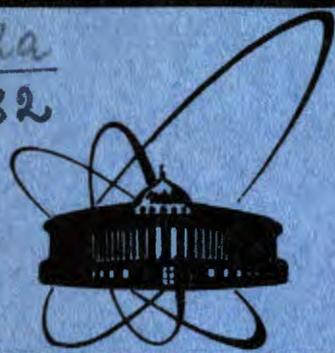


2341/84

К 3202

C133.2a
M-482



**Объединенный
Институт
Ядерных
Исследований
Дубна**

P2-84-81

В.К.Мельников

**МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ,
ГИПОТЕЗЫ И ФАКТЫ**

Направлено в Оргкомитет VII Международного
совещания по проблемам квантовой теории поля
/Алушта, 21-25 апреля 1984 г./

1984

В настоящее время метод обратной задачи рассеяния является одним из наиболее эффективных методов исследования нелинейных задач. Непреходящая ценность получаемых с его помощью результатов заключается прежде всего в их завершенности. В процессе своего развития метод обратной задачи позволил обнаружить удивительные связи, существующие между различными и, казалось бы, никак не связанными между собой результатами математического анализа и классической механики с одной стороны, и весьма далекими разделами теоретической и математической физики - с другой. Обнаруженные связи являются убедительным свидетельством единства этих наук. В нелинейную механику метод обратной задачи принес новые идеи и концепции, позволившие по-новому взглянуть на многие уже известные явления. Все это объясняет тот повышенный интерес, который проявляют к методу обратной задачи как математики, так и физики-теоретики.

В могучем потоке работ, посвященных развитию и применению метода обратной задачи, следующие две проблемы находятся и, по-видимому, еще долго будут находиться в центре. Прежде всего, - это поиск новых нелинейных систем, для исследования которых применим метод обратной задачи. Затем следует вторая, тесно связанная с первой, проблема нахождения решения обратной задачи рассеяния применительно к новым классам операторов, используемых в рамках названного метода. На основании имеющихся достижений можно попытаться сделать кое-какие прогнозы на будущее.

Начнем с такого вопроса. Характерной чертой систем, интегрируемых методом обратной задачи, является высокая степень симметрии, находящая выражение в существовании бесконечного числа законов сохранения. Возникает естественный вопрос: является ли это свойство достаточным для применимости метода обратной задачи, т.е. любая ли система, имеющая бесконечно много законов сохранения, может быть проинтегрирована с помощью метода обратной задачи? Приводимый ниже пример показывает, что это не так. Действительно, система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} (vw),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v + 4 \frac{\partial}{\partial x} (uv) = 0,$$

//

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 4u \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w$$

имеет бесконечное число законов сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} T_m + \frac{\partial}{\partial x} X_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где T_m и X_m - полиномы от u, v, w и их производных по x соответствующего порядка. Справедливы равенства

$$T_0 = vw, \quad T_1 = 4uvw - vw' + v'w,$$

$$T_2 = 4u^2vw - 2u(vw' - v'w) - v^2w^2 - v'w',$$

$$T_3 = 32u^3vw - 24u^2(vw' - v'w) - 24uv^2w^2 + 8u(vw'' - v'w' + v''w) + \\ + 6vw(vw' - v'w) - (vw''' - v'w'' + v''w' - v'''w),$$

где штрихами обозначены производные по x . С другой стороны, система /1/ обладает инвариантным многообразием $v = w = 0$. Движение на этом многообразии описывается уравнением Кортевега-де Вриза-Бюргера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

о котором известно, что его невозможно проинтегрировать с помощью метода обратной задачи рассеяния.

К сказанному выше можно добавить следующее. Рассмотрим нелинейную эволюционную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots), \quad /2/$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $F = (F_1, \dots, F_n)$. С этой системой тесно связана система с конечным числом степеней свободы:

$$\dot{z} = f(z), \quad /3/$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$, а $f(z) = F(z, 0, 0, \dots)$. Система /3/ описывает эволюцию во времени не зависящих от x решений системы /2/. Зададимся вопросом: какова связь между системами /2/ и /3/? В частности, будет ли система /3/ вполне интегрируемой, если система /2/ интегрируется с помощью метода обратной задачи? Если ответ на этот вопрос положителен, то отсюда следует, что создание эффективного метода, позволяющего в общем случае ответить на вопрос - интегрируема ли система /2/ с помощью метода обратной задачи, вряд ли осуществимо в обозримом будущем, ибо, безусловно, более простая задача определения условий полной интегрируемости системы /3/ не решена при $n > 1$, несмотря на усилия многих мате-

матиков на протяжении двух последних столетий. Если же из применимости метода обратной задачи к интегрированию системы /2/ не следует полной интегрируемости /3/, то это значит, что с помощью изучения стохастического характера поведения решений системы /3/ нельзя делать решающих выводов о неприменимости метода обратной задачи к интегрированию системы /2/. В настоящее время исследования ведутся в обоих названных выше направлениях. Сформулированная выше дилемма означает, что по крайней мере одно из этих направлений не оправдывает возлагающихся на него надежд.

Вообще следует иметь в виду, что даже вполне интегрируемая система с бесконечным числом степеней свободы может иметь конечномерные инвариантные многообразия, на которых ее поведение может носить довольно экстравагантный характер. Так, например, уравнение

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \sin \phi \quad /4/$$

имеет инвариантное многообразие, образуемое решениями вида $\phi = q(x)$, $z = \frac{1}{4}(x^2 - t^2)$, если функция $q = q(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{dq}{dz} \right) + \sin q = 0. \quad /5/$$

Это так называемые автомодельные решения уравнения /4/, инвариантные относительно преобразований группы Лоренца. Уравнение /5/ описывает движение маятника, масса которого является линейной функцией независимой переменной z . Система /5/ является гамильтоновой, однако не имеет ни одного первого интеграла.

Ее гамильтониан H имеет вид $H = \frac{p^2}{2z} - \cos q$ и тоже не является первым интегралом.

Поведение траекторий уравнения /5/ при $z > 0$ легко можно представить, если перейти к новой независимой переменной $y = \ln z$. В результате уравнение /5/ примет вид

$$\frac{d^2 q}{dy^2} + e^y \sin q = 0. \quad /6/$$

Отсюда следует, что почти все решения этого уравнения при $y \rightarrow \infty$ будут на плоскости $(q, dq/dy)$ накручиваться спиралями на устойчивые положения равновесия вида $q_k = 2k\pi$, $dq/dy = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Решения, накручивающиеся на разные устойчивые положения равновесия, будут разделяться сепаратрисными поверхностями, образованными решениями, которые при $y \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к неустойчивым положениям равновесия вида $q_k = (2k+1)\pi$, $dq/dy = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При $y \rightarrow -\infty$ решения уравнения /6/ допускают представление $q = c_1 y + c_0 + p(y, c_0, c_1)$, где c_0

и c_1 - константы, принимающие произвольные вещественные значения, а функция $p(y, c_0, c_1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$ равномерно по c_0 и c_1 . При $z < 0$ поведение траекторий уравнения /5/ имеет аналогичный характер. Этот случай с помощью замены $z \rightarrow -z$, $q \rightarrow q + \pi$ сводится к рассмотренному ранее.

После всего сказанного становится ясным, что поиск частных критериев применимости метода обратной задачи для интегрирования новых нелинейных эволюционных уравнений является в настоящее время весьма актуальным.

Предлагаемый нами прием оказался плодотворным и позволил найти несколько новых систем, интегрируемых методом обратной задачи. Суть его состоит в следующем. Пусть система S_1 интегрируется с помощью метода обратной задачи для оператора \mathcal{L}_1 , а система S_2 - для оператора \mathcal{L}_2 . Рассмотрим вопрос: какое взаимодействие между системами S_1 и S_2 допустимо, чтобы получившаяся в результате система S могла быть проинтегрирована с помощью метода обратной задачи для некоторого оператора \mathcal{L} , и как этот оператор связан с операторами \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 ? В качестве иллюстрации к сказанному выше предположим, что система S_1 описывает распространение длинных волн, а система S_2 - распространение пакета коротких волн. Системы первого типа описываются с помощью уравнений Кортевега-де Вриза, Буссинеска и некоторых других. Системы второго типа допускают описание с помощью уравнения Шредингера или нелинейного уравнения Шредингера. Для интегрирования систем первого типа применим, как известно, оператор \mathcal{L}_1 вида

$$\mathcal{L}_1 = L = \partial^{k_0+2} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \partial^k, \quad k_0 \geq 0, \quad /7/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x , а u_0, \dots, u_{k_0} - функции x и времени t . Для интегрирования систем второго типа, как известно, применим оператор \mathcal{L}_2 вида

$$\mathcal{L}_2 = X = \begin{vmatrix} \partial & v \\ w & \partial \end{vmatrix},$$

где v и w - функции x и t . А теперь с помощью операторов L и X образуем оператор \mathcal{L} вида

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} L & v \\ w & \partial \end{vmatrix} \quad /8/$$

и применим его для интегрирования системы уравнений, описывающей взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн или, выражаясь иначе, - для описания взаимодействия "жесткой" и "мягкой" подсистем. Такого рода разбиение системы на "жесткую" и "мягкую" подсистемы является широко распространенным и допу-

стимо в ряде задач гидродинамики, физики плазмы, физики твердого тела и других разделов естествознания, например, биофизики. При этом обнаружилось, что в практически интересных случаях оператор \mathcal{L} вида /7/, /8/ эквивалентен самосопряженному, т.е.

самосопряженным является оператор $\hat{\mathcal{L}} = \Lambda \mathcal{L}$, где $\Lambda = \text{diag}(i^{k_0}, \pm i)$. Тем не менее, дискретный спектр у оператора $\mathcal{L} - \eta I$, где $I = \text{diag}(1, 0)$, а η - спектральный параметр, оказался комплексным. Это потребовало несколько необычного определения собственных функций дискретного спектра оператора $\mathcal{L} - \eta I$. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующие два примера.

В качестве простейшего примера возьмем систему /1/

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_\ell \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial x} |\phi|^2 = 0,$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} + i c_g \frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta u \phi + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \delta |\phi|^2 \phi, \quad /9/$$

описывающую взаимодействие на оси x длинной волны с пакетом коротких волн. Здесь u определяет профиль длинной волны, ϕ - комплексная огибающая пакета коротких волн, c_ℓ - фазовая скорость длинной волны, c_g - групповая скорость пакета коротких волн. Константы a, β, γ, δ являются параметрами системы и определяются в каждом конкретном случае. Существенно, что все константы $c_\ell, c_g, a, \beta, \gamma, \delta$ могут принимать только вещественные значения. После замены

$$u = v(x - c_\ell t, t), \quad \phi = \psi(x - c_\ell t, t) \exp[i\sigma(x - \tau t)],$$

где $\sigma = \frac{c_g - c_\ell}{2\gamma}$, $\tau = \frac{c_g + c_\ell}{2}$, система /9/ принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2 = 0, \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta v \psi + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \delta |\psi|^2 \psi. \quad /10/$$

Далее, в предположении, что $a\beta\gamma \neq 0$, с помощью масштабного преобразования

$$x' = \lambda x, \quad t' = \gamma \lambda^2 t, \quad v = \beta^{-1} \gamma \lambda^2 v', \quad \psi = \gamma \lambda^2 \psi'$$

система /10/ приводится к виду /штрихи опущены/

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a\beta\lambda \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2 = 0, \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \epsilon |\psi|^2 \psi, \quad \epsilon = \gamma \delta \lambda^2.$$

Подчиним теперь выбор λ условию, чтобы якобиан

$$J = \det \frac{\partial(x', t')}{\partial(x, t)} = \gamma \lambda^3$$

был положительным. Тогда, полагая $a\beta\lambda = 2\kappa$, где $\kappa = 1$, если $a\beta\nu > 0$, и $\kappa = -1$, если $a\beta\nu < 0$, окончательно получим систему

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2 = 0, \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \epsilon |\psi|^2 \psi, \quad \epsilon = \frac{4\gamma\delta}{a^2 \beta^2}. \quad /11/$$

При $\epsilon = 0$ система /11/ обладает операторным представлением

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \mathcal{L}^* \cdot (\mathcal{L} - \eta I) + (\mathcal{L} - \eta I) \cdot \mathcal{L},$$

где $I = \text{diag}(1, 0)$, η - спектральный параметр, операторы \mathcal{L} и \mathcal{L}^* имеют соответственно вид

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \partial^2 + v & \psi \\ \bar{\psi} & -i\kappa \partial \end{vmatrix}, \quad \mathcal{L}^* = \begin{vmatrix} i\partial^2 + iv & 0 \\ \kappa \bar{\psi} \partial - \kappa \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} & 0 \end{vmatrix},$$

а \mathcal{L}^* - оператор, сопряженный к \mathcal{L} . Нетрудно видеть, что если $\bar{v} = v$, то $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, т.е. оператор \mathcal{L} является самосопряженным, если функция v принимает только вещественные значения. Таким образом, при $\epsilon = 0$ система /11/ допускает исследование с помощью метода обратной задачи. Метод обратной задачи позволяет, в частности, найти односолитонное решение этой системы. Оно имеет вид

$$v = \frac{2\mu^2}{\text{ch}^2[\mu(x + 2\nu t)]}, \quad \psi = c \frac{\exp[i\nu(x + 2\nu t)]}{\text{ch}[\mu(x + 2\nu t)]} \exp[-i(\mu^2 + \nu^2)t], \quad /12/$$

где μ - вещественный параметр, принимающий любые значения, кроме $\mu = 0$, а величина c определяется из условия $2\mu^2\nu + \kappa|c|^2 = 0$. Это условие означает, что параметр ν может принимать произвольные значения, принадлежащие полуоси $\nu < 0$, если $\kappa = 1$, и полуоси $\nu > 0$, если $\kappa = -1$. Таким образом, допустимые значения параметра ν удовлетворяют неравенству $\kappa\nu < 0$.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем, что фазовая скорость c_s солитона /12/ определяется выражением

$$c_s = c_l - 4 \frac{\gamma\kappa\nu}{a\beta}. \quad /13/$$

Отсюда следует, что если $a\beta\nu c_l > 0$, то $|c_s| > |c_l|$, причем $c_s c_l > 0$. Если же $a\beta\nu c_l < 0$, то слагаемые в правой части равенства /13/ имеют противоположные знаки. Это значит, что возможно либо $c_s c_l < 0$, либо $c_s c_l > 0$, но в последнем случае имеем $|c_s| < |c_l|$.

Выясним теперь, как связаны параметры μ и ν солитона /12/ с дискретным спектром оператора $\mathcal{L} - \eta I$. С этой целью рассмотрим уравнение $(\mathcal{L} - \eta I)\chi = 0$. Полагая $\chi = (f, g)$, приходим к следующей системе:

$$f'' + vf + \psi g = \eta f, \quad g' + i\kappa \bar{\psi} f = 0, \quad /14/$$

причем коэффициенты v и ψ этой системы определены посредством /12/. При $\eta = (\mu + i\nu)^2$ система имеет решение вида

$$f = \frac{\exp[i\nu(x + 2\nu t)]}{\text{ch}[\mu(x + 2\nu t)]}, \quad g = -\frac{i\kappa \bar{c}}{\mu} \frac{\exp[\mu(x + 2\nu t)]}{\text{ch}[\mu(x + 2\nu t)]} \exp[i(\mu^2 + \nu^2)t], \quad /15/$$

которое в нашей ситуации естественно назвать собственной функцией системы /14/, отвечающей точке $\eta = (\mu + i\nu)^2$ дискретного спектра оператора $\mathcal{L} - \eta I$. Действительно, согласно /15/, имеем

$|f| + \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, а $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. Легко видеть, что если $\mu > 0$, то $|g| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, а при $x \rightarrow \infty$ имеем $|g| \rightarrow 2 \left| \frac{c}{\mu} \right|$. Аналогично, если $\mu < 0$, то $|g| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, а при $x \rightarrow -\infty$ имеем $|g| \rightarrow 2 \left| \frac{c}{\mu} \right|$. Возьмем теперь вытекающее из /14/ соотношение

$$(f\bar{f} - f\bar{f}')' - i\kappa(g'\bar{g} + g\bar{g}') = (\eta - \bar{\eta})|f|^2$$

и проинтегрируем его по x от $-\infty$ до ∞ . В результате получим равенство

$$(\eta - \bar{\eta}) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -i\kappa |g|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Поскольку $|g| \rightarrow 0$ только либо при $x \rightarrow -\infty$, либо при $x \rightarrow \infty$, то из этого равенства следует, что $\bar{\eta} \neq \eta$.

Рассмотрим систему /11/ при $\epsilon \neq 0$. Оказывается, что и при $\epsilon \neq 0$ она имеет солитонное решение вида

$$v = \frac{a}{\text{ch}^2[\mu(x + 2\nu t)]}, \quad \psi = b \frac{\exp[i\nu(x + 2\nu t)]}{\text{ch}[\mu(x + 2\nu t)]} \exp[-i(\mu^2 + \nu^2)t],$$

где

$$a = \frac{2\mu^2}{1 - \epsilon\kappa\nu}, \quad |b|^2 = -\frac{2\kappa\mu^2\nu}{1 - \epsilon\kappa\nu},$$

причем параметр μ может принимать произвольные действительные значения, кроме $\mu = 0$, а параметр ν принимает любые действительные значения, удовлетворяющие неравенству $(1 - \epsilon\kappa\nu)\kappa\nu < 0$. Элементарный анализ этого неравенства показывает, что при $\epsilon > 0$ множество допустимых значений параметра ν заполняет всю вещественную ось, кроме отрезка длины $1/\epsilon$, причем, если $\kappa = 1$, то множество запрещенных значений параметра ν заполняет отрезок $[0, 1/\epsilon]$, а в случае, когда $\kappa = -1$, множество запрещенных значений параметра ν заполняет отрезок $[-1/\epsilon, 0]$. Наоборот, при $\epsilon < 0$ множество допустимых значений параметра ν заполняет интервал длины $1/\epsilon$, причем, если $\kappa = 1$, то допустимые значения

параметра ν принадлежат интервалу $(1/\epsilon, 0)$, а в случае, когда $\kappa = -1$, допустимые значения параметра ν заполняют интервал $(0, -1/\epsilon)$. Таким образом, если мы попытаемся связать параметры μ и ν с дискретным спектром некоторого оператора, с помощью которого надеемся проинтегрировать методом обратной задачи систему /11/ при $\epsilon \neq 0$, то увидим, что дискретный спектр этого оператора должен иметь на комплексной плоскости расположение, удовлетворяющее некоторым ограничениям. Неопределенность этих ограничений состоит в том, что связь между параметрами μ и ν с одной стороны и точками дискретного спектра интересующего нас оператора - с другой - неизвестна.

Система /11/ при $\epsilon = 0$ имеет бесконечное число законов сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} T_m + \frac{\partial}{\partial x} X_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad /16/$$

где T_m и X_m являются полиномами от ψ , $\bar{\psi}$ и их производных по x соответствующего порядка. Справедливы равенства

$$T_1 = \nu, \quad T_3 = \nu^2 + i\kappa(\psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi}), \quad T_2 = |\psi|^2, \quad T_4 = \nu |\psi|^2 - |\frac{\partial \psi}{\partial x}|^2.$$

Нетрудно убедиться, что при $m = 1, 2, 3$ величины X_m можно выбрать так, что соотношение /16/ будет выполняться и при $\epsilon \neq 0$. Однако уже для $m = 4$ это оказывается невозможным. Тем не менее, если мы добавим к T_4 член $\frac{\epsilon}{2} |\psi|^4$, т.е. положим

$$T_4 = \nu |\psi|^2 - |\frac{\partial \psi}{\partial x}|^2 + \frac{\epsilon}{2} |\psi|^4,$$

то новое выражение для T_4 будет определять закон сохранения вида /16/ для системы /11/ и при $\epsilon \neq 0$. Неясно, можно ли этот процесс продолжить до бесконечности и, если можно, то является ли это свидетельством того, что система /11/ интегрируется с помощью метода обратной задачи и при $\epsilon \neq 0$. Заметим, что несколько отличное от приведенного здесь рассмотрение системы, эквивалентной системе /11/ при $\epsilon = 0$, содержится в /2/.

С системой /11/ тесно связана система, играющая важную роль в физике плазмы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (au^2 + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} |\phi|^2, \quad i \frac{\partial \phi}{\partial t} = u\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \epsilon |\phi|^2 \phi, \quad /17/$$

где a, β, λ и ϵ - параметры, принимающие только вещественные значения. Следующие три теоремы определяют условия, при выполнении которых система /17/ имеет решения указанного ниже вида.

Теорема 1. Если в системе /17/ параметры a, β и ϵ отличны от нуля и удовлетворяют условию $\Delta = (a - 3\beta) a \epsilon > 0$, то существует следующее решение этой системы:

$$u = \frac{A}{\text{ch}^2[\mu(x + 2\nu t)]}, \quad \phi = B \exp(i\nu x) \frac{\exp[-i(\mu^2 - \nu^2)t]}{\text{ch}[\mu(x + 2\nu t)]},$$

где

$$A = 6a^{-1} \beta \mu^2, \quad |B|^2 = 2a^{-2} \epsilon^{-2} \mu^2 \Delta, \quad /18/$$

параметр μ принимает произвольные вещественные значения, кроме $\mu = 0$, а $\nu = 2\beta \mu^2 + \frac{(a - 3\beta)\lambda}{6\beta \epsilon}$.

Теорема 2. Если в системе /17/ параметры a, β и λ отличны от нуля, $a = 3\beta$, а $\epsilon = 0$, то существует следующее решение этой системы:

$$u = \frac{2\mu^2}{\text{ch}^2[\mu(x + 2\nu t)]}, \quad \phi = B \exp(i\nu x) \frac{\exp[-i(\mu^2 - \nu^2)t]}{\text{ch}[\mu(x + 2\nu t)]},$$

где $|B|^2 = 4(\nu - 2\beta \mu^2) \lambda^{-1} \mu^2$, а параметры μ и ν принимают любые вещественные значения, удовлетворяющие неравенству $(\nu - 2\beta \mu^2) \lambda > 0$.

Замечание 1. При $\lambda \rightarrow 0$ указанные в теоремах 1 и 2 решения можно непрерывно продеформировать в солитон уравнения Кортевега-де Вриза и образующее волновой пакет решение уравнения Шредингера с потенциалом $u = u(x, t)$. При $\lambda = 0$ величина B в первом случае определяется по-прежнему выражением /18/, а во втором - может принимать произвольные комплексные значения. Параметры μ и ν в обоих случаях удовлетворяют равенству $\nu = 2\beta \mu^2$.

Теорема 3. Если в системе /17/ $\epsilon = 0$ и выполнено соотношение $\Delta' = (a - \beta)\lambda > 0$, то существует следующее решение этой системы:

$$u = \frac{6\mu^2}{\text{ch}^2[\mu(x + 2\nu t)]}, \quad \phi = B \exp(i\nu x) \frac{\text{sh}[\mu(x + 2\nu t)]}{\text{ch}^2[\mu(x + 2\nu t)]} \exp[-i(\mu^2 - \nu^2)t],$$

где $|B|^2 = 36\lambda^{-2} \mu^4 \Delta'$, параметр μ принимает произвольные вещественные значения, кроме $\mu = 0$, а $\nu = (3a - \beta)\mu^2$.

Ввиду полной элементарности доказательства этих теорем опускаются.

В качестве второго примера рассмотрим систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (au + \beta u^2 + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\phi|^2, \quad i \frac{\partial \phi}{\partial t} = au\phi + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c |\phi|^2 \phi, \quad /19/$$

также описывающую взаимодействие на оси x длинной волны с пакетом коротких волн. Эта система довольно универсальна и встречается в гидродинамике, физике плазмы, физике твердого тела и ряде других разделов науки. В частности, в биофизике она используется для описания взаимодействия внутримолекулярных возбуждений с акустическими фононами /3/. Существенно, что константы α , β , γ , δ , a , b и c , являющиеся параметрами системы, могут принимать только вещественные значения. Предположим, что $ab \neq 0$. Тогда с помощью замены переменных $x' = \rho x$, $t' = b\rho^2 t$, $u = a^{-1} b\rho^2 u'$, $\phi = b\rho^2 \phi'$ система /19/ приводится к виду /штрихи опущены/

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\kappa u + \mu u^2 + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\phi|^2, \quad i \frac{\partial \phi}{\partial t} = u\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \epsilon |\phi|^2 \phi, \quad /20/$$

$$\text{где } \kappa = \frac{a}{b^2 \rho^2}, \quad \mu = \frac{\beta}{ab}, \quad \nu = \frac{\gamma}{b^2}, \quad \lambda = \frac{a\delta}{b}, \quad \epsilon = bc\rho^2.$$

При $\kappa = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1/3$, $\lambda = \pm 8/3$ и $\epsilon = 0$ система /20/ обладает операторным представлением

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \mathcal{A}^* \cdot (\mathcal{L} - \eta I) + (\mathcal{L} - \eta I) \cdot \mathcal{A}, \quad /21/$$

где

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} i\partial^3 + \frac{3i}{4}(\partial \cdot u + u\partial) - p & i\phi \\ -i\bar{\phi} & \mp i\partial \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} i\partial^2 + iu & 0 \\ \mp i\bar{\phi}\partial \pm i\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}, \quad /22/$$

а \mathcal{A}^* - оператор, сопряженный к \mathcal{A} . При этом функции u и p , входящие в правую часть равенства /22/, связаны соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{4}{3} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad /23/$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, если $\bar{u} = u$ и $\bar{p} = p$. Таким образом, если функции u и p принимают только вещественные значения, то \mathcal{L} - самосопряженный оператор.

С помощью замены

$$u \rightarrow u + \frac{\kappa}{2}, \quad \phi \rightarrow \frac{|3\lambda|^{1/2}}{2^{3/2}} \phi \exp(-i\frac{\kappa}{2}t) \quad /24/$$

вытекающая из соотношения /21/ система

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \pm \frac{8}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\phi|^2, \quad i \frac{\partial \phi}{\partial t} = u\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

приводится к виду /20/ с произвольными вещественными значениями параметров κ и λ , но с $\mu = 1$, $\nu = 1/3$ и $\epsilon = 0$. Метод обратной

задачи позволяет в этом случае найти два типа солитонных решений. Солитоны первого типа имеют вид:

$$u = \frac{2\sigma^2}{\text{ch}^2[\sigma(x + 2\tau t)]}, \quad \phi = B \exp(i\tau x) \frac{\exp[-i(\sigma^2 - \tau^2)t]}{\text{ch}[\sigma(x + 2\tau t)]}, \quad /25/$$

где $|B|^2 = \frac{8}{3\lambda} (3\tau^2 - \sigma^2 - \frac{3}{4}\kappa)\sigma^2$, причем параметры σ и τ принимают любые вещественные значения, удовлетворяющие неравенству

$$(3\tau^2 - \sigma^2 - \frac{3}{4}\kappa)\lambda > 0. \quad /26/$$

При $\lambda = 0$ солитоны этого типа можно непрерывно продеформировать в солитоны уравнения Буссинеска и образующее волновой пакет решение уравнения Шредингера с потенциалом $u = u(x, t)$. В предельном случае $\lambda = 0$ величина B может принимать любые комплексные значения, а параметры σ и τ удовлетворяют равенству

$$3\tau^2 - \sigma^2 - \frac{3}{4}\kappa = 0. \quad /27/$$

Сравнение соотношений /26/ и /27/ показывает, что при $\kappa \geq 0$ и $\lambda > 0$ скорость солитона /25/ системы /20/ больше скорости солитона уравнения Буссинеска с тем же самым значением параметра σ . Наоборот, при $\kappa > 0$ и $\lambda < 0$ скорость солитона /25/ системы /20/ меньше скорости солитона уравнения Буссинеска.

Для того, чтобы понять, как связаны в рассматриваемом случае параметры σ и τ с дискретным спектром оператора $\mathcal{L} - \eta I$, рассмотрим уравнение $(\mathcal{L} - \eta I)\chi = 0$, где оператор \mathcal{L} определен посредством /22/. Полагая $\chi = (f, g)$, с учетом /24/ получаем систему

$$f''' + \frac{3}{2}(u + \frac{\kappa}{2})f' + (\frac{3}{4}u' + ip)f + \frac{|3\lambda|^{1/2}}{2^{3/2}} \phi \exp(-i\frac{\kappa}{2}t)g = -i\eta f, \\ g' + \text{sign} \lambda \frac{|3\lambda|^{1/2}}{2^{3/2}} \bar{\phi} \exp(i\frac{\kappa}{2}t)f = 0, \quad /28/$$

причем коэффициенты u и ϕ этой системы определены посредством /25/, а p находится с помощью /23/. При $\eta = (r - i\sigma)^3 - \frac{3}{4}(r - i\sigma)\kappa$ система /28/ имеет решение

$$f = \frac{\exp[i\tau(x + 2\tau t)]}{\text{ch}[\sigma(x + 2\tau t)]}, \\ g = -\text{sign} \lambda \frac{|3\lambda|^{1/2}}{2^{3/2} \sigma} \bar{B} \{1 + \text{th}[\sigma(x + 2\tau t)]\} \exp[i(\sigma^2 + \tau^2 + \frac{\kappa}{2})t],$$

которое нужно считать собственной функцией оператора $\mathcal{L} - \eta I$, соответствующей указанной выше точке дискретного спектра. Не-

трудно видеть, что равенство /27/ при $\sigma \neq 0$ эквивалентно условию $\text{Im} \eta = 0$.

Солитоны второго типа возможны только при $\lambda > 0$ и имеют вид

$$u = \frac{6\sigma^2}{\text{ch}^2[\sigma(x+2rt)]}, \quad \phi = B \exp(irx) \frac{\text{sh}[\sigma(x+2rt)]}{\text{ch}^2[\sigma(x+2rt)]} \exp[-i(\sigma^2 - r^2)t], \quad /29/$$

где $|B|^2 = 24\lambda^{-1}\sigma^4$, а параметры σ и r принимают произвольные вещественные значения, удовлетворяющие условию

$$3r^2 - 4\sigma^2 - \frac{3}{4}\kappa = 0. \quad /30/$$

Если мы теперь с помощью /23/ и /29/ определим p и полученный результат вместе с выражениями /29/ для u и ϕ подставим в систему /28/, то в этом случае при $\eta = (r+2i\sigma)^3 - \frac{3}{4}(r+2i\sigma)\kappa$ система /28/ будет иметь решение

$$f = \frac{\exp[ir(x+2rt)]}{\text{ch}^2[\sigma(x+2rt)]}, \quad g = \frac{\lambda^{1/2} B \exp[i(\sigma^2 + r^2 + \kappa/2)t]}{\sqrt{24}\sigma \text{ch}^3[\sigma(x+2rt)]},$$

которое, очевидно, будет собственной функцией этой системы в обычном понимании. Соответствующее значение спектрального параметра η будет вещественным, ибо в силу /30/ имеем $\text{Im} \eta = 0$.

Полученные выше солитонные решения системы /20/ возможны и при других значениях параметров $\kappa, \mu, \nu, \lambda$ и ϵ . Следующие четыре теоремы определяют наиболее общие условия, при выполнении которых существуют эти решения.

Теорема 4. Если в системе /20/ параметры μ, ν и ϵ отличны от нуля, а $\Delta = (\mu - 3\nu)/\epsilon\mu > 0$, то существует следующее решение этой системы

$$u = \frac{A}{\text{ch}^2[\sigma(x+2rt)]}, \quad \phi = B \exp(irx) \frac{\exp[-i(\sigma^2 - r^2)t]}{\text{ch}[\sigma(x+2rt)]},$$

где $A = 6\mu^{-1}\nu\sigma^2$, $|B|^2 = 2\Delta\sigma^2$, а параметры σ и r принимают произвольные вещественные значения, удовлетворяющие равенству

$$r^2 - \nu\sigma^2 = \frac{1}{4}(\kappa + \frac{\lambda\mu\Delta}{3\nu}). \quad /31/$$

Замечание 2. Если $\nu > 0$, то соотношение /31/ определяет на плоскости σ, r две ветви гиперболы. Если же $\nu < 0$, то это соотношение определяет окружность при $\kappa + \frac{\lambda\mu\Delta}{3\nu} > 0$ и пустое множество при $\kappa + \frac{\lambda\mu\Delta}{3\nu} < 0$.

Теорема 5. Если в системе /20/ параметры μ, ν и λ все отличны от нуля, $\epsilon = 0$ и $\mu = 3\nu$, то существует следующее решение этой системы:

$$u = \frac{2\sigma^2}{\text{ch}^2[\sigma(x+2rt)]}, \quad \phi = B \exp(irx) \frac{\exp[-i(\sigma^2 - r^2)t]}{\text{ch}[\sigma(x+2rt)]},$$

где $|B|^2 = 2(4r^2 - 4\nu\sigma^2 - \kappa)\lambda^{-1}\sigma^2$, а параметры σ и r принимают любые вещественные значения, удовлетворяющие неравенству

$$(4r^2 - 4\nu\sigma^2 - \kappa)\lambda > 0. \quad /32/$$

Замечание 3. Если $\nu > 0$, то неравенство /32/ определяет на плоскости σ, r область, ограниченную ветвями гиперболы $4(r^2 - \nu\sigma^2) = \kappa$. Если же $\nu < 0$, а $\kappa > 0$, то это неравенство в зависимости от знака λ либо определяет область, ограниченную окружностью $4(r^2 - \nu\sigma^2) = \kappa$, либо область, лежащую вне этой окружности. Наконец, при $\nu < 0$ и $\kappa < 0$ неравенству /32/ удовлетворяет любая точка на плоскости σ, r , если $\lambda > 0$, и не удовлетворяет никакая точка, если $\lambda < 0$.

Теорема 6. Если в системе /20/ $\epsilon = 0$ и выполнено неравенство

$$\Delta' = (\mu - \nu)\lambda > 0, \quad /33/$$

то существует решение этой системы

$$u = \frac{6\sigma^2}{\text{ch}^2[\sigma(x+2rt)]}, \quad \phi = B \exp(irx) \frac{\text{sh}[\sigma(x+2rt)]}{\text{ch}^2[\sigma(x+2rt)]} \exp[-i(\sigma^2 - r^2)t],$$

где $|B|^2 = 36\Delta'\lambda^{-2}\sigma^4$, а параметры σ и r принимают произвольные вещественные значения, удовлетворяющие равенству

$$4r^2 - 2(3\mu - \nu)\sigma^2 = \kappa. \quad /34/$$

Замечание 4. Если $3\mu - \nu > 0$, то равенство /34/ определяет на плоскости σ, r две ветви гиперболы. Если же $3\mu - \nu < 0$, то при $\kappa > 0$ равенство /34/ определяет окружность, а при $\kappa < 0$ - пустое множество.

Нетрудно видеть, что неравенство /33/ можно удовлетворить и при условии $\mu = 3\nu$. Таким образом, если $\epsilon = 0$, $\mu = 3\nu$, а $\lambda\mu > 0$, то в системе /20/ возможны солитоны двух типов, указанных соответственно в теоремах 5 и 6. Их параметры σ и r удовлетворяют неравенству /32/ для солитонов первого типа и равенству /34/ для солитонов второго типа. Нетрудно видеть, что при $\mu = 3\nu$

и $\lambda\mu > 0$ кривая, определяемая на плоскости σ, τ уравнением /34/, лежит целиком в области, задаваемой неравенством /32/.

Теорема 7. Если в системе /20/ $\kappa = 1, \mu = \nu = 0, \lambda \neq 0$ и $\epsilon \neq 0$, то существует следующее решение этой системы:

$$u = \frac{A}{\operatorname{ch}^2[\sigma(x + 2\tau t)]}, \quad \phi = B \exp(i\tau x) \frac{\exp[-i(\sigma^2 - \tau^2)t]}{\operatorname{ch}[\sigma(x + 2\tau t)]},$$

где

$$A = \frac{2\lambda\sigma^2}{\lambda - (1 - 4\tau^2)\epsilon}, \quad |B|^2 = -\frac{2(1 - 4\tau^2)\sigma^2}{\lambda - (1 - 4\tau^2)\epsilon},$$

параметр σ принимает любые вещественные значения, кроме $\sigma = 0$, а параметр τ принимает произвольные вещественные значения, удовлетворяющие неравенству $(1 - 4\tau^2)[\lambda - (1 - 4\tau^2)\epsilon] < 0$.

Замечание 5. Элементарный анализ этого неравенства показывает, что при $\epsilon > 0$ и $\lambda > 0$ множество допустимых значений параметра τ содержит обе полуоси $\tau < -1/2$ и $\tau > 1/2$. Кроме того, если $0 < \lambda < \epsilon$, то допустимые значения параметра τ заполняют также интервал $(-\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}}, \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}})$. Далее, при $\epsilon > 0$ и $\lambda < 0$ множество допустимых значений параметра τ содержит всю ось τ за исключением двух отрезков $[-\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}}, -\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}}]$. Наоборот, при $\epsilon < 0$ и $\lambda > 0$ множество допустимых значений параметра τ состоит только из двух интервалов $(-\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}}, -\frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}})$. Наконец, при $\epsilon < 0$ и $\lambda < 0$ множество допустимых значений параметра τ состоит из интервала $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, из которого выброшен отрезок $[-\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}}, \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\epsilon}}]$, если $\epsilon < \lambda < 0$.

Переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, легко получаем, что при $\epsilon = 0$ и $\lambda > 0$ множество допустимых значений параметра τ содержит обе полуоси $\tau < -1/2$ и $\tau > 1/2$, а при $\epsilon = 0$ и $\lambda < 0$ множество допустимых значений параметра τ состоит из интервала $(-1/2, 1/2)$.

В заключение отметим, что содержащийся в обзоре /4/ перечень возможных типов солитонных решений систем /17/ и /20/ является далеко не полным и местами не совсем точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D.J. Stud.Appl.Math., 1977, vol.56, No.1, p.81-94.
2. Yajima N., Oikawa M. Progr.Theor.Phys., 1976, vol.56, No.6, p.1719-1739.

3. Давыдов А.С. УФН, 1982, т.138, вып.4, с.603-643.
4. Маханьков В.Г. ЭЧАЯ, 1983, т.14, вып.1, с.123-180.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1984 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
D1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D2,4-83-179	Труды V Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Мельников В.К.

P2-84-81

Метод обратной задачи рассеяния. Гипотезы и факты

Предложен новый подход к поиску нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Этот подход применен к исследованию уравнений, описывающих взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн. Хотя уравнения интегрируются с помощью самосопряженных операторов, дискретный спектр их, соответствующий солитонным решениям рассматриваемых уравнений, оказался комплексным. Попутно рассмотрены некоторые получившие широкое распространение гипотезы и указаны контр-примеры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K.

P2-84-81

Inverse Scattering Method. Hypotheses and Facts

A new approach is proposed for the search of nonlinear evolution equations integrated by the inverse scattering method. This approach is applied to the investigation of equations describing the interaction of a long wave with a short wave packet. Though these equations are integrated by self-adjoint operators, their discrete spectrum corresponding to solitons of these equations turned out to be complex. Certain widespread hypotheses are treated and some examples contradicting them are pointed out.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984