{\lambda}u)H_{n_2}(\sqrt{\lambda}v)}{\sqrt{2^{n_1+n_2}n_1!\,n_2!}}e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} \qquad (\lambda=\sqrt{-2E}).$$

Из формулы[/11/]

$$d^j_{m,-j}(\pi/2) = \frac{(-1)^{j+m}}{2}\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}},$$

полагая $j=\frac{i}{k}-\frac{1}{2}$ после простых вычислений приходим к равенству

$$e^{i\delta_{|m|}} = \frac{(\pi)^{1/4}}{(-i)^{|m|}(-1)^{\frac{i}{k}-\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i}{k})}{\Gamma(\frac{i}{k})}}\, d^{\frac{i}{k}-\frac{1}{2}}_{m,\frac{1}{2}-\frac{i}{k}}(\pi/2),$$

из которого следует, что разложение /5/ является аналитическим продолжением /6/ в область $E>0$ / при дальнейшем отборе решений, соответствующих резерфордовскому случаю/.

§3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО БАЗИСА ПО ПОЛЯРНОМУ /ОБЩИЙ СЛУЧАЙ/

Запишем искомое разложение в виде

$$\Psi^{(\pm)}_{k\beta}(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W^{(\pm)}_{k\beta m}\Psi_{km}(r,\phi). \qquad /7/$$

Из ортонормированности функций $e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}$, обращения в нуль при $s+t<|m|$, $s+t+1<|m|$ интегралов

$$A^{m}_{st}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}(1+\cos\phi)^{s}(1-\cos\phi)^{t}e^{-im\phi}\,d\phi$$

$$B^{m}_{st}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}(1+\cos\phi)^{s}(1-\cos\phi)^{t}\sin\phi\, e^{-im\phi}\,d\phi$$

и из равенств

$$A^{m}_{s,|m|-s}=(-1)^{|m|-s}\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{|m|}},\qquad B^{m}_{s,|m|-1-s}=i\,\mathrm{sgn}\,m\cdot A^{m}_{s,|m|-s}$$

/ sgn - знаковая функция/ после некоторых вычислений получим

$$W^{(+)}_{k\beta}=(-1)^{|m|}\sqrt{2\pi}\,\frac{C^{(+)}_{k\beta}}{C_{km}}(b)_{|m|}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}a,\ \frac{1}{2}-|m|,\ -|m|\\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-|m|-b\end{matrix}\;\middle|\;1\right\},$$

$$W^{(-)}_{k\beta}=(-1)^{|m|-1}m\sqrt{2\pi}\,\frac{C^{(-)}_{k\beta}}{C_{km}}\left(\frac{1}{2}+b\right)_{|m|+1}{}_3F_2\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}+a,\ \frac{1}{2}-|m|,\ -1-|m|\\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}-|m|-b\end{matrix}\;\middle|\;1\right\}.$$

Здесь использованы обозначения / $_3F_2$ - обобщенная гипергеометрическая функция/

$$a=\frac{1}{4}+\frac{i}{2k}(1+\beta),\quad b=\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}(1-\beta),\quad (\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Учитывая формулу [12]

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}a,b,c\\ d,f\end{matrix}\;\middle|\;1\right\}=\frac{\Gamma(d)\,\Gamma(d-a-b)}{\Gamma(d-a)\,\Gamma(d-b)}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}a,\ b,\ f-c\\ a+b-d+1,\ f\end{matrix}\;\middle|\;1\right\}+$$

$$\frac{\Gamma(d)\Gamma(f)\Gamma(a+b-d)\,\Gamma(d+f-a-b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\Gamma(f-c)\,\Gamma(d+f-a-b)}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}d-a,\ d-b,\ d+f-a-b-c\\ d-a-b+q,\ d+f-a-b\end{matrix}\;\middle|\;1\right\}. \qquad /8/$$

Имеем

$$W^{(+)}_{k\beta m}=(-1)^{|m|}\frac{C^{(+)}_{k\beta}}{C_{km}}\sqrt{2\pi}\,(a+b)_{|m|}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}a,\ |m|,\ -|m|\\ 1/2,\ a+b\end{matrix}\;\middle|\;1\right\}$$

$$W^{(-)}_{k\beta m}=(-1)^{|m|-1}\frac{C^{(-)}_{k\beta}}{C_{km}}m\sqrt{2\pi}\,(1+a+b)_{|m|-1}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}1/2+a,\ 1+|m|,\ 1-|m|\\ 3/2,\ 1+a+b\end{matrix}\;\middle|\;1\right\}.$$

Полученные формулы полностью решают проблему перехода от кулоновского параболического базиса ДАВ к полярному в непрерывном спектре.

При $\mathrm{Re}(a+\alpha+1)>0$, $\mathrm{Re}(a+\beta+1)>0$ справедливо тождество

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}-N,\ N+2\alpha+2\beta+1,\ -a+\alpha\\ \alpha+\beta+1,\ \alpha+\beta-2a\end{matrix}\;\middle|\;1\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+\alpha+\beta+1}\frac{N!}{\Gamma(\alpha+\beta+N+1)\Gamma(a+\alpha+1)}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(2a-N-\alpha-\beta+1)\Gamma(2a+N+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(2a-\alpha-\beta+1)\Gamma(a+\beta+1)}\int_{-1}^{1}(1-x)^{a+\beta}(1+x)^{a+\alpha}P_N^{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(x)\,dx,$$

в котором можно убедиться прямой проверкой / $P_n^{\gamma,\gamma}(x)$ - полином Якоби/.

Пользуясь этим тождеством и замечая, что [13]

$$P^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{|m|}(\cos\phi)=\frac{(2|m|-1)!!}{(2|m|)!!}\cos m\phi,$$

$$P^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{|m|-1}(\cos\phi)=2\frac{(2|m|-1)!!}{(2|m|)!!}\;\frac{\sin m\phi}{\sin\phi},$$

приходим к интегральным представлениям

$$W^{(+)}_{k\beta m}=2^{a+b}\sqrt{2\pi}\,\frac{C^{(+)}_{k\beta}}{C_{km}}\,\frac{\Gamma(1+|m|-a-b)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\Gamma(\frac{1}{2}-b)}\int_0^{\pi}(1-\cos\phi)^{-a}(1+\cos\phi)^{-b}\cos m\phi\,d\phi \qquad /9/$$

$$W^{(-)}_{k\beta m}=2^{a+b-1}\sqrt{2\pi}\,\frac{C^{(-)}_{k\beta}}{C_{km}}\,\frac{\Gamma(1+|m|-a-b)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(1-b)}\int_0^{\pi}(1-\cos\phi)^{-a}(1+\cos\phi)^{-b}\sin m\phi\,d\phi. \qquad /10/$$

§4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

а. Параболические нормировочные константы $C^{(\pm)}_{k\beta}$. Так как базисы $\Psi^{(+)}_{k\beta}(u,v)$ и $\Psi^{(-)}_{k\beta}(u,v)$ имеют разную четность по переменной v, то

$$\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}dv(u^2+v^2)\,\Psi^{*(\pm)}_{k'\beta'}(u,v)\,\Psi^{(\mp)}_{k\beta}(u,v)=0.$$

Будем считать, что выполняется условие ортонормированности

$$\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}dv(u^2+v^2)\,\Psi^{*(\pm)}_{k'\beta'}(u,v)\,\Psi^{(\pm)}_{k\beta}(u,v)=2\pi\delta(k'-k)\,\delta(\beta'-\beta).$$

На языке коэффициентов $W^{(\pm)}_{k\beta}$ выписанные формулы принимают вид

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} W^{*(\pm)}_{k\beta' m} W^{(\mp)}_{k\beta m} = 0, \qquad /11/$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} W^{*(\pm)}_{k\beta' m} W^{(\pm)}_{k\beta m} = \delta(\beta' - \beta). \qquad /12/$$

Соотношение /12/ и интегральные представления /9/ и /10/ позволяют вычислить параболические нормировочные константы $C^{(\pm)}_{k\beta}$. Действительно, используя формулы

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos m\phi \cos m\phi' = \pi\delta(\phi' - \phi), \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin m\phi \sin m\phi' = \pi\delta(\phi' - \phi)$$
$$(-\pi \le \phi' - \phi \le \pi)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\phi}{\sin\phi} \left(\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}\right)^{\frac{i}{k}(\beta-\beta')} = 2\pi k\,\delta(\beta - \beta'), \quad (\cos\phi = \mathrm{th}\,\nu),$$

получим

$$C^{(+)}_{k\beta} = \frac{e^{\pi/2k}}{2\pi\sqrt{\pi}} \left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2k} + \frac{i\beta}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2k} - \frac{i\beta}{2k}\right)\right|, \qquad /13/$$

$$C^{(-)}_{k\beta} = \frac{e^{\pi/2k}}{\pi\sqrt{\pi}} \left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i}{2k} + \frac{i\beta}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i}{2k} - \frac{i\beta}{2k}\right)\right|. \qquad /14/$$

б. Разложение полярного базиса ДАВ по параболическому. Из интегральных представлений /9/ и /10/ и формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(1-\cos\phi)(1+\cos\phi')}{(1+\cos\phi)(1-\cos\phi')}\right]^{\frac{i\beta}{2k}} d\beta = 2\pi k\,\delta(\nu' - \nu)$$

выводятся условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^{*(\pm)}_{k\beta m'} W^{(\pm)}_{k\beta m}\, d\beta = \frac{1}{2}\left[\delta_{m'm} \pm \delta_{m',-m}\right]. \qquad /15/$$

Эти условия позволяют сразу записать разложение полярного базиса по параболическому

$$\Psi_{km}(r,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[W^{*(+)}_{k\beta m}\Psi^{(+)}_{k\beta}(u,v) + W^{*(-)}_{k\beta m}\Psi^{(-)}_{k\beta}(u,v)\right] d\beta. \qquad /16/$$

Подчеркнем нетривиальность разложения /16/: заранее не очевидно, по каким β следует интегрировать, чтобы обеспечить условия ортогональности /15/.

Наконец, пользуясь вещественностью параболических нормировочных констант /13/ и /14/, явным видом фазового множителя

в полярной нормировочной константе C_{km} и соотношением /8/ после некоторых вычислений приходим к свойству $(W^{(\pm)}_{k\beta m})^* = \pm W^{(\pm)}_{k\beta m}$.

§5. СОГЛАСОВАННОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ /7/ и /6/

Переходя в /7/ к дискретному спектру, т.е. совершая замены

$$k \to i|k| = i\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} \equiv i\lambda, \quad \frac{1}{4} - \frac{i}{2k}(1+\beta) \to -\frac{n_1}{2}, \quad \frac{1}{4} - \frac{i}{2k}(1-\beta) \to -\frac{n_2}{2}$$

/n_1 и n_2 четны и неотрицательны для $\Psi^{(+)}$/,

$$\frac{3}{4} - \frac{i}{2k}(1+\beta) \to -\frac{n_1}{2} + \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4} - \frac{i}{2k}(1-\beta) \to -\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}$$

/n_1 и n_2 нечетны и неотрицательны для $\Psi^{(-)}$/, и учитывая /8/ и интегральное представление коэффициентов Клебша-Гордона [11]

$$C^{c\gamma}_{a\alpha b\beta} = \frac{\delta_{\gamma,\alpha+\beta}\,\Delta(abc)}{(a+b-c)!(c-b+\alpha)!(c-a+\beta)!}\sqrt{\frac{(a+\alpha)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+1)}{(a-\alpha)!(b+\beta)!}}$$

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix} -a-b+c,\ -a+\alpha,\ -b-\beta \\ -a+c-\beta+1,\ -b+c+\alpha+1 \end{matrix}\ \middle|\ 1\right\},$$

$$\Delta(abc) = \sqrt{\frac{(a+b-c)!(a-b-c)!(b-a+c)!}{(a+b+c+1)!}},$$

получим

$$\Psi_{n_1 n_2}(u,v) = \sum_{m=-n}^{n} \tilde{W}^*_{n_1 n_2 m}\,\Psi_{nm}(r,\phi), \qquad /17/$$

где

$$\tilde{W}_{n_1 n_2 m} = \left\{\frac{1+(-1)^{n_1}}{2} + \frac{1-(-1)^{n_1}}{2}\,\mathrm{sgn}\,m\right\}\frac{(-1)^{n+\frac{n_1}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

$$C^{|m|-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}}_{\frac{n-\frac{1}{2}}{2},\,-\frac{1}{4}+\frac{n_2-n_1}{2},\,\frac{n-\frac{1}{2}}{2},\,-\frac{1}{4}-\frac{n_2-n_1}{2}}.$$

Учитывая, что, согласно [11],

$$C^{c\gamma}_{a\alpha b\beta} = \frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{J+1}}\sqrt{\frac{(c+\gamma)!\,(J-2c)!\,(J+1)!}{(a-\alpha)!\,(a+\alpha)!\,(b-\beta)!\,(b+\beta)!\,(c-\gamma)!\,(J-2a)!\,(J-2b)!}}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{a-\alpha}(1+x)^{b+\beta}\frac{d^{c-\gamma}}{dx^{c-\gamma}}\{(1-x)^{c-\gamma}(1+x)^{c+\gamma}\}\,dx$$

/$J = a + b + c$ / и формулу

$$T_m(\cos\theta) = \frac{(-1)^{|m|}\sqrt{\pi}}{2^{|m|}\,\Gamma(|m|+\frac{1}{2})}(1-\cos^2\theta)^{1/2}\frac{d^{|m|}}{(d\cos\theta)^{|m|}}(1-\cos^2\theta)^{|m|-1} = \cos|m|\theta$$

получим

$$\tilde{W}_{n_1 n_2 m} = \frac{(-1)^{n+n_1-|m|}}{\pi}\left\{\frac{1+(-1)^{n_1}}{2}+\frac{1-(-1)^{n_1}}{2}\operatorname{sgn} m\right\}\times$$

$$\sqrt{\frac{2^{n_1+n_2}(n+|m|)!\,(n-|m|)!}{n_1!\,n_2!}}\int_0^{\pi}(\cos\phi)^{n_1}(\sin\phi)^{n_2}e^{-im\phi}\,d\phi.$$

Сравнивая этот результат с интегральным представлением /14/

$$d^{\frac{n_1+n_2}{2}}_{\frac{m}{2},\frac{n_1-n_2}{2}}(\pi/2) = (-i)^{n_2}\sqrt{\frac{2^{n_1+n_2}\left(\frac{n_1+n_2+|m|}{2}\right)!\left(\frac{n_1+n_2-|m|}{2}\right)!}{n_1!\,n_2!}}\ .$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\phi)^{n_2}(\cos\phi)^{n_1}e^{-im\phi}\,d\phi,$$

имеем

$$\bar{W}_{n_1 n_2 m} = (-1)^{n+\frac{n_2}{2}+|m|}\left\{\frac{1+(-1)^{n_1}}{2}+\frac{1-(-1)^{n_1}}{2}\operatorname{sgn} m\right\}d^{\frac{n_1+n_2}{2}}_{m,\frac{n_1-n_2}{2}}(\pi/2).$$

Наконец, используя свойство /11/ $d^J_{MM'}(\pi/2) = (-1)^{J-M'}d^J_{-M,M'}(\pi/2)$, приходим к выводу, что $W_{n_1 n_2 m}$ в точности совпадает с коэффициентом, реализующим разложение /6/.

§6. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОМУ СПЕКТРУ В РАЗЛОЖЕНИИ ПОЛЯРНОГО БАЗИСА ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ

Перейдем в /16/ от переменной β к переменной z:

$$z = \frac{1}{4}-\frac{i}{2k}(1+\beta)$$

и введем обозначения

$$\bar{\Psi}^{(+)}_{kz}(u,v) = e^{ik\frac{u^2+v^2}{2}}F(z,\frac{1}{2};-iku^2)F(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}-z,\frac{1}{2};-ikv^2),$$

$$\bar{\Psi}^{(-)}_{kz}(u,v) = (-4ikuv)e^{ik\frac{u^2+v^2}{2}}F(\frac{1}{2}+z,\frac{3}{2};-iku^2)F(1-\frac{i}{k}-z,\frac{3}{2};-ikv^2),$$

$$\bar{\Psi}_{km}(r,\phi) = \frac{(-2ikr)^{|m|}}{(2|m|)!}e^{ikr}\,F(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k},2|m|+1;-2ikr)\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда вместо /16/ получим

$$\bar{\Psi}_{km}(r,\phi) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k})}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}\infty}^{\frac{1}{4}+\frac{i}{2k}\infty}\{\mathfrak{L}^{(+)}_k(z)\bar{W}^{(+)}_{kzm}\bar{\Psi}^{(+)}_{kz}(u,v)+$$

$$+\mathfrak{L}^{(-)}_k(z)\bar{W}^{(-)}_{kzm}\Psi^{(-)}_{kz}(u,v)\}\,dz, \qquad /18/$$

где

$$\mathfrak{L}^{(+)}_k(z) = \Gamma(z)\,\Gamma(\frac{1}{2}-z)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}-z)\Gamma(\frac{i}{k}+z)$$

$$\mathfrak{L}^{(-)}_k(z) = \Gamma(1-z)\,\Gamma(\frac{1}{2}+z)\,\Gamma(1-\frac{i}{k}-z)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i}{k}+z),$$

а коэффициенты $\bar{W}^{(\pm)}_{kzm}$ даются выражениями

$$\bar{W}^{(+)}_{kzm} = \frac{(-1)^{|m|}}{2\pi^2}\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i}{k})}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}-z,\ |m|,\ -|m|\\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{i}{k}\end{matrix}\ \middle|\ 1\right\}$$

$$\bar{W}^{(-)}_{kzm} = \frac{(-1)^{|m|-1}}{\pi^2}\frac{im\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{i}{k})}\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix}1-z,\ 1+|m|,\ 1-|m|\\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}+\frac{i}{k}\end{matrix}\ \middle|\ 1\right\}.$$

Особенности подынтегрального выражения в /18/ по z совпадают с полюсами функций $\mathfrak{L}^{(\pm)}_k(z)$ и представлены на рис.1 и 2.

Рассмотрим интегралы

$$I^{(\pm)}(k,m,R) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k})}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}-\frac{iR}{2k}}^{\frac{1}{4}+\frac{iR}{2k}}f^{(\pm)}(k,m,z)\,dz,$$

в которых

$$f^{(\pm)}(k,m,z) = \mathfrak{L}^{(\pm)}_k(z)\,\bar{W}^{(\pm)}_{kzm}\,\bar{\Psi}^{(\pm)}_{kz}(u,v).$$

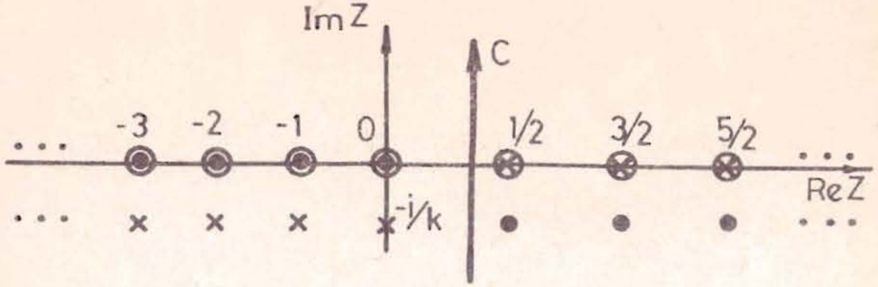

Рис.1. Полюса функции $\mathfrak{L}^{(+)}_k(z)$.

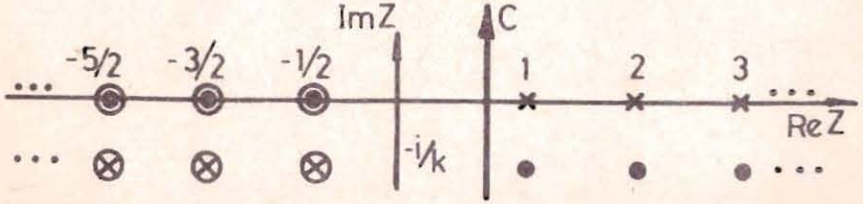

Рис.2. Полюса функции $\mathfrak{L}^{(-)}_k(z)$.

Совершим аналитическое продолжение по k в область $k \to i\lambda + \epsilon = i(n+1/2)^{-1} + \epsilon$, где $\lambda > 0$, а ϵ мало и положительно. При этом контур интегрирования приближается к вещественной оси, а полюса занимают положения, представленные на рис.3 и 4. Замкнем контур в верхней полуплоскости z и запишем

$$I^{(+)}(i\lambda+\epsilon, m, R) = \frac{1}{\Gamma(-n+|m|+\epsilon)} \Big\{ \sum_{t=0,2}^{2n} \mathrm{Res}\, f^{(+)}(k, m, -\frac{t}{2}) +$$

$$+ \sum_{t=2n+2}^{t_R^{(1)}} \mathrm{Res}\, f^{(+)}(k, m, -\frac{t}{2}) + \sum_{t=1,3}^{t_R^{(2)}} \mathrm{Res}\, f^{(+)}(k, m, -n-\frac{t}{2}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f^{(+)}(k, m, z)\, dz \Big\},$$

$$I^{(-)}(i\lambda+\epsilon, m, R) = \frac{1}{\Gamma(-n+|m|+\epsilon)} \Big\{ \sum_{t=1,3}^{2n-1} \mathrm{Res}\, f^{(-)}(k, m, -\frac{t}{2}) +$$

$$+ \sum_{t=2n+1}^{t_R^{(3)}} \mathrm{Res}\, f^{(-)}(k, m, -\frac{t}{2}) + \sum_{t=2,4}^{t_R^{(4)}} \mathrm{Res}\, f^{(-)}(k, m, -n-\frac{t}{2}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f^{(-)}(k, m, z)\, dz \Big\}.$$

Здесь γ_R - полуокружность радиуса R, $t_R^{(i)}$ - крайние левые полюсы каждого типа, находящиеся внутри контура C. При $\epsilon \to 0$ вклады последних трех членов в предыдущих формулах конечны,

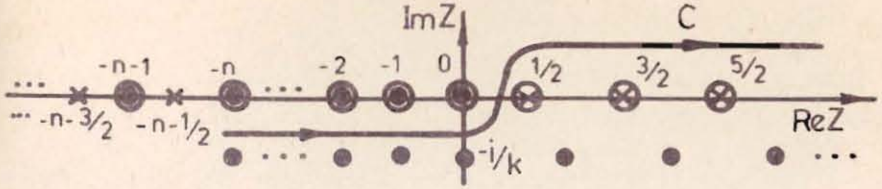

Рис.3. Полюса функции $\mathfrak{L}^{(+)}_k(z)$ и контур интегрирования при $k \to i\lambda + \epsilon$.

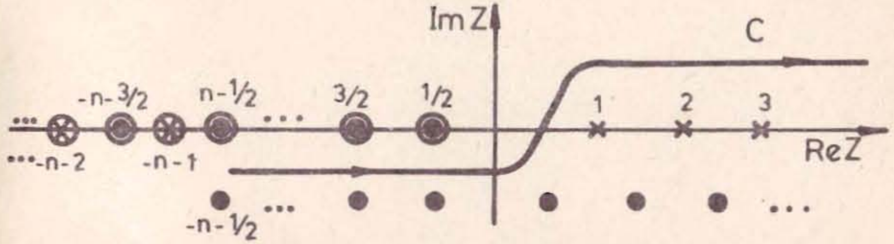

Рис.4. Полюса функции $\mathfrak{L}^{(-)}_k(z)$ и контур интегрирования при $k \to i\lambda + \epsilon$.

а первые суммы стремятся к бесконечности. Вследствие сказанного зависимость от R выпадает, и можно написать

$$I^{(+)}(i\lambda+\epsilon, m) = \frac{1}{\Gamma(-n+|m|+\epsilon)} \sum_{t=0,2}^{2n} (-1)^{\frac{t}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{t}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2}-\frac{t}{2})}{\Gamma(1+\frac{t}{2})} \times$$

$$\times \Gamma(-n+\frac{t}{2}+\epsilon)\, \bar{W}^{(+)}_{i\lambda+\epsilon, -\frac{t}{2}, m}\, \bar{\Psi}^{(+)}_{i\lambda+\epsilon, -\frac{t}{2}}(u, v)$$

$$I^{(-)}(i\lambda+\epsilon, m) = \frac{1}{\Gamma(-n+|m|+\epsilon)} \sum_{t=1,3}^{2n-1} (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{\Gamma(1+\frac{t}{2})\,\Gamma(n+1-\frac{t}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-n+\frac{t}{2}+\epsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{t}{2})} \times$$

$$\times \bar{W}^{(-)}_{i\lambda+\epsilon, -\frac{t}{2}, m}\, \bar{\Psi}^{(-)}_{i\lambda+\epsilon, \frac{t}{2}}(u, v).$$

Учитывая теперь свойство гамма-функций

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(1-z)},$$

устремляя $\epsilon \to 0$ и переходя к /18/, получим

$$\bar{\Psi}_{i\lambda,m}(r,\phi)=(-1)^{n-|m|}(n-|m|)!\Big\{\sum_{N_1=0,2}^{2n}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{N_1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{N_2}{2})}{(\frac{N_1}{2})!(\frac{N_2}{2})!}\bar{W}^{(+)}_{i\lambda,-\frac{N_1}{2},m}\times$$

$$\times\bar{\Psi}^{(+)}_{i\lambda,-\frac{N_1}{2}}(u,v)+\sum_{N_1=1,3}^{2n-1}(-1)^{N_1}\frac{\Gamma(1+\frac{N_1}{2})\Gamma(1+\frac{N_2}{2})}{(\frac{N_1-1}{2})!(\frac{N_2-1}{2})!}\bar{W}^{(-)}_{i\lambda,-\frac{N_1}{2},m}\bar{\Psi}^{(-)}_{i\lambda,-\frac{N_1}{2}}(u,v)\Big\},$$

где $n = (N_1 + N_2)/2$.

Применяя, далее, к коэффициентам $\bar{W}^{(\pm)}_{i\lambda,-\frac{N_1}{2},m}$ преобразование /8/, переходя от вырожденных гипергеометрических функций к полиномам Эрмита, учитывая, что

$$\bar{\Psi}_{i\lambda,m}(r,\phi)=\left(\frac{1}{2\lambda^3}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\,\Psi_{n,m}(r,\phi),$$

после некоторых вычислений приходим к разложению /17/.

Мы признательны Г.С.Саакяну, Л.И.Пономареву, С.И.Виницкому и Л.Г.Мардояну за интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaslow B., Zandler M.E. Am.J.Phys., 1967, 35, p.1118-1119.
2. Cisneros A., McIntosh H.V. J.Math.Phys., 1968, 10, p.277-286.
3. Л.Г.Мардоян и др. ТМФ, 1984, 61, с.99-117.
4. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-83-899, Дубна, 1983.
5. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-84-86, Дубна, 1984.
6. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-84-110, Дубна, 1984.
7. Арутюнян Г.М. и др. Препринт ЕрГУ ПЛРФ-79-17, Ереван, 1979.
8. Переломов А.М., Попов В.С. ЖЭТФ, 1968, 54, с.1799-1805.
9. Majundar S.D., Basu D. J.Phys., 1974, A7, p.787-793.
10. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, Р2-80-318, Дубна, 1980.
11. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
12. Slater L. Generalized Hypergeometric Functions. Camvridge Univ.Press, London, New York, 1966.
13. Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
14. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ТМФ, 1979, 40, с.140-143.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1984 года.

Давтян Л.С. и др. Р2-84-870
Двухмерный атом водорода.
Взаимные разложения полярного и параболического базисов в непрерывном спектре

В области непрерывного спектра найдено разложение параболического базиса двухмерного атома водорода по полярному и обратное ему разложение. Прослежена связь между этими разложениями и соответствующими им разложениями в дискретном спектре. Установлен теоретико-групповой смысл двухмерной кулоновской фазы рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Davtyan L.S. et al. P2-84-870
Two-Dimensional Hydrogen Atom.
Expansions of the Polar and Parabolic Bases in the Continuous Spectrum

In the region of continuous spectrum we have found the expansions of the parabolic basis of a two-dimensional hydrogen atom over the polar basis and the inverse expansion. We have also analysed the connection between these expansions and the corresponding expansions in the discrete spectrum. The group-theoretical meaning of the two-dimensional Coulomb scattering phase is established.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984