сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-84-836

А.А.Боголюбская, И.Л.Боголюбский

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФЕРМИОННОГО ПРОПАГАТОРА В НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1984

Настоящая работа, как и предыдущая [I], посвящена вычислению с помощью ЭВМ пропагатора фермионов (ПФ) в решеточных калибровочных теориях. Интерес к этой вычислительной задаче связан с интенсивно проводимыми в мире расчетами в рамках решеточной квантовой хромодинамики (КХД) (см.обзоры [2-4]). Как показано в работах [5], фермионы не могут быть размещены на решетке так, чтобы сохранялась локальность взаимодействия, киральная симметрия исходного лагранжиана в пределе нулевой массы и одновременно не происходило нефизическое "удвоение" (doubling) фермионов, т.е. возникновение вместо одного 2^D экземпляров фермионов (здесь D - размерность евклидова пространства-времени). Именно 2^D "сортов" возникает вместо одного, когда рассматриваются "наивные" фермионы, которые возникают при использовании наиболее естественной аппроксимации второго порядка точности фермионной части исходного лагранжиана. Широко используемая при расчетах спектра масс адронов (см.,например [2]) формулировка Вильсона [6] решает проблему удвоения ценой нарушения киральной симметрии лагранжиана и дает поэтому искаженное описание легких кварков. По-видимому, наиболее удачное размещение фермионов на решетке достигается в подходе Когута-Сасскинда [7,8], где сохраняется дискретный аналог киральной симметрии, а число сортов есть $2^{D/2}$. Наконец, в работе [9] было предложено описание, относительно которого утверждалось, что оно решает проблему удвоения без искажения киральных свойств.

В данной работе мы применим метод сопряженных градиентов [I0] (МСГ) для расчета ПФ в отмеченных выше формулировках. Мы ограничимся рассмотрением двумерной (D=2) решеточной квантовой электродинамики (КЭД), что позволит провести методические исследования с существенно меньшими затратами ресурсов ЭВМ.

В рамках КЭД дискретному аналогу калибровочно-инвариантного оператора Дирака (D(U) + m) соответствует фермионная матрица

$$F_{x\alpha,y\beta} = \delta_{xy}\,\delta_{\alpha\beta} - kH_{x\alpha,y\beta} \qquad (I)$$

(для фермионов Когута-Сасскинда индексы α , β отсутствуют, $\delta_{\alpha\beta}$ заменяется единицей).

Для "обобщенных" фермионов Вильсона матрица H имеет вид[6,II]

$$H_{x\alpha,y\beta} = (r-\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\, U_{x\mu}\, \delta_{x,y-\hat\mu} + (r+\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\, U^{+}_{x-\hat\mu,\mu}\, \delta_{x,y+\hat\mu} . \quad (2)$$

Собственно фермионы Вильсона получаются при $r=1$. Здесь дискретные индексы x, y выделяют узлы на решетке в двумерном евклидовом пространстве, α, β - индексы евклидовых матриц $\gamma^{\mu}(\alpha,\beta,\mu=1,2)$,

$$\gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

комплексные числа $U_{x\mu} \in U(1)$, $U^{+} = U^{*}$ для $U_{x\mu} \in U(1)$. Обозначение $U_{x\mu}$ показывает, что это число задано на ребре x, ориентированном в положительном направлении оси с номером μ, $\hat\mu$ - единичный вектор по этой оси; ребру, проходимому из точки x в отрицательном направлении, соответствует элемент $U^{+}_{x-\mu,\mu}$. Параметр $k = (2Dr + 2ma)^{-1} = (4r + 2ma)^{-1}$, ma - безразмерная масса фермиона, a - длина ребра решетки. Отметим, что в данной формулировке $k < \frac{1}{2Dr}$.

Нумерация узлов и ребер решетки аналогична нумерации[I] (с заменой $D=4$ на $D=2$), а именно, пусть $x = (x_1, x_2)$, $x_\mu = 1,2,\dots,N_\mu$, где N_μ - число узлов решетки по направлению μ ($\mu = 1,2$). Тогда номер узла

$$n(x) = 1 + (x_1 - 1) + (x_2 - 1) N_1 , \quad (4)$$

а номер ребра $L_{x\mu}$, выходящего из этого узла в положительном направлении оси μ

$$L_{x\mu} = n(x) + (\mu - 1)\, n_{max} , \quad (5)$$

$$n_{max} = N_1 N_2 .$$

Пропагатором фермиона из точки x_0 в точку y является элемент обратной матрицы $F^{-1}_{x_0 y}$. Для определения $F^{-1}_{x_0 y}$ (x_0 - фиксирована, $y = y_1,\dots,y_{n\,max}$) при заданных индексах α,β удобно вычислять элементы $C^{-1}_{yx_0} = F^{-1}_{x_0 y} = X_{x_0 y}$ матрицы C, определенной равенством:

$$C_{x\alpha,y\beta} = F_{y\alpha,x\beta} , \quad (6)$$

т.е. матрицы, получаемой из F транспонированием только по индексам x,y узлов решетки. Аналогично введем матрицу N:

$$N_{y\alpha,x\beta} = H_{x\alpha,y\beta} . \quad (7)$$

Тогда надо решить уравнение $Cx = e$, где $X = \{X_{y\alpha,x_0\beta}\}$, $e = \delta_{yx_0}\delta_{\alpha\beta}$.

В случае фермионов Вильсона эффективным оказался алгоритм[I], в котором уравнение $CX = e$, преобразованное к виду

$$(E + kN)\, CX = (E + kN)\, e , \quad (8)$$

решалось методом сопряженных градиентов (МСГ) после второй трансформации Гаусса (см.[I0]) (формулы итерационного процесса см. в[I]). Смысл преобразования к виду (8) состоит в том, что в силу малости параметра k для фермионов Вильсона ($k = (2D + 2ma)^{-1} \ll 1$) матрица $(E + kN)C = E - k^2N^2$ близка к E.

Расчеты на решетке $I0^2$ ($N_1 = N_2 = 10$) показали, что в случае свободных фермионов (все $U_{x\mu} = 1$) Вильсона в двумерной КЭД итерационный процесс сходится за I0 итераций даже при очень малых ma.

Рассмотрим теперь "наивные" фермионы, возникающие при замене ковариантной производной ($a=1$)

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow \frac{U_{x\mu}\psi(x+\hat\mu) - U^{+}_{x-\mu,\mu}\psi(x-\hat\mu)}{2} . \quad (9)$$

При этом фермионная матрица приобретает вид (I), где

$$H_{x\alpha,y\beta} = -(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\, U_{x\mu}\, \delta_{x,y-\hat\mu} + (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\, U^{+}_{x-\hat\mu,\mu}\, \delta_{x,y+\hat\mu} , \quad (I0)$$

$k = (2ma)^{-1}$. Эта формулировка соответствует выбору значения $r = 0$ в формуле (2). Видно, что для легких фермионов (например, легких кварков) $k \to \infty$, когда $ma \to 0$. Тем не менее расчеты на решетке $I0^2$ показали, что даже при $ma = 0,1$ ($к=5$), используемый итерационный процесс[I] сходится за 6 итераций.

Перейдем к рассмотрению фермионов Джекобса[9], для которых используется аппроксимация I-го порядка для $D_\mu \psi$:

$$D_\mu \psi(x) \simeq \frac{1}{2}\left\{\left[U_{x\mu}\psi(x+\hat\mu) - \psi(x)\right](1+\varphi_x) - \left[\psi(x) - U^{+}_{x-\hat\mu,\mu}\psi(x-\hat\mu)\right](1-\varphi_x)\right\}.$$

Здесь φ_x - случайная скалярная величина, зависящая от координат узла x, имеющая ширину распределения $\Delta \ll 1$. Фермионную матрицу можно по-прежнему представить в виде (I), где

$$H_{x\alpha,y\beta} = 2\varphi_x \delta_{xy} \Big(\sum_{\mu=1}^{D} \gamma_\mu\Big)_{\alpha\beta} + \quad (I2)$$

$$+ \left[-\gamma_\mu U_{x\mu}(1+\varphi_x)\, \delta_{x,y-\hat\mu} + \gamma_\mu U^{+}_{x-\hat\mu,\mu}(1-\varphi_x)\right].$$

Как и "наивные" фермионы, фермионы Джекобса являются киральными. В работе /9/ были приведены качественные рассуждения в пользу того, что для них явление удвоения не наблюдается, кроме того, там представлены результаты расчетов методом Монте-Карло в рамках двумерной модели /13/, иллюстрирующие отсутствие удвоения. С другой стороны, в работе /12/ аналитически показано, что введение случайного поля φ_x в узлах решетки не решает проблему удвоения, по крайней мере, в рамках теории возмущений.

Мы выполним расчеты пропагатора фермионов Джекобса в рамках двумерной КЭД на решетке 10^2 со случайным полем φ_x, имеющим равномерное распределение на отрезке $[-\Delta, \Delta]$. Величина Δ изменялась от 0,025 до 0,2 (отметим, что при $\Delta = 0$ получаем "наивный" случай). Расчеты были выполнены для свободных фермионов при следующих значениях параметров ($N_{conv.}$ - число итераций, требующееся для достижения относительной точности $\delta = 10^{-3}$):

1) $ma = 0{,}002$ $\quad \Delta = 0{,}025$ $\quad N_{conv} = 23$
2) $ma = 0{,}002$ $\quad \Delta = 0{,}025$ $\quad N_{conv} = 31$
3) $ma = 0{,}1$ $\quad \Delta = 0{,}025$ $\quad N_{conv} > 36$
4) $ma = 0{,}5$ $\quad \Delta = 0{,}025$ $\quad N_{conv} = 23$.

Отметим, что N_{conv} не является монотонной функцией параметра ma. Далее, с увеличением Δ число итераций N_{conv} увеличивается.

Посмотрим, как изменяется с ростом Δ функция

$$G(n_2) = \left|\sum_{n_1=1}^{N_1} F^{-1}_{x_0\alpha, y\alpha}\right|, \text{где } x_0 = \{1,1\}, \quad y = \{n_1, n_2\}, \quad ma = 0{,}002 .$$

Таблица I. Зависимость $G(n_2, \Delta)$.

n_2 \ Δ	0,025	0,05
I	0,408	0,4I7
2	$0{,}25I\cdot 10^{-3}$	$0{,}492\cdot 10^{-3}$
3	0,402	0,404
4	$0{,}I23\cdot 10^{-3}$	$0{,}237\cdot 10^{-3}$
5	0,404	0,409
6	$0{,}72\cdot 10^{-5}$	$0{,}292\cdot 10^{-4}$
7	0,4I2	0,425
8	$0{,}I39\cdot 10^{-3}$	$0{,}302\cdot 10^{-3}$
9	0,409	0,4I8
I0	$0{,}268\cdot 10^{-3}$	$0{,}56\cdot 10^{-3}$

Отметим, что зависимость F^{-1} от n_1 и n_2 имеет характерный пилообразный вид, очень близкий к виду зависимости для "наивных" фермионов (для последних $F^{-1}(n_1, n_2) = 0$, если одно из чисел n_1, n_2 - четное, соответствующие $F^{-1}(n_1, n_2)$ для фермионов (II), (I2) также малы). Далее, видно, что для четных n_2 отличие $G(n_2)$ при $\Delta = 0{,}025$ и $\Delta = 0{,}05$ составляет не более 3%. Таким образом,

$$\frac{|G_{Jacobs}(n_2) - G_{Naive}(n_2)|}{|G_{Naive}(n_2)|} \lesssim \Delta ,$$

а решение проблемы удвоения фермионов было бы получено, если бы

$$G_{Naive} / G_{Jacobs} \simeq 2^D = 4.$$

Итак, наши расчеты в рамках двумерной КЭД показывают, что аппроксимация (II) не решает проблемы удвоения, а в то же время понижает порядок аппроксимации члена $D_\mu \psi$ и приводит к значительному ухудшению сходимости итерационного процесса МСГ.

Наибольшее внимание мы уделили расчетам пропагатора фермионов Когута-Сасскинда (КС). Эта формулировка возникает после применения к спинорам $\psi(x)$, описывающим "наивные" фермионы, унитарного преобразования $\psi \to \chi$ /8/:

$$\psi(x) = T(x)\chi , \quad \bar{\psi}(x) = \chi(x) T^+(x) , \tag{I3}$$

где

$$T(x) = \prod_{\mu=1}^{D} (\gamma_\mu)^{x_\mu}. \tag{I4}$$

Спиноры $\chi(x)$ имеют единственную ненулевую компоненту, в результате число степеней свободы сокращается в D раз (при $D=2$ и $D=4$); это является важным положительным фактором при расчетах на ЭВМ, т.к. требуемая память ЭВМ и машинное время уменьшаются пропорционально D^{-2}. У фермионной матрицы теперь нет спинорных индексов, и она имеет вид

$$\begin{aligned} F_{xy} &= \delta_{xy} - \frac{1}{2ma} H_{xy} , \\ H_{xy} &= \left[-U_{x\mu}\, \delta_{x,y-\mu} + U^+_{x-\mu,\mu}\, \delta_{x,y+\hat{\mu}} \right] \eta_\mu(x) , \\ \eta_i(x) &= (-1)^{x_1 + \ldots + x_{i-1}}, \qquad \eta_1 = 1. \end{aligned} \tag{I5}$$

Сначала мы выполнили расчеты свободного пропагатора при различных ma на решетках $N \times N$, ($N = 10, 20, 30$). Для вычислений пропагатора фермионов КС мы использовали метод сопряженных градиентов после второй трансформации Гаусса, причем, в отличие от случая фермионов Вильсона, более эффективным оказался алгоритм без предварительного преобразования уравнения (умножения на матрицу ($E+kN$)). Расчетные формулы итерационного процесса имеют вид

$$
\begin{aligned}
&R_0 = e - CX_0, \\
&P_0 = C^+R_0 , \\
&R_{i+1} = R_i - a_i CP_i , \\
&P_{i+1} = C^+R_{i+1} + b_i P_i , \\
&a_i = |R_i|^2 \, |P_i|^{-2} , \\
&b_i = |R_{i+1}|^2 \, |R_i|^{-2} , \\
&X_{i+1} = X_i + a_i P_i , \quad i = 0,1,2,\ldots, \quad X_0 = e.
\end{aligned} \tag{I6}
$$

Таблица 2 дает представление о зависимости N_{conv} от размера решетки N ($N_1 = N_2 = N$) и параметра ma для свободных фермионов КС ($\delta < 10^{-3}$)

ma \ N	I0	20	30
0,5		I4	
0,I	6	I6	23
0,05		I6	

Таблица 2. Зависимость $N_{conv}(N,ma)$.

Напомним, что по известной теореме /I0/ метод сопряженных градиентов сходится за P итераций, где P -порядок обращаемой матрицы (в данном случае $P = N_1N_2 = N^2$). Видно, что в свободном случае $N_{conv} \ll P$, и при больших N рост N_{conv} с увеличением N становится достаточно медленным. Далее отметим, что при уменьшении ma свободного фермиона N_{conv} практически не изменяется.

Во второй серии расчетов на ребрах решетки задавались элементы $U(L)$ формулой

$$U(L) = \exp(2\pi i L/L_{max}) , \tag{I7}$$

здесь L -номер ребра (см.(5)), $L_{max} = D\, N_1N_2 = 2N^2$. Для расчета пропагатора с такой же ($\delta < 10^{-3}$) точностью в этом случае требуется большее N_{conv} (см. табл.3).

ma \ N	I0	20	30
0,5		I8	
0,I	3I	42	55
0,05		57	
0,0I	45	90	

Таблица 3.
Зависимость N_{conv} (N, ma) в случае полевой конфигурации (I7).

Рост N_{conv} (N) для распределения (I7) еще более медленный, чем для свободных фермионов, что показывает применимость МСГ для расчетов на больших решетках. В отличие от свободного случая при уменьшении массы фермиона ma число итераций заметно расчет.

Таким образом, метод сопряженных градиентов позволяет эффективно рассчитывать пропагатор фермионов в различных решеточных формулировках калибровочных теорий, в том числе в формулировке Когута-Сасскинда, являющейся в настоящее время наиболее удачной в теоретическом смысле и требующей минимальной памяти при расчетах на ЭВМ.

Литература

I. Боголюбский И.Л., Боголюбская А.А. ОИЯИ, Р2-83-886, Дубна, I983.
2. Creutz M.,Jacobs L., Rebbi C. Phys. Reports, 1983, 95,p.201.
3. Kogut J.B. Rev. Mod. Phys., 1983, 55,p.775 .
4. Hasenfratz P. Lattice quantum chromodynamics. CERN - preprint, TH. 3737 - CERN, 1983.
5. Chodos A., Healy J.B. Phys. Rev., 1977, D16, p.387; Karsten L.,Smit J. Nucl. Phys., 1981, B183, p.103. Kerler W. Phys. Rev., 1981, D23, p.2384; Nielsen H., Ninomiya M., Nucl. Phys., 1981, B195, p.20; ibid, 1981, B193, p. 173.
6. Wilson K., in: New Phenomena in Subnuclear Physics (Ed. by A. Zichichi), Plenum Press, New York, 1977.
7. Kogut J., Susskind L. Phys. Rev., 1975, D11, p.395.
8. Kawamoto N., Smit J. Nucl. Phys., 1981, B192, p. 100.
9. Jacobs L. Phys. Rev. Lett., 1983, 51, p. 172.
I0. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, Москва-Ленинград, I963.

II. Hamber H., Parisi G. Phys. Rev., 1983, D27, p.208.
I2. Parisi G., Zhang Yi-Cheng. Phys. Lett., 1984, B132, p.130.
I3. Scalapino D., Sugar R. Phys. Rev. Lett., 1981, 46, p.519.

Рукопись поступила в издательский отдел
2I декабря 1984 года.

Боголюбская А.А., Боголюбский И.Л. Р2-84-836
Вычисление фермионного пропагатора в некоторых двумерных решеточных моделях квантовой электродинамики

Для вычисления на ЭВМ фермионных пропагаторов в различных решеточных формулировках двумерной теории поля с фермионами используются два варианта метода сопряженных градиентов /МСГ/. На решетках различного размера $N \times N$ вычислены пропагаторы фермионов Вильсона, "наивных" фермионов, фермионов Когута-Сасскинда и Джекобса. Численными расчетами показано, что аппроксимация Джекобса не решает проблему "удвоения". Число итераций N_{conv}, требующееся для вычисления МСГ-пропагатора фермионов Когута-Сасскинда с точностью $\delta < 10^{-3}$, растет с увеличением размера решетки медленнее, чем N; N_{conv} увеличивается с уменьшением массы фермиона.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой.

Bogolubskaya A.A., Bogolubsky I.L. P2-84-836
Fermion Propagator Calculation in Some Two-Dimensional Models of Lattice Quantum Electrodynamics

Two variants of conjugate gradient method (CGM) are used for computer calculations of fermion propagators in various formulations of two-dimensional lattice gauge theory including fermions. Propagator of Wilsion fermions, naive fermions, Jacobs fermions and Kogut-Susskind fermions are computed on various size NxN lattices. Numerical calculations indicate that Jacobs formulation does not solve the "doubling problem". The number of iterations N_{conv} needed for calculation of fermion propagator by means of CGM with relative accuracy 10^{-3} increases with the size of lattice slower than N; N_{conv} grows with decreasing of the fermion mass.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984