объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-86

Л.Г.Мардоян*, Г.С.Погосян*, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян *

МЕЖБАЗИСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ АТОМЕ ВОДОРОДА

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

* Ереванский государственный университет

1984

1. Как известно[1-3], методом разделения переменных уравнение Шредингера для двумерного атома водорода решается в трех системах координат - полярной, параболической и эллиптической. Взаимные разложения одного из этих решений /базисов/ по-иному обсуждались в[4] с точки зрения добавочных интегралов движения.

Здесь мы вычисляем коэффициенты межбазисных разложений, отталкиваясь от присущей двумерному атому водорода ортогональности радиальных волновых функций при данной энергии по второму /неэнергетическому/ квантовому числу[5].

2. Рассмотрим сначала разложение параболического базиса по полярному. Разобьем оба базиса на подбазисы с данной четностью относительно преобразования $\phi \to -\phi$, и запишем связь между ними в виде

$$\psi^{(\pm)}_{Np}(u, v) = \sum_{m=0;1}^{N} \langle N, m | N, p \rangle_{\pm}\ \psi^{(\pm)}_{Nm}(r, \phi). \qquad /1/$$

Координаты здесь выбраны так:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi; \quad -\pi \le \phi \le \pi, \quad 0 \le r < \infty.$$

$$u = \sqrt{2r}\cos\frac{\phi}{2}, \quad v = \sqrt{2r}\sin\frac{\phi}{2}; \quad 0 \le u < \infty, \quad -\infty < v < \infty.$$

Информация о подбазисах в кулоновской системе единиц $(\hbar = \mu = e = 1)$ дается формулами

$$\psi^{(+)}_{Nm}(r, \phi) = R_{Nm}(r)\frac{\cos m\phi}{\sqrt{2\pi}}, \quad 0 \le m \le N, \qquad /2а/$$

$$\psi^{(-)}_{Nm}(r, \phi) = R_{Nm}(r)\, i\frac{\sin m\phi}{\sqrt{2\pi}}, \quad 1 \le m \le N, \qquad /2б/$$

$$R_{Nm}(r) = (2\omega)^{1/2}\sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}}\ \frac{(2\omega r)^m}{(2m)!}e^{-\omega r}\ F(-N+m, 2m+1, 2\omega r), \qquad /2в/$$

$$\psi^{(\pm)}_{Np}(u, v) = \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2}\ \frac{e^{-\frac{\omega}{2}(u^2+v^2)}}{2^N\sqrt{(N+p)!(N-p)!}}\ H_{N+p}(\sqrt{\omega}\,u)\, H_{N-p}(\sqrt{\omega}\,v). \qquad /3/$$

Квантовое число p для четного /нечетного/ подбазиса пробегает значения $-N, -N+2, \ldots N-2, N$ $(-N+1, -N+3, \ldots N-3, N-1)$, спектр энергий

$$E_N = -\frac{2}{(2N+1)^2}, \quad N = 0,1,\ldots ,$$

а параметр $\omega = \sqrt{-2E_N}$. Индексы полиномов Эрмита в /3/ для четного /нечетного/ подбазиса четны /нечетны/ и потому параболические подбазисы выражаются через вырожденные гипергеометрические функции:

$$\psi^{(+)}_{Np}(u,v) = \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(-1)^N}{2^N} \frac{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\,\left(\frac{N-p}{2}\right)!}\, e^{-\frac{\omega}{2}(u^2+v^2)} \times$$
$$\times F\left(-\frac{N+p}{2};\frac{1}{2};\omega u^2\right) F\left(-\frac{N-p}{2};\frac{1}{2};\omega v^2\right) \qquad /4а/$$

$$\psi^{(-)}_{Np}(u,v) = \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(-1)^{N-1}}{2^N} \frac{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!\left(\frac{N-p-1}{2}\right)!}\, 4\omega u\cdot v\, e^{-\frac{\omega}{2}(u^2+v^2)} \times$$
$$\times F\left(-\frac{N+p-1}{2};\frac{3}{2};\omega u^2\right) F\left(-\frac{N-p-1}{2};\frac{3}{2};\omega v^2\right). \qquad /4б/$$

Ниже мы будем пользоваться двумя представлениями для параболических подбазисов.

Начнем с четного разложения. Пользуясь /1/ и /4а/ и переходя к пределу $r \to 0$, получим

$$\langle N, m=0 | N, p\rangle_+ = \frac{(-1)^N}{2^N} \frac{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!}. \qquad /5/$$

Для вычисления коэффициентов четного разложения /1/ при $m \neq 0$ поступаем следующим образом. Устремим в обеих частях разложения /1/ $\phi \to \pi$ и воспользуемся присущей двумерному атому водорода ортогональностью радиальных волновых функций /5/:

$$\int_0^\infty R_{Nm}(r)\, R_{Nm'}(r)\,\frac{dr}{r} = \frac{\omega^3}{m}\,\delta_{mm'}. \qquad /6/$$

Это позволит записать коэффициенты разложения в виде интеграла, и после использования формулы

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}\, F\left(-\frac{N-p}{2};\frac{1}{2};x\right) F(-N+m;2m+1;x)\,dx =$$
$$= \frac{(2m)!}{m}\,\frac{N!}{(N+m)!}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m, & -m \\ 1/2, & -N & \end{matrix}\,\Big|\,1\right\} \qquad /7/$$

получить

$$\langle N, m | N, p\rangle_+ = \frac{(-1)^{N-m}}{2^{N-1}}\sqrt{\frac{(N+p)!\,(N-p)!}{(N+m)!\,(N-m)!}}\;\frac{N!}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m, & -m \\ 1/2, & -N & \end{matrix}\,\Big|\,1\right\}. \qquad /8/$$

Коэффициенты нечетного разложения вычисляются аналогично. Единственный добавочный момент заключается в учете предельного равенства

$$\frac{\sin mx}{\sin x} \xrightarrow{x\to 0} (-1)^{m+1} m.$$

Окончательный результат таков:

$$\langle N, m | N, p\rangle_- = i\,\frac{(-1)^{N-m}}{2^{N-2}}\, m \sqrt{\frac{(N+p)!\,(N-p)!}{(N+m)!\,(N-m)!}}\;\frac{(N-1)!}{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!\left(\frac{N-p-1}{2}\right)!}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p-1}{2}, & m+1, & 1-m \\ 3/2 & 1-N & \end{matrix}\,\Big|\,1\right\}. \qquad /9/$$

Формулы /5/, /8/ и /9/ можно записать в одном и том же виде. Действительно, четырехкратно применяя тождество /6/

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix} a, & a', & -N \\ c', & 1-N-c & \end{matrix}\,\Big|\,1\right\} = \frac{\Gamma(c+a+N)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c+a)\,\Gamma(c+N)}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix} a, & c'-a', & -N \\ c', & c+a & \end{matrix}\,\Big|\,1\right\}, \qquad /10/$$

получим $(m \neq 0)$

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p-1}{2}, & 1+m, & 1-m \\ 3/2, & 1-N & \end{matrix}\,\Big|\,1\right\} = -i\,\frac{N}{2m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{N+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N-p}{2}+1\right)}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m, & -m \\ 1/2, & -N & \end{matrix}\,\Big|\,1\right\}$$

После этого легко написать единый ответ $(m \neq 0)$:

$$\langle N, m | N, p\rangle_\pm = (-1)^{N-m}\frac{N!}{2^{N-1}\Gamma\left(\frac{N+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{N-p}{2}+1\right)}\sqrt{\frac{(N+p)!\,(N-p)!}{(N+m)!\,(N-m)!}}\times$$

$$ {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m, & -m \\ 1/2, & -N & \end{matrix}\,\Big|\, 1\right\}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{m,0}\right). \qquad /11/ $$

3. Эллиптические координаты связаны с полярными следующим образом:

$$ \mathrm{ch}\,\xi = \frac{r}{R} + \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}\cos\phi + 1}, \qquad /12а/ $$

$$ \cos\eta = \frac{r}{R} - \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}\cos\phi + 1}. \qquad /12б/ $$

Они изменяются в пределах $0 \le \xi < \infty$, $-\pi \le \eta \le \pi$. $/R \ge 0/$. Подбазисы с данной четностью относительно преобразования $\eta \to -\eta$ даются выражениями [3]:

$$ \psi^{(+)}_{Nq}(\xi,\eta;R) = C^{(+)}_{Nq}(R)\,hc^{q}_{N}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}; -R\right) hc^{N-q}_{N}\left(\frac{\eta}{2}; R\right), $$

$$ \psi^{(-)}_{Nq}(\xi,\eta;R) = C^{(-)}_{Nq}(R)\,hs^{q}_{N}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}; -R\right) hs^{N-q}_{N}\left(\frac{\eta}{2}; R\right), $$

в которых

$$ hc^{q}_{N}(z,R) = e^{-\frac{\omega R}{2}\cos 2z} \sum_{s=0}^{N} a_{2s}\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right)^{s}, \qquad /13а/ $$

$$ hs^{q}_{N}(z,R) = e^{-\frac{\omega R}{2}\cos 2z}\, \frac{\sin 2z}{2} \sum_{s=0}^{N-1} a_{2s+1}\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right)^{s}, \qquad /13б/ $$

а $C^{(\pm)}_{Nq}(R)$ - нормировочные константы. Коэффициенты a_{2s} и a_{2s+1} считаются известными /см. ниже пункт 6/; в частности, $a_0 = 1$, $a_{-2} = 0$; $a_1 = 1$, $a_{-1} = 0$. Квантовое число q при данном N равно числу нулей угловой эллиптической функции, т.е. функции, зависящей от η. Для четного подбазиса $0 \le q \le N$, для нечетного q лежит в интервале $1 \le q \le N$.

Разложения эллиптических подбазисов по полярным имеют вид

$$ \psi^{(\pm)}_{Nq}(\xi,\eta;R) = \sum_{m=0;1}^{N} \langle N, m | N, q\rangle_{\pm}\, \psi^{(\pm)}_{Nm}(r,\phi). \qquad /14/ $$

Как и в пункте 2, устремляя r к нулю, получаем

$$ \langle N, m=0 | N, q\rangle_{+} = \left(\frac{\pi}{\omega^3}\right)^{1/2} C^{(+)}_{Nq}(R). \qquad /15/ $$

Вычисление остальных коэффициентов проводится в полной аналогии с тем, что делалось в пункте 2 для случая $m \ne 0$. Это приводит к формулам

$$ \langle N, m | N, q\rangle_{+} = (-1)^m \sqrt{2\pi}\,\frac{m}{\omega^3}\, C^{(+)}_{Nq}(R)\, e^{\frac{\omega R}{2}} \times $$

$$ \times \int_0^\infty hc^{q}_{N}\left(i\xi/2+\frac{\pi}{2}, -R\right) R_{Nm}\left(\frac{R}{2}(\mathrm{ch}\,\xi-1)\right) \frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi-1}\, d\xi, \qquad /16а/ $$

$$ \langle N, m | N, q\rangle_{-} = i(-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, C^{(-)}_{Nq}(R)\, e^{\frac{\omega R}{2}} \times $$

$$ \times \int_0^\infty hs^{q}_{N}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}, -R\right) R_{Nm}\left(\frac{R}{2}(\mathrm{ch}\,\xi-1)\right) d\xi. \qquad /16б/ $$

Пользуясь формулами /13а/, /13б/, /2в/ и интегрируя по $d\xi$, получаем

$$ \langle N, m | N, q\rangle_{+} = (-1)^m \left(\frac{\pi}{\omega^3}\right)^{1/2} C^{(+)}_{Nq}(R)\, \frac{2N!}{\sqrt{(N+m)!\,(N-m)!}} \qquad /17а/ $$

$$ \sum_{s=0}^{m} \frac{a_{2s}(-R)}{(-2\omega R)^s}\, \frac{(-m)_s (m)_s}{(-N)_s}, $$

$$ \langle N, m | N, q\rangle_{-} = \frac{(-1)^m}{2\omega R}\left(\frac{\pi}{\omega^3}\right)^{1/2} \frac{m(N-1)!}{\sqrt{(N+m)!\,(N-m)!}}\, C^{(-)}_{Nq}(R). \qquad /17б/ $$

$$ \sum_{s=0}^{m-1} \frac{a_{2s+1}(-R)}{(-2\omega R)^s}\, \frac{(m+1)_s (1-m)_s}{(1-N)_s}. $$

4. Рассмотрим теперь разложение эллиптических подбазисов по параболическим

$$ \psi^{(\pm)}_{Nq}(\xi,\eta;R) = \sum_{p} \langle N, p | N, q\rangle_{\pm}\, \psi^{(\pm)}_{Np}(u,v). $$

Переходя от параболических координат к эллиптическим

$$ u^2 = \frac{R}{2}(\mathrm{ch}\,\xi+1)(1+\cos\eta), \qquad v^2 = \frac{R}{2}(\mathrm{ch}\,\xi-1)(1-\cos\eta), $$

выбирая η равным π и пользуясь ортонормируемостью полиномов Эрмита, получим

$$ \langle N, p | N, q\rangle_{+} = (-1)^{\frac{N+p}{2}}\, \frac{2^{p+1}}{\omega}\, \frac{\left(\frac{N+p}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}\, C^{(+)}_{Nq}(R) \times \qquad /18а/ $$

$$ \times \int_0^\infty e^{-\frac{\omega R}{2}(\mathrm{ch}\,\xi-2)}\, hc^{q}_{N}\left(i\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{2}i - R\right) H_{N-p}\left(\sqrt{\omega R\,(\mathrm{ch}\,\xi-1)}\right) \frac{\sqrt{R(\mathrm{ch}\,\xi+1)}}{2}\, d\xi, $$

$$\langle N, p|N, q\rangle_- = (-1)^{\frac{N+p-1}{2}} \frac{2^p}{\omega^{3/2}} \frac{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}} C^{(-)}_{Nq}(R) \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\omega R}{2}(\mathrm{ch}\,\xi - 2)}}{\sqrt{R(\mathrm{ch}\,\xi + 1)}} \, hs_N^{N-q}\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}i - R\right) H_{N-p}\left(\sqrt{\omega R(\mathrm{ch}\,\xi - 1)}\right) \frac{\sqrt{R(\mathrm{ch}\,\xi+1)}}{2}\, d\xi . \qquad /18б/$$

Выразим в этих формулах полиномы Эрмита через вырожденные гипергеометрические функции и воспользуемся разложениями /13а/ и /13б/. Это позволит нам провести интегрирование и получить

$$\langle N, p|N, q\rangle_+ = (-1)^{\frac{N+p}{2}} \frac{2^N}{\omega^{3/2}} \frac{\left(\frac{N+p}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}} C^{(+)}_{Nq}(R) \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{N} \frac{a_{2s}(-R)}{(-2\omega R)^s} \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+1/2)}{\Gamma\left(s+1-\frac{N-p}{2}\right)} , \qquad /19а/$$

$$\langle N, p|N, q\rangle_- = (-1)^{\frac{N+p-1}{2}} \frac{2^{N-2}}{\omega^{5/2} R} \frac{\left(\frac{N+p-1}{2}\right)!}{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}} C^{(-)}_{Nq}(R) \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{N-1} \frac{a_{2s+1}(-R)}{(-2\omega R)^s} \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+3/2)}{\Gamma\left(s+1-\frac{N-p-1}{2}\right)} . \qquad /19б/$$

5. При $R \to 0$ эллиптические координаты переходят в полярные. Проследим за этим пределом в формулах /16/ и /18/. Из[3] известно, что при $R \to 0$

$$hc_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) \to \left(\frac{2}{\omega R}\right)^q \frac{(2q)!}{(2\omega)^{3/2}} \sqrt{\frac{(N-q)!}{(N+q)!}} R_{Nq}(r), \qquad /20а/$$

$$hs_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) \to -i\left(\frac{2}{\omega R}\right)^q \frac{(2q-1)!}{(2\omega)^{3/2}} \sqrt{\frac{(N-q)!}{(N+q)!}} R_{Nq}(r), \qquad /20б/$$

$$C^{(+)}_{Nq}(R) \to \frac{(-1)^q}{(2q)!} \left(\frac{8\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega R}{2}\right)^q \sqrt{\frac{(N+q)!}{(N-q)!}} , \qquad /20в/$$

$$C^{(-)}_{Nq}(R) \to \frac{(-1)^q 2q^2}{(2q)!} \left(\frac{8\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega R}{2}\right)^q \sqrt{\frac{(N+q)!}{(N-q)!}} \qquad /20г/$$

Пользуясь этими формулами, сразу получаем

$$\langle N, m=0|N, q\rangle_+ = 2\sqrt{2}\,\delta_{q0} , \qquad \langle N, m|N, q\rangle_\pm = \sqrt{2}\,\delta_{qm} .$$

Поставим теперь /20/ в /18/ и учтем /7/. Тогда после двукратного применения формулы /10/

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m+1/2, & -m+1/2 \\ 1/2, & 1/2-N & \end{matrix}\Big|\, 1\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{N+p+1}{2}\right) N!}{\Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+p}{2}\right)} {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p}{2}, & m, & -m \\ 1/2, & -N & \end{matrix}\Big|\, 1\right\}$$

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p-1}{2}, & m+1/2, & -m+1/2 \\ 3/2, & 1/2-N & \end{matrix}\Big|\, 1\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{N+p+2}{2}\right)(N-1)!}{\Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+p+1}{2}\right)} {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -\frac{N-p-1}{2}, & 1+m, & 1-m \\ 3/2, & 1-N & \end{matrix}\Big|\, 1\right\},$$

приходим к выводу, что при $m \neq 0$

$$\langle N, p|N, q\rangle_\pm \xrightarrow{R\to 0} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \langle N, p|N, m\rangle .$$

Фактор $1/\sqrt{2}$ возникает вследствие принятого нами условия нормировки

$$\int |\psi^{(\pm)}_{Nq}(\xi, \eta; R)|^2 dv = 1 , \quad \int |\psi^{(\pm)}_{Nm}(r, \phi)|^2 dv = 1/2 , \quad (m \neq 0) .$$

Рассмотрим теперь предел $R \to \infty$, в котором эллиптические координаты переходят в параболические. В этом пределе, согласно[3],

$$hc_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) \to (-1)^{\frac{N-p}{2}} \frac{\left(\frac{N-p}{2}\right)!}{(N-p)!} e^{-\frac{\omega R}{2} - \frac{\omega v^2}{2}} H_{N-p}(\sqrt{\omega}\, v)$$

$$hs_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) \to i(-1)^{\frac{N-p+1}{2}} \frac{\left(\frac{N-p-1}{2}\right)!}{(N-p)!} \frac{e^{-\frac{\omega R}{2} - \frac{\omega v^2}{2}}}{2\sqrt{2\omega R}} H_{N-p}(\sqrt{\omega}\, v)$$

$$C^{(+)}_{Nq}(R) \longrightarrow \frac{(-1)^N}{2^N} \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!}$$

$$C^{(-)}_{Nq}(R) \longrightarrow i\frac{(-1)^{N+1}}{2^N} \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{1/2} 8\omega R \frac{\sqrt{(N+p)!\,(N-p)!}}{\left(\frac{N+p}{2}\right)!\left(\frac{N-p}{2}\right)!}$$

Эти формулы приводят к результатам

$$<Nm\,|\,Nq>_{\pm} \xrightarrow{R\to\infty} <Nm\,|Np>_{\pm}\ ,\quad <Np\,|\,Nq>_{\pm} \xrightarrow{R\to\infty} \delta_{p,2q-N}\,.$$

6. Вернемся к формулам /17/ и /19/ и займемся коэффициентами a_{2s} и a_{2s+1}. Согласно [3], эти коэффициенты удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_{2s}\,a_{2s+2} + \beta_{2s}\,a_{2s} + R\gamma_{2s}\,a_{2s-2} = 0,$$

$$\alpha_{2s} = (s+1)(s+1/2),\qquad \beta_{2s} = -s^2 + [2s\omega + \frac{\omega}{2} - 1]R - A'^{(+)}(R), \qquad /21а/$$

$$\gamma_{2s} = 2\omega(-N+s-1);$$

$$\alpha_{2s+1}\,a_{2s+3} + \beta_{2s+1}\,a_{2s+1} + R\gamma_{2s+1}a_{2s-1} = 0,$$

$$\alpha_{2s+1} = (s+1)(s+3/2),\qquad \beta_{2s+1} = -(s+1)^2 - [2s\omega + \frac{3\omega}{2} - 1]R - A'^{(-)}(R), \qquad /21б/$$

$$\gamma_{2s+1} = 2\omega(s-N),$$

в которых величины $A'^{(\pm)}$ определяются из уравнений

$$\begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & & & \\ R\gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & R\gamma_{2N-2} & \beta_{2N-2} & \alpha_{2N-2} \\ & & & R\gamma_{2N} & \beta_{2N} \end{vmatrix} = 0, \qquad /22а/$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ R\gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & R\gamma_{2N-3} & \beta_{2N-3} & \alpha_{2N-3} \\ & & & R\gamma_{2N-1} & \beta_{2N-1} \end{vmatrix} = 0. \qquad /22б/$$

Квантовое число q, определяющее эллиптический базис, нумерует в порядке возрастания корни этих уравнений. Находя из /22/ корни $A'^{(\pm)}_{Nq}(R)$ и далее определяя a_{2s} и a_{2s+1} из /21/, можно построить коэффициенты $<Nm\,|\,Nq>_{\pm}$ и $<Np\,|\,Nq>_{\pm}$. Результаты таких вычислений приведены в табл. 1-4.

В заключение выражаем искреннюю благодарность Я.А.Смородинскому, Л.И.Пономареву, А.В.Матвеенко, С.И.Виницкому за полезные обсуждения.

Таблица 1

N	m	$<Nm\,\|\,Nq>_+$	$A'^{(+)}$
0	0	1	$A'^{(+)} = 0$
1	0	$\left\{\frac{A'^{(+)}+1}{2A'^{(+)}+1}\right\}^{\frac{1}{2}}$	$A'^{(+)}(A'^{(+)}+1) =$
1	1	$\frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{A'^{(+)}}{R}\left\{\frac{A'^{(+)}+1}{2A'^{(+)}+1}\right\}^{1/2}$	$= \frac{4}{9}R^2$
2	0	$\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A'^{(+)}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	1	$\frac{5}{\sqrt{6}}\,\frac{A'^{(+)}}{R}\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A'^{(+)}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$A'^{(+)}(A'^{(+)}+1)(A'^{(+)}+4) =$
2	2	$\frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A'^{(+)}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A'^{(+)}}{A'^{(+)}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$= \frac{16R^2}{25}(A'^{(+)}+3)$

Таблица 2

N	m	$<Nm\,\|\,Nq>_-$	$A'^{(-)}$
1	1	$-\sqrt{2}$	$A'^{(-)} = -1$
2	1	$-\sqrt{2}\left(\frac{A'^{(-)}+4}{2A'^{(-)}+5}\right)^{1/2}$	$(A'^{(-)}+1)(A'^{(-)}+4) =$
2	2	$-\frac{5}{\sqrt{2}}\,\frac{A'^{(-)}+1}{R}\left(\frac{A'^{(-)}+4}{2A'^{(-)}+5}\right)^{1/2}$	$= \frac{4}{25}R^2$
3	1	$-\sqrt{2}\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A'^{(-)}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A'^{(-)}+1}{A'^{(-)}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
3	2	$-\frac{7}{\sqrt{5}}\,\frac{A'^{(-)}+1}{R}\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A'^{(-)}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A'^{(-)}+1}{A'^{(-)}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(A'^{(-)}+1)(A'^{(-)}+4)(A'^{(-)}+9) = \frac{16R^2}{49}(A'^{(-)}+6)$
3	3	$-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\frac{A'^{(-)}+1}{A'^{(-)}+9}\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A'^{(-)}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A'^{(-)}+1}{A'^{(-)}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 3

N	p	$<Np \mid Nq>_+$	$A^{(+)'}$
0	0	1	$A^{(+)'} = 0$
1	1	$\frac{3}{4R}\left(A^{(+)'} - \frac{2R}{3}\right)\left\{\frac{2(A^{(+)'}+1)}{2A^{(+)'}+1}\right\}^{1/2}$	$A^{(+)'}(A^{(+)'}+1) = \frac{4}{9}R^2$
1	-1	$-\frac{3}{4R}\left(A^{(+)'} + \frac{2R}{3}\right)\left\{\frac{2(A^{(+)'}+1)}{2A^{(+)'}+1}\right\}^{1/2}$	
2	2	$\frac{25}{24}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{A^{(+)'}}{R^2}\left(A^{(+)'}+1-\frac{4R}{5}\right)\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A^{(+)'}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)'}+4}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$	$A^{(+)'}(A^{(+)'}+1)(A^{(+)'}+4) = \frac{16R^2}{25}(A^{(+)'}+3)$
2	0	$\frac{2}{A^{(+)'}+}\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A^{(+)'}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)'}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	-2	$\frac{25}{24}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{A^{(+)'}}{R^2}\left(A^{(+)'}+1+\frac{4R}{5}\right)\left\{1+\frac{25}{12}\left(\frac{A^{(+)'}}{R}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)'}+4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 4

N	p	$<Np \mid Nq>_-$	$A^{(-)'}$
1	0	$-i$	$A^{(-)'} = 1$
2	1	$-\frac{i}{\sqrt{2}}\,\frac{5}{2R}\left(A^{(-)'}+1-\frac{2R}{5}\right)\left(\frac{A^{(-)'}+4}{2A^{(-)'}+5}\right)^{1/2}$	$(A^{(-)'}+1)(A^{(-)'}+4) = \frac{4}{25}R^2$
2	-1	$\frac{i}{\sqrt{2}}\,\frac{5}{2R}\left(A^{(-)'}+1+\frac{2R}{5}\right)\left(\frac{A^{(-)}+4}{2A^{(-)}+5}\right)^{1/2}$	
3	2	$-i\frac{49}{8\sqrt{5}}\,\frac{A^{(-)'}+1}{R^2}\left(A^{(-)'}+4-\frac{4R}{7}\right)\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{A^{(-)'}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(A^{(-)'}+1)(A^{(-)'}+4)(A^{(-)'}+9) = \frac{16R^2}{49}(A^{(-)'}+6)$
3	0	$-i\frac{2\sqrt{6}}{A^{(-)'}+9}\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{A^{(-)}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
3	-2	$-\frac{i}{\sqrt{5}}\,\frac{49}{8}\,\frac{A^{(-)'}+1}{R^2}\left(A^{(-)'}+4+\frac{4R}{7}\right)\left\{1+\frac{49}{10}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{R}\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{A^{(-)'}+1}{A^{(-)'}+9}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaslow B., Zandler M.E. Am.J.Phys., 1967, 35, p. 1118.
2. Cisneros A. Melntosh H.Y. J.Math.Phys., 1968, 10, p. 277.
3. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, Р2-83-475, Дубна, 1983.
4. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, Р2-83-899, Дубна, 1983.
5. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. Изв. АН АрмССР, сер.физ., 1984, т. 19, с. 45.
6. Bailey W.N. "Generalized Hypergeometric Series" Cambridge Tract No 32, Cambridge 1935.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1984 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д2,4-83-179	Труды XУ Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Мардоян Л.Г. и др. Р2-84-86
Межбазисные разложения в двумерном атоме водорода

Показано, что коэффициенты разложения параболических подбазисов двумерного атома водорода по полярным подбазисам выражаются через обобщенную гипергеометрическую функцию $_3F_2$ при значении аргумента $x = 1$. Исследованы также разложения эллиптического базиса по полярному и параболическому. Прослежены пределы $R \to 0$ и $R \to \infty$ /R - параметр, входящий в определение эллиптических координат/ в разложениях эллиптического базиса и получены формулы, выражающие коэффициенты разложений эллиптического базиса через эллиптическую константу разделения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Думбрайс

Mardoyan L.G. et al. P2-84-86
Interbasis Expansions in a Two-Dimensional Hydrogen Atom

It is shown that the expansion coefficients of parabolic sub-bases of a two-dimensional hydrogen atom over polar sub-bases are expressed in terms of a generalized hypergeometric function $_3F_2$ at the argument $x = 1$. Expansions of an elliptic basis over the polar and parabolic ones are studied as well. The limits $R \to 0$ and $R \to \infty$ (R is a parameter of the definition of elliptic coordinates) are traced in elliptic-basis expansions, and formulas are found for the expansion coefficients of the elliptic basis in terms of the elliptic separation constant.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984