сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-803

Й.С.Ваклев*, В.С.Герджиков*, М.И.Иванов*

КАЛИБРОВОЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОРОЖДАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ ЗАХАРОВА-ШАБАТА

* Институт ядерных исследований и ядерной энергетики БАН, София

1984

1. Известно, что возможность применения метода обратной задачи рассеяния /МОЗР/ к данной вспомогательной линейной задаче $\ell(q, \lambda)$ /q - набор потенциалов, λ - спектральный параметр/ определяется однозначностью и обратимостью отображения $\mathcal{F}: \mathfrak{M} \to \mathfrak{T}$, где $\mathfrak{M}$ - класс потенциалов $\{q\}$ в ℓ, а $\mathfrak{T}$ - класс соответствующих данных рассеяния. Идея о том, что отображение $\mathcal{F}$ имеет характер преобразования Фурье, была впервые высказана в работе /1/ на примере системы Захарова-Шабата. Строгое обоснование интерпретации МОЗР как обобщенного преобразования Фурье основывается на методе разложения по "квадратам" решений вспомогательной линейной задачи /2-4/. Основную роль в этом методе играет порождающий оператор Λ, для которого "квадраты" являются собственными функциями. Этот оператор порождает не только соответствующий класс нелинейных эволюционных уравнений /НЭУ/, но также их законы сохранения и гамильтоновы структуры. Впоследствии метод разложения по "квадратам" решений был распространен на ряд других /в том числе и разностных/ вспомогательных линейных задач. В каждом отдельном случае важным моментом для его эффективного применения являлась возможность явного вычисления соответствующего Λ-оператора в терминах потенциалов q -естественных координат в пространстве $\mathfrak{M}$.

Другое важное направление в рамках МОЗР, обоснованное в работах /5,6/, состоит в изучении классов калибровочно-эквивалентных НЭУ. В его основе лежит тот факт, что представление Лакса для НЭУ инвариантно относительно группы калибровочных преобразований. Естественно, возникает вопрос: как переносить результаты, полученные на основе теории Λ-оператора для НЭУ, связанных с данной вспомогательной линейной задачей, на случай калибровочно-эквивалентной задачи. В /7/ такой вопрос был поставлен и решен положительно для системы Захарова-Шабата. В настоящей работе показано, как это можно сделать и в случае ее дискретного аналога /8/:

$$v_{n+1}(z) = \ell_n(z)\, v_n(z), \quad \ell_n(z) = Z + q_n, \quad Z = \mu(z)\sigma_0 + \nu(z)\sigma_3,$$

$$q_n = q_n^+\sigma_+ + q_n^-\sigma_-, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \ell_n(z) \neq 0, \qquad /1.1/$$

где z играет роль спектрального параметра, $\mu = (z + z^{-1})/2$, $\nu = (z - z^{-1})/2$. Для системы /1.1/ пространство $\mathfrak{M}$ - это множество потенциалов $\{q_n\}$, достаточно быстро стремящихся к нулю при $|n| \to \infty$, а множество $\mathfrak{J}$ состоит* из коэффициентов отражения $\rho^{\pm}(z)$, $|z| = 1$ /их определение см. в разделе 2/. Основные свойства нелинейных разностных эволюционных уравнений /РЭУ/, связанных с системой /1.1/ [8,9], были изучены методом разложения по "квадратам" решений в [10,12]. Поскольку среди этих РЭУ находится разностное нелинейное уравнение Шредингера /РНУШ/

$$i\sigma_3 \frac{dq_n}{dt} + (1 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} q_n^2)(q_{n+1} + q_{n-1}) - 2q_n = 0, \qquad /1.2/$$

будем их называть уравнениями типа РНУШ.

Для РНУШ представление Лакса, т.е. условие совместимости /1.1/ с линейной задачей вида $i\frac{dv_n}{dt} = M_n(z)v_n(z)$ записывается следующим образом:

$$i\frac{d\ell_n}{dt} + \ell_n M_n - M_{n+1}\ell_n = 0. \qquad /1.3/$$

Соответствующая группа калибровочных преобразований состоит из преобразований вида [13]:

$$\ell_n \to \tilde{\ell}_n(z) = g_{n+1}^{-1}\ell_n(z)g_n, \quad M_n \to \tilde{M}_n(z) = g_n^{-1}M_n g_n - i g_n^{-1}\frac{dg_n}{dt}, \qquad /1.4/$$

где g_n - невырожденная /вообще говоря, зависящая от z /матрица. На основе /1.4/ в [13] было показано, что РНУШ /1.2/ эквивалентно разностному аналогу ферромегнетика Гайзенберга /РФГ/:

$$\frac{d\vec{S}_n}{dt} = \frac{2\vec{S}_{n+1}\wedge\vec{S}_n}{1+(\vec{S}_n\cdot\vec{S}_{n+1})} + \frac{2\vec{S}_{n-1}\wedge\vec{S}_n}{1+(\vec{S}_n\cdot\vec{S}_{n+1})}, \quad \vec{S}_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, S_n^{(3)}), (\vec{S}_n\cdot\vec{S}_n) = 1. \qquad /1.5/$$

Последнее уравнение связано с вспомогательной линейной задачей

$$\tilde{v}_{n+1}(z) = \tilde{\ell}_n(z)\,\tilde{v}_n(z), \quad \tilde{\ell}_n(z) = \mu(z)\sigma_0 + \nu(z)S_n,$$
$$S_n^2 = \sigma_0, \quad \operatorname{tr} S_n = 0, \quad S_n \xrightarrow[|n|\to\infty]{} \sigma_3, \qquad /1.6/$$

которая калибровочно эквивалентна системе /1.1/; вектор $\vec{S}_n$ в /1.5/ и матричнозначный потенциал S_n в /1.6/ связаны соотношением $S_n = \sum_{i=1}^{3} S_n^{(i)}\sigma_i$, где σ_i - матрицы Паули.

---

*Для простоты изложения здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что задача /1.1/ не имеет дискретного спектра.

Как уже упоминалось, для уравнений типа РНУШ развит общий подход, основанный на теории порождающего оператора Λ. В то же время до сих пор такой подход не был применен к уравнениям типа РФГ. Основные трудности для этого были связаны: а/ с нековариантностью формулировки метода разложения по "квадратам" решений, использовавшейся в литературе до сих пор; б/ с отсутствием явного выражения для соответствующего оператора Λ через S_n - естественная переменная для уравнений типа РФГ. В настоящей работе эти трудности преодолеваются, и все результаты, касающиеся уравнений типа РНУШ, переносятся на уравнения типа РФГ /см. раздел 4/. При этом мы пользуемся идеями работы [7], где решены аналогичные вопросы для непрерывных пределов этих уравнений. В ряде пунктов, однако, проявляются особенности, специфические для разностных систем. Особое внимание уделяется вопросу о факторизации порождающих операторов для систем /1.1/ и /1.6/. Основные результаты анонсированы в [14].

2. Напомним некоторые необходимые сведения из прямой и обратной задачи для системы /1.1/ [8,10,12,15]. Уточним прежде всего пространство $\mathfrak{M}$ как пространство матричных 2x2 последовательностей X_n, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{tr} X_n = \operatorname{tr} X_n\sigma_3 = 0, \quad \lim_{|n|\to\infty} n^k X_n = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad /2.1/$$

Введем, как обычно, аналоги решений Йоста $\psi_n(z)$ и $\phi_n(z)$ системы /1.1/, которые определяются своим асимптотическим поведением:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(z) Z^{-n} = \sigma_0, \quad \lim_{n\to-\infty} \phi_n(z) Z^{-n} = \sigma_0, \quad |z| = 1. \qquad /2.2/$$

Они связаны между собой матрицей перехода

$$\phi_n(z) = \psi_n(z)\,T(z), \quad T(z) = \begin{pmatrix} a^+(z), & b^-(z) \\ b^+(z), & a^-(z) \end{pmatrix}, \qquad /2.3/$$

$$\det T(z) = V \equiv \prod_{k=-\infty}^{\infty} h_k, \quad h_k = 1 - q_k^+ q_k^-.$$

Имеющая место инволюция $\ell_n(-z) = -\sigma_3\ell_n(z)\sigma_3$ приводит к естественному ограничению на матрицу $T(z)$:

$$T(-z) = \sigma_3 T(z)\sigma_3. \qquad /2.4/$$

Нам понадобятся также фундаментальные решения $\chi_n^{\pm}(z)$:

$$\chi_n^+(z) = \psi_n(z)\begin{pmatrix} a^+(z), & 0 \\ b^+(z), & 1\end{pmatrix}, \quad \chi_n^-(z) = \psi_n(z)\begin{pmatrix}1, & b^-(z)\\ 0, & a^-(z)\end{pmatrix}, \quad |z| = 1.$$

/2.5/

Функции $\chi_n^+(z)Z^{-n}$, $a^+(z)$ и $\chi_n^-(z)Z^{-n}$, $a^-(z)$ имеют аналитическое продолжение при $|z| > 1$ и $|z| < 1$ соответственно.

Непрерывный спектр системы /1.1/ двукратен и заполняет единичную окружность. При предположении, что дискретный спектр отсутствует*, минимальный набор данных рассеяния $\mathcal{T}$ состоит из коэффициентов отражения $\rho^{\pm}(z) = b^{\pm}(z)/a^{\pm}(z)$, $|z| = 1$, которые ввиду /2.4/ являются нечетными функциями z. Для того, чтобы по набору $\mathcal{T}$ однозначно восстановить матрицу перехода $T(z)$, достаточно воспользоваться дисперсионными соотношениями:

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta}\,\frac{\zeta^2}{\zeta^2 - z^2}\ln(1-\rho^+\rho^-(\zeta)), \quad |z| \gtrless 1,$$

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta}\,\frac{\zeta^2 + z^2}{\zeta^2 - z^2}\ln(1-\rho^+\rho^-(\zeta)), \quad |z| = 1, \qquad /2.6/$$

$$A(z) = \ln a^+(z), \quad |z| > 1; \quad A(z) = -\ln(a^-(z)/V), \quad |z| < 1;$$

$$A(z) = \frac{1}{2}\ln(a^+(z)/a^-(z)), \quad |z| = 1,$$

при $|z| = 1$ интеграл надо понимать в смысле главного значения. Потенциал q_n восстанавливается по $\mathcal{T}$ либо при помощи уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко [8], либо как результат решения задачи Римана [15].

Переход к системе /1.6/ осуществим при помощи калибровочного преобразования /1.4/ с функцией

$$g_n(z) = Z^{-1/2} f_n, \quad f_n = \psi_n(1), \qquad /2.7/$$

где f_n, очевидно, удовлетворяет соотношениям:

$$f_{n+1} = (\sigma_0 + q_n) f_n, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = \sigma_0, \quad \lim_{n\to-\infty} f_n = T^{-1}(1). \qquad /2.8/$$

*Учет наличия дискретного спектра не составляет труда, см. [10,12].

Нетрудно убедиться, что матричнозначные функции

$$\tilde{\psi}_n(z) = f_n^{-1} Z^{1/2} \psi_n(z) Z^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} Z^n,$$

$$\tilde{\phi}_n(z) = f_n^{-1} Z^{1/2} \phi_n(z) Z^{-1/2} T^{-1}(1) \xrightarrow[n\to-\infty]{} Z^n, \qquad /2.9/$$

являются решениями Йоста для преобразованной системы /1.6/, в которой

$$S_n = f_{n+1}^{-1}\sigma_3 f_{n+1}. \qquad /2.10/$$

Соответствующая матрица перехода

$$\tilde{T}(z) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}^+(z), & \tilde{b}^-(z) \\ \tilde{b}^+(z), & \tilde{a}^-(z)\end{pmatrix} = \tilde{\phi}_n(z)\,\tilde{\psi}_n(z)^{-1}, \qquad /2.11/$$

связана с матрицей $T(z)$ следующим образом:

$$\tilde{T}(z) = Z^{1/2} T(z) Z^{-1/2} T^{-1}(1). \qquad /2.12/$$

Мы будем рассматривать систему /1.6/ с естественными для ферромагнетиков граничными условиями, а именно $\lim_{|n|\to\infty} S_n = \sigma_3$.

Первое из них /при $n \to \infty$/ автоматически выполняется, в то время как второе сужает пространство $\mathfrak{M}$ /которое будем обозначать через $\mathfrak{M}^{(0)}$ /, и приводит к следующим ограничениям на данные рассеяния:

$$T(1) = T(-1) = \mathrm{diag}(a^+(1), a^-(1)), \text{ т.е. } \rho^{\pm}(1) = \rho^{\pm}(-1) = 0. \qquad /2.13а/$$

Потребуем также, чтобы $\lim_{n\to\pm\infty} n^k[\sigma_3, S_n] = 0$, $k = 1,2,\ldots$ Тогда можно показать, что функции $b^{\pm}(z)$ являются бесконечно гладкими функциями $z = e^{i\phi}$ на единичной окружности, что с учетом /2.4/ и /2.13а/ приводит к

$$\lim_{z\to\pm\infty} |(z^2 - 1)^{-1} b^{\pm}(z)| < \infty. \qquad /2.13б/$$

Таким образом, все наши рассмотрения будут вестись на классе потенциалов q_n /соответственно S_n/, для которых выполнены условия /2.13/. Соответствующий минимальный набор данных рассеяния задается через:

$$\mathcal{T}^{(0)} \equiv \{\rho^{\pm}(z),\ |z| = 1;\ \rho^{\pm}(z) = -\rho^{\pm}(-z),\quad \rho^{\pm}(1) = 0\}. \qquad /2.14/$$

Из /2.12/ и /2.13/ следует, что

$$\tilde a^{\pm}(z) = a^{\pm}(z)/a^{\pm}(1), \quad \tilde b^{\pm}(z) = b^{\pm}(z)\, Z^{\mp 1}/a^{\pm}(1),$$
$$\tilde\rho^{\pm}(z) \equiv \tilde b^{\pm}(z)/\tilde a^{\pm}(z) = \rho^{\pm}(z)\, Z^{\mp 1}, \qquad /2.15/$$

т.е. минимальный набор данных рассеяния /2.14/ является общим для обеих задач /1.1/ и /1.6/.

В конце этого раздела введем в полной аналогии с /2.5/ фундаментальные решения $\tilde\chi_n^{\pm}(z)$ системы /1.6/:

$$\tilde\chi_n^{+}(z) \equiv \tilde\psi_n(z)\begin{pmatrix} \tilde a^{+}(z), & 0 \\ \tilde b^{+}(z), & 1 \end{pmatrix} = f_n^{-1} Z^{1/2}\chi_n^{+}(z)\, Z^{-1/2}\begin{pmatrix} 1/a^{+}(1), & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$
$$\tilde\chi_n^{-}(z) \equiv \tilde\psi_n(z)\begin{pmatrix} 1, & \tilde b^{-}(z) \\ 0, & \tilde a^{-}(z) \end{pmatrix} = f_n^{-1} Z^{1/2}\chi_n^{-}(z)\, Z^{-1/2}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1/a^{-}(1) \end{pmatrix}, \qquad /2.16/$$

обладающие теми же свойствами аналитичности по z, как и $\chi_n^{\pm}(z)$.

3. Перейдем к схематическому изложению в ковариантной форме результатов, полученных методом разложения по "квадратам" решений для задачи /1.1/ /ср. с [10–12]/.

"Квадраты" решений естественно возникают при исследовании отображения $\mathcal{F}$ множества $\mathfrak{M}^{(0)}$ потенциалов системы /1.1/ на множество данных рассеяния $\mathcal{T}^{(0)}$. Действительно, исходя из вспомогательной линейной задачи, можно установить следующие связи между коэффициентами отражения $\rho^{\pm}(z)$ и потенциалом q_n:

$$\rho^{\pm}(z) = \frac{1}{(a^{\pm})^2}[\![q_n h_n^{-1}, \Phi_n^{\pm}(z)]\!], \quad \delta\rho^{\pm}(z) = \frac{\mp 1}{(a^{\pm})^2}[\![\sigma_3 \delta q_n h_n^{-1}, \Phi_n^{\pm}(z)]\!],$$
$$[\![Z_n, Y_n]\!] = -[\![Y_n, X_n]\!] \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (X_n, [\sigma_3, Y_n]). \qquad /3.1/$$

Здесь $(\ ,\ )$ означает форму Киллинга алгебры $g\ell(2,\mathbb{C})$: $(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, X,Y$, а "квадраты" решения $\Phi_n^{\pm}(z)$ и их сопряженные $\Psi_n^{\pm}(z)$ выражаются через аналитические решения $\chi_n^{\pm}(z)$. Перед тем, как привести соответствующие формулы, заметим, что вследствие антидиагональности q_n и δq_n в правых частях /3.1/ на самом деле существенны только антидиагональные части "квадратов" $\Phi_n^{\pm}(z)$. Это приводит нас к разбиению

$$X_n = X_n^a + X_n^d; \quad X_n^d = \sigma_3(X_n, \sigma_3) + \sigma_0(X_n, \sigma_0). \qquad /3.2/$$

Если теперь введем матричнозначные функции /через $\hat A$ будем обозначать матрицу, обратную A, $\hat A \equiv A^{-1}$/:

$$Y_{n,\pm}^{\pm}(z) = \chi_{n+1}^{\pm}(z)\sigma\, \hat\chi_n^{\pm}(z), \quad U_{n,\pm}^{\pm}(z) = \chi_n^{\pm}(z)\sigma_{\pm}\hat\chi_n^{\pm}(z), \qquad /3.3/$$

то "квадраты" $\Phi_n^{\pm}(z)$ и $\Psi_n^{\pm}(z)$ определятся как антидиагональные части $Y_{n,\pm}^{\pm}$, а именно:

$$\Psi_n^{+}(z) = -a^{+}(Y_{n,-}^{+}(z))^a, \quad \Psi_n^{-}(z) = a^{-}(Y_{n,+}^{-}(z))^a,$$
$$\Phi_n^{+}(z) = a^{+}(Y_{n,+}^{+}(z))^a, \quad \Phi_n^{-}(z) = -a^{-}(Y_{n,-}^{-}(z))^a. \qquad /3.4/$$

В дальнейшем нам понадобятся также "квадраты" $\bar\Phi_n^{\pm}(z)$ и $\bar\Psi_n^{\pm}(z)$

$$\bar\Psi_n^{+}(z) = -a^{+}(U_{n,-}^{+}(z))^a, \quad \bar\Psi_n^{-}(z) = a^{-}(U_{n,+}^{-}(z))^a$$
$$\bar\Phi_n^{+}(z) = a^{+}(U_{n,+}^{+}(z))^a, \quad \bar\Phi_n^{-}(z) = -a^{-}(U_{n,-}^{-}(z))^a. \qquad /3.5/$$

Любая из систем "квадратов" $\{\Psi_n^{\pm}\}$, $\{\bar\Psi_n^{\pm}\}$, $\{\Phi_n^{\pm}\}$ и $\{\bar\Phi_n^{\pm}\}$ является полной в пространстве $\mathfrak{M}$ [10–12]. То же самое относится и к так называемым симплектическим базисам $\{P_n, Q_n\}$ и $\{\bar P_n, \bar Q_n\}$

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi}(\rho^{-}\Psi_n^{-} - \rho^{+}\Psi_n^{+}), \quad Q_n(z) = -\frac{i}{2b^{+}b^{-}}(\rho^{+}V\Psi_n^{+} + (b^{-}/a^{+})\Phi_n^{+}),$$
$$\bar P_n(z) = \frac{1}{2\pi}(\rho^{-}\bar\Psi_n^{-} - \rho^{+}\bar\Psi_n^{+}), \quad \bar Q_n(z) = -\frac{i}{2b^{+}b^{-}}(\rho^{+}V\bar\Psi_n + (b^{-}/a^{+})\bar\Phi_n^{+}). \qquad /3.6/$$

Иными словами, мы можем разлагать элементы $\mathfrak{M}^{(0)}$ по этим системам. В частности, разложения потенциала q_n и его вариации δq_n по $\{\Psi_n^{\pm}\}$ и $\{P_n, Q_n\}$ соответственно имеют вид:

$$q_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}(\rho^{-}\Psi_n^{-} - \rho^{+}\Psi_n^{+}) = -i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}P_n(z), \qquad /3.7/$$

$$\sigma_3\delta q_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}(\delta\rho^{-}\Psi_n^{-} + \delta\rho^{+}\Psi_n^{+}), \qquad /3.8а/$$

$$\sigma_3\delta q_n = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}(Q_n\delta\pi - P_n\delta\kappa), \qquad /3.8б/$$

$$\pi(z) = -\frac{1}{2\pi}\ln(1-\rho^{+}\rho^{-}(z)), \quad \kappa(z) = -\frac{i}{2}\ln(b^{+}/b^{-}(z)).$$

Так как мы ведем рассмотрение в суженном пространстве $\mathfrak{M}^{(0)}$, интеграл в /3.8б/ надо понимать в смысле главного значения в точках

$z=\pm 1$. Его сходимость гарантируется тем фактом, что разложение /3.8/ можно получить [10,12] путем сложения /3.8а/ и аналогичного разложения для $\sigma_3 \delta q_n$ по "квадратам" $\Phi_n^{\pm}(z)$, интегралы в которых хорошо определены.

Из /3.1/ и /3.7/ следует, что отображение $\mathfrak{F}$ однозначно и обратимо и является естественным обобщением преобразования Фурье; в качестве обобщения экспоненты входят $\Psi_n^{\pm}(z)$, их сопряженными являются $\Phi_n^{\pm}(z)$. Таким образом устанавливается, что МОЗР имеет смысл обобщенного преобразования Фурье.

Для того, чтобы эффективно воспользоваться разложениями /3.7/ и /3.8/ для анализа соответствующих РЭУ, остается ввести аналоги оператора дифференцирования, т.е. операторы, для которых "квадраты" являются собственными функциями, а именно:

$$(\Lambda_+ - z^2)\Psi_n^{\pm}(z) = (\Lambda_- - z^2)\Phi_n^{\pm}(z) = (\bar\Lambda_- - z^2)\bar\Psi_n^{\pm}(z) = (\bar\Lambda_- - z^2)\bar\Phi_n^{\pm}(z) = 0,$$
$$(\Lambda - z^2)P_n(z) = (\Lambda - z^2)Q_n(z) = (\bar\Lambda - z^2)\bar P_n(z) = (\bar\Lambda - z^2)\bar Q_n(z) = 0. \qquad /3.9/$$

Дискретный аналог системы Захарова-Шабата, который здесь рассматривается, отличается от своего непрерывного предела [3,4] возможностью введения двух наборов "квадратов", связанных с $Y_{n,\pm}^{\pm}(z)$ и $U_{n,\pm}^{\pm}(z)$ соответственно*. Этот факт лежит в основе факторизаций операторов $\Lambda_\pm$ и $\bar\Lambda_\pm$:

$$\Lambda_\pm = \Lambda_2^{\pm}\Lambda_1^{\pm}, \quad \bar\Lambda_\pm = \Lambda_1^{\pm}\Lambda_2^{\pm}, \qquad /3.10/$$

где Λ_i, $i=1,2$ определяются однозначно соотношениями:

$$\Lambda_1^{+}\Psi_n^{\pm}(z) = z\,\bar\Psi_n^{\pm}(z), \quad \Lambda_2^{+}\bar\Psi_n^{\pm}(z) = z\,\Psi_n^{\pm}(z),$$
$$\Lambda_1^{-}\Phi_n^{\pm}(z) = z\,\bar\Phi_n^{\pm}(z), \quad \Lambda_2^{-}\bar\Phi_n^{\pm}(z) = z\,\Phi_n^{\pm}(z). \qquad /3.11/$$

Исходя из линейной задачи /1.1/ и асимптотического поведения решений Йоста /2.2/, при помощи /2.3/, /2.5/ и /3.3-6/ получаются следующие явно ковариантные выражения для операторов $\Lambda_i^{\pm}$ и их обратных $\hat\Lambda_i^{\pm}$, $X_n \in \mathfrak{M}^{(0)}$:

$$\Lambda_1^{\pm}X_n = \mathfrak{D}_- X_n \mp (\mathfrak{D}_- q_n)\,\Sigma_n^{\pm}(X_k, [\sigma_3, q_n])h_k^{-1},$$

$$\Lambda_2^{\pm}X_n = h_n \mathfrak{L}_- D_+ X_n \mp q_n \Sigma_{n+1}^{\pm}(X_k, [\sigma_3, \mathfrak{L}_- q_k]),$$

$$\hat\Lambda_1^{\pm}X_n = h_n \mathfrak{L}_+ X_n \pm q_n \Sigma_{n+1}^{\pm}(X_k, [\sigma_3, D_+ q_{k-1}]),$$
$$\hat\Lambda_2^{\pm}X_n = \mathfrak{L}_+ D_- X_n \pm (D_+ q_{n-1})\,\Sigma_n^{\pm}(X_k, [\sigma_3, q_k])h_k^{-1}, \qquad /3.12/$$

где использованы следующие обозначения:

$$D_\pm X_n = X_{n\pm 1}, \quad \mathfrak{L}_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_3)D_\pm, \quad \Sigma_n^{+} = \sum_{k=n}^{\infty}, \quad \Sigma_n^{-} = \sum_{k=-\infty}^{n-1}. \qquad /3.3/$$

Детальный анализ, который будет изложен в отдельной работе, показывает, что операторы Λ и $\bar\Lambda$ тоже факторизуются:

$$\Lambda = \Lambda_2\Lambda_1, \quad \bar\Lambda = \Lambda_1\Lambda_2, \qquad /3.14/$$

где Λ_1 и Λ_2 связывают элементы симплектических базисов /3.6/:

$$\Lambda_1 P_n(z) = z\bar P_n(z), \quad \Lambda_1 Q_n(z) = z\bar Q_n(z),$$
$$\Lambda_2 \bar P_n(z) = zP_n(z), \quad \Lambda_2 \bar Q_n(z) = zQ_n(z). \qquad /3.15/$$

Между операторами $\Lambda_i^{\pm}$, $\Lambda_\pm$, $\bar\Lambda_\pm$ и их обратными с одной стороны и операторами Λ_i, Λ, $\bar\Lambda$ и их обратными с другой существуют простые, хотя и неочевидные, связи:

$$\Lambda_i = \frac{1}{2}(\Lambda_i^{+} + \Lambda_i^{+}), \quad \Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_+ + \Lambda_-), \quad \bar\Lambda = \frac{1}{2}(\bar\Lambda_+ + \bar\Lambda_-),$$
$$\hat\Lambda_i = \frac{1}{2}(\hat\Lambda_i^{+} + \hat\Lambda_i^{-}), \quad \hat\Lambda = \frac{1}{2}(\hat\Lambda_+ + \hat\Lambda_-), \quad \hat{\bar\Lambda} = \frac{1}{2}(\hat{\bar\Lambda}_+ + \hat{\bar\Lambda}_-). \qquad /3.16/$$

Совместность соотношений /3.10/, /3,14/ и /3.16/ следует из тождеств

$$(\Lambda_i^{+}\hat\Lambda_i^{-})^p + (\Lambda_i^{+}\hat\Lambda_i^{-})^p = 2, \quad i = 1, 2, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$(\Lambda_1^{+} - \Lambda_1^{-})(\Lambda_2^{+} - \Lambda_2^{-}) = (\Lambda_2^{+} - \Lambda_2^{-})(\Lambda_1^{+} - \Lambda_1^{-}) = 0. \qquad /3.17/$$

Отметим, наконец, что операторы Λ и $\bar\Lambda$ удовлетворяют следующим соотношениям сопряжения относительно кососкалярного произведения $[\![\ ,\ ]\!]$, введенного в /3.1/:

$$[\![\bar\Lambda X_n, Y_n]\!] = [\![X_n, \bar\Lambda Y_n]\!], \quad [\![\Lambda X_n, h_n^{-1} Y_n]\!] = [\![X_n h_n^{-1}, \Lambda Y_n]\!]. \qquad /3.18/$$

Сформулируем теперь основные результаты для РЭУ, связанных с системой /1.1/ /см. [10,12]/:

I. Преобразование $\mathfrak{F}$ позволяет доказать, что класс точно решаемых РЭУ

---

*В блочном случае возникает и третий набор "квадратов", основанный на $X_{n,\pm}^{\pm} = \chi_n^{\pm}\sigma_\pm \hat\chi_{n+1}^{\pm}$. В рассматриваемом здесь случае 2x2 есть простая связь $X_{n,\pm}^{\pm} = h_n^{-1} Y_{n,\pm}^{\pm}$.

$$i\sigma_3 q_{n,t} + F(\Lambda)q_n = 0, \quad F(z) = \sum_p F_p z^{2(p-1)}$$ /3.19/

эквивалентен каждой из следующих двух систем линейных уравнений на данные рассеяния:

$$i\rho_t^{\pm}(z) \mp F(z)\rho^{\pm}(z) = 0,$$ /3.20а/

$$\pi_t(z) = 0, \quad \kappa_t(z) = -F(z).$$ /3.20б/

II. С классом РЭУ /3.19/ связана бесконечная серия интегралов движения A_p, $p = 0, \pm 1, \ldots$ которая порождается функционалом $A(z)$ /см. /2.6/, $A_t(z) = 0$/:

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{-k} z^{2k}, \; |z| \ll 1; \quad A(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^{-2k}, \; |z| \gg 1.$$ /3.21/

Сохраняющиеся величины A_p и их вариации можно выразить, с одной стороны, через соответствующие данные рассеяния; с другой стороны, их можно рассматривать и как функционалы от потенциала q_n:

$$A_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln h_n = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}\pi(z) = \ln a^+(1)\, a^-(1).$$

$$A_p = \frac{1}{p}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} ([q_k, \sigma_3]h_k^{-1}, \Lambda^p q_k) = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{2p}\pi(z), \; p \neq 0$$ /3.22/

$$\delta A_p = [\![\sigma_3 \delta q_n h_n^{-1}, \Lambda^p q_n]\!] = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{2p}\delta\pi(z).$$

Приведем явные выражения для двух простейших A_p:

$$A_{\pm 1} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathcal{L}_{\mp} q_n, \mathcal{L}_{\mp} q_n).$$ /3.23/

III. Уравнения /3.19/ описывают бесконечномерные вполне интегрируемые гамильтоновы системы. При этом существует счетное число /иерархия/ симплектических форм $\Omega^{(m)}$ и гамильтонианов $H_F^{(m)}$, которые порождают одно и то же уравнение вида /3.19/:

$$\Omega^{(m)} = i[\![\sigma_3 \delta q_n h_n^{-1} \wedge \Lambda^{m+1}\sigma_3 \delta q_n]\!] = 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{2(m+1)} \delta\pi(z) \wedge \delta\kappa(z),$$ /3.24/

/значок $\wedge$ обозначает внешнее произведение/,

$$H_F^{(m)} = \sum_p F_p A_{p+m} = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} F(z) z^{2(m+1)} \pi(z).$$ /3.25/

Из /3.24/ и /3.25/ полная интегрируемость уравнений /3.19/ очевидна - переменными типа действие-угол являются $z^{2(m+1)}\pi(z)$ и $\kappa(z)$ соответственно.

Замечание. Можно показать, что формулы /3.19/, /3.22/ и /3.24/ не изменятся, если вместо оператора Λ поставим любой из операторов Λ_+ или Λ_-.

4. Обратимся к системе /1.6/, которая калибровочно-эквивалентна дискретной системе Захарова-Шабата /1.1/. Следуя идее работы /7/, мы поставим в соответствие калибровочному преобразованию $g: \ell_n \to \tilde{\ell}_n$ замену базиса в алгебре $g\ell(r, \mathbf{C})$.

Пусть X_n - 2x2 матричнозначная последовательность; очевидно, X_n можно разложить по матрицам Паули: $X_n = X_n^{\mu}\sigma_{\mu}$. Преобразование подобия с f_n:

$$X_n \to \tilde{X}_n = f_n^{-1} X_n f_n$$ /4.1/

мы будем рассматривать как переход к подвижному базису:

$$\sigma_{\mu} \to \tilde{\sigma}_{n,\mu} = f_n^{-1}\sigma_{\mu} f_n, \quad \tilde{\sigma}_{n,3} = S_{n-1}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$ /4.2/

очевидно, $\tilde{X}_n = X_n^{\mu}\tilde{\sigma}_{n,\mu}$. При этом операторы сдвига $D_\pm$ /3.13/ преобразуются в "ковариантные" операторы сдвига $\tilde{D}_\pm$:

$$\tilde{D}_\pm \tilde{X}_n = f_n^{-1}(D_\pm X_n) f_n = f_n^{-1} f_{n\pm 1} (D_\pm \tilde{X}_n) f_{n\pm 1}^{-1} f_n = X_{n\pm 1}^{\mu}\tilde{\sigma}_{n,\mu},$$ /4.3/

которые, как нетрудно проверить, сохраняют подвижный базис /4.2/: $\tilde{D}_\pm \tilde{\sigma}_{n,\mu} = \tilde{\sigma}_{n,\mu}$.

При переходе к базису /4.2/ разбиение /3.2/ и кососкалярное произведение /3.1/ тоже преобразуются ковариантно:

$$\tilde{X}_n = \tilde{X}_n^{\tilde{d}} + \tilde{X}_n^{\tilde{a}}, \quad \tilde{X}_n^{\tilde{a}} = f_n^{-1} X_n^{a} f_n,$$

$$\tilde{X}_n^{\tilde{d}} = f_n^{-1} X_n^{d} f_n = (\tilde{X}_n, \tilde{\sigma}_0)\sigma_0 + (\tilde{X}_n, S_{n-1}) S_{n-1},$$ /4.4/

$$[\![X_n, Y_n]\!] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (X_n, [\sigma_3, Y_n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{X}_n, [S_{n-1}, \tilde{Y}_n]) = [\![\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n]\!]_{\sim}.$$ /4.5/

В /4.5/ мы воспользовались инвариантностью формы Киллинга по отношению к преобразованию подобия /4.1/.

Естественно также ожидать, что элементы фазового пространства $\tilde{\mathfrak{M}}^{(0)}$ для уравнений типа РФГ будут получаться из соответствующих элементов $\mathfrak{M}^{(0)}$ преобразованием /4.1/. В то же время уравнения типа РФГ пишутся в терминах потенциала /1.6/ S_n и поэтому для нас существенно найти явные выражения через S_n для всех нужных нам элементов из $\tilde{\mathfrak{M}}^{(0)}$. Начнем с выяснения связи между образом потенциала $\tilde{q}_n = f_n^{-1} q_n f_n \in \tilde{\mathfrak{M}}^{(0)}$ и S_n. Из /2.8/ и /2.10/ следует, что:

$$f_{n+1}^{-1}\sigma_3 f_n = \frac{1}{2}(S_n + S_{n-1}),\quad f_{n+1}^{-1} f_n = \frac{1}{2}(S_n + S_{n-1})S_n. \qquad /4.6/$$

Пользуясь /4.6/, из /2.8/ получаем:

$$\tilde{q}_n = f_n^{-1} q_n f_n = -4h_n[S_n, S_{n-1}],\quad h_n = -4\det^{-1}(S_n + S_{n-1}). \qquad /4.7/$$

"Квадраты" решений для преобразованной системы вводятся с помощью $\tilde{Y}^{\pm}_{n,\pm}(z) = \tilde{\chi}^{\pm}_{n+1}\sigma_{\pm}\hat{\tilde{\chi}}^{\pm}_n$ и $\tilde{U}^{\pm}_{n,\pm}(z) = \tilde{\chi}^{\pm}_n\sigma_{\pm}\hat{\tilde{\chi}}^{\pm}_n$, где $\tilde{\chi}^{\pm}_n(z)$ – фундаментальные аналитические решения /2.16/ задачи /1.6/, а именно:

$$\tilde{\bar{\Psi}}^{+}_n(z) = -\tilde{a}^{+}(z)(\tilde{Y}^{+}_{n-1,-}(z))^{\tilde{a}},\quad \tilde{\bar{\Psi}}^{-}_n(z) = \tilde{a}^{-}(z)(\tilde{Y}^{-}_{n-1,+}(z))^{\tilde{a}},$$

$$\tilde{\bar{\Phi}}^{+}_n(z) = \tilde{a}^{+}(z)(\tilde{Y}^{+}_{n-1,+}(z))^{\tilde{a}},\quad \tilde{\bar{\Phi}}^{-}_n(z) = -\tilde{a}^{-}(z)(\tilde{Y}^{-}_{n-1,-}(z))^{\tilde{a}},$$

$$\tilde{\Psi}^{+}_n(z) = -\tilde{a}^{+}(z)(\tilde{W}^{+}_{n,-}(z))^{\tilde{a}},\quad \tilde{\Psi}^{-}_n(z) = \tilde{a}^{-}(z)(\tilde{W}^{-}_{n,+}(z))^{\tilde{a}}, \qquad /4.8/$$

$$\tilde{\Phi}^{+}_n(z) = \tilde{a}^{+}(z)(\tilde{W}^{+}_{n,+}(z))^{\tilde{a}},\quad \tilde{\Phi}^{-}_n(z) = -\tilde{a}^{-}(z)(\tilde{W}^{-}_{n,-}(z))^{\tilde{a}},$$

$$W^{\pm}_{n,\pm}(z) = f_n^{-1} f_{n+1}\tilde{U}_n(z).$$

Учитывая имеющее место для произвольного решения $v_n(z)$ линейной задачи /1.1/ тождество:

$$f_{n+1}^{-1} Z^{-1/2} v_{n+1}(z) = f_n^{-1} Z^{1/2} v_n(z) \qquad /4.9/$$

и /4.4/, находим связь преобразованных "квадратов" /4.8/ с "квадратами" /3.4/ и /3.5/:

$$\tilde{\bar{\Psi}}^{\pm}_n(z) = z^{\pm 1} f_n^{-1}\bar{\Psi}^{\pm}_n(z) f_n,\quad \tilde{\bar{\Phi}}^{\pm}_n(z) = \frac{z^{\mp 1}}{(a^{\pm}(1))^2} f_n^{-1}\bar{\Phi}^{\pm}_n f_n,$$

$$\tilde{\Psi}^{\pm}_n(z) = z^{\pm 1} f_n^{-1}\Psi^{\pm}(z) f_n,\quad \tilde{\Phi}^{\pm}_n(z) = \frac{z^{\mp 1}}{(a^{\pm}(1))^2} f_n^{-1}\Phi^{\pm}_n f_n. \qquad /4.10/$$

Симплектические базисы $\{\tilde{\bar{P}}_n, \tilde{\bar{Q}}_n\}$ и $\{\tilde{P}_n, \tilde{Q}_n\}$, соответствующие задаче /1.6/, вводятся также в полной аналогии с базисами $\{\bar{P}_n, \bar{Q}_n\}$ и $\{P_n, Q_n\}$ /3.6/ $(\det T(z) = V,\ \det\tilde{T}(z) = 1)$:

$$\tilde{\bar{P}}_n(z) = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\rho}^{-}\tilde{\bar{\Psi}}^{-}_n - \tilde{\rho}^{+}\tilde{\bar{\Psi}}^{+}_n),\quad \tilde{\bar{Q}}_n(z) = -\frac{i}{2b^{+}b^{-}}(\tilde{\rho}^{-}\tilde{\bar{\Psi}}^{+}_n + (\tilde{b}^{-}/\tilde{a}^{+})\tilde{\bar{\Phi}}^{+}_n); \qquad /4.11/$$

переменные $\{\tilde{P}_n, \tilde{Q}_n\}$ выражаются точно таким же образом через "квадраты" $\tilde{\Psi}_n$, $\tilde{\Phi}_n$. Связь между симплектическими базисами обеих задач имеет вид:

$$\tilde{P}_n(z) = f_n^{-1}P_n(z)f_n,\quad \tilde{Q}_n(z) = f_n^{-1}Q_n(z)f_n,$$
$$\tilde{\bar{P}}_n(z) = f_n^{-1}\bar{P}_n(z)f_n,\quad \tilde{\bar{Q}}_n(z) = f_n^{-1}\bar{Q}_n(z)f_n. \qquad /4.12/$$

Порождающие операторы, которые "диагонализуются" по преобразованным "квадратам", получаются очевидным образом действием преобразования /4.1/:

$$\tilde{\Lambda}^{\pm}_i = f_n^{-1}\Lambda^{\pm}_i f_n,\quad \tilde{\Lambda}_{\pm} = \tilde{\Lambda}^{\pm}_2\tilde{\Lambda}^{\pm}_1,\quad \tilde{\bar{\Lambda}}_{\pm} = \tilde{\Lambda}^{\pm}_1\tilde{\Lambda}^{\pm}_2,$$
$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_{+} + \tilde{\Lambda}_{-}),\quad \tilde{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2}(\tilde{\bar{\Lambda}}_{+} + \tilde{\bar{\Lambda}}_{-}). \qquad /4.13/$$

Для того, чтобы получить явные выражения для операторов $\tilde{\Lambda}^{\pm}_i$ только через S_n, достаточно заменить везде в /3.12/ $D_{\pm}$, q_n и $D_{\pm}$ на $\tilde{D}_{\pm}$, $\tilde{q}_n$ и $\tilde{D}_{\pm}$ соответственно, где

$$\tilde{D}_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_0 + S_{n-1}) + \frac{1}{2}(\sigma_0 - S_{n-1})\tilde{D}_{\pm}. \qquad /4.14/$$

Величины $\tilde{D}_{\pm}$ и $\tilde{q}_n$ приведены в /4.3/ и /4.7/; явная формула для $\tilde{D}_{\pm}$ через S_n получается с учетом /4.6/. Полезно также иметь ввиду следующее из /2.8/ тождество:

$$\tilde{q}_{n-1} \equiv f_n^{-1}q_{n-1}f_n = f_{n-1}^{-1}q_{n-1}f_{n-1}. \qquad /4.15/$$

Отметим также, что свойства сопряжения для операторов $\tilde{\bar{\Lambda}}$ и $\tilde{\Lambda}$ относительно кососкалярного произведения /4.5/ автоматически переносятся из /3.18/:

$$[\![\tilde{\bar{\Lambda}}\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n]\!] = [\![\tilde{X}_n, \tilde{\bar{\Lambda}}\tilde{Y}_n]\!],\ [\![\tilde{\Lambda}\tilde{X}_n, h_n^{-1}\tilde{Y}_n]\!] = [\![\tilde{X}_n, h_n^{-1}\tilde{\Lambda}\tilde{Y}_n]\!]. \qquad /4.16/$$

Наиболее трудный шаг состоит в нахождении формулы, выражающей $\delta q_n = f_n^{-1}\delta q_n f_n$ через S_n и его вариацию δS_n. Начнем с того, что $\delta S_{n-1} = f_n^{-1}[\sigma_3, \delta f_n f_n^{-1}] f_n$, откуда следует соотношение:

$$(\delta f_n f_n^{-1})^a = \frac{1}{4} f_n [S_{n-1}, \delta S_{n-1}] f_n^{-1}. \qquad /4.17/$$

Это наводит на мысль рассмотреть более общие величины $u_n(z) = \delta\psi_n\hat{\psi}_n(z)$ и $y_n(z) = \delta\psi_{n-1}\hat{\psi}_n(z)$; очевидно, $u_n(1) = \delta f_n f_n^{-1}$. Нетрудно убедиться, что $u_n(z)$ и $y_n(z)$ удовлетворяют уравнениям, похожим на те, которым удовлетворяют $U^{\pm}_{n,\pm}$ и $Y^{\pm}_{n,\pm}$ а именно:

$$U^{\pm}_{n+1,\pm}(z)\ell_n(z) - Y^{\pm}_{n,\pm}(z) = 0, \quad Y^{\pm}_{n,\pm}(z) - \ell_n(z)U^{\pm}_{n,\pm}(z) = 0, \qquad /4.18/$$

$$u_{n+1}(z)\ell_n(z) - y_n(z) = 0, \quad u_n(z) - \ell_n(z)y_n(z) = \delta q_n. \qquad /4.19/$$

Последовательное исключение из /4.18/ диагональных частей $U^{\pm}_{n,\pm}$ и $Y^{\pm}_{n,\pm}$ приводит к уравнениям /3.11/ и к явным выражениям /3.12/ для $\Lambda^{\pm}_i$. Точно такая же процедура, примененная к /4.19/, дает следующие формулы, связывающие $(u_n(z))^a$ и $(y_n(z))^a$:

$$(\Lambda^{+}_2 - \hat{\Lambda}^{+}_1)(u_n(z))^a = (z - \frac{1}{z})(y_n(z))^a + Z^{-1}\sigma_3\delta q_n$$

$$(\Lambda^{-}_2 - \hat{\Lambda}^{-}_1)(u_n(z))^a = (z - \frac{1}{z})(y_n(z))^a + Z^{-1}\sigma_3\delta q_n + \qquad /4.20/$$

$$+ \sigma_3[q_n, Z(\delta T^{-1}(z)T(z))^d].$$

Приравнивая в /4.20/ $z = 1$ и пользуясь /2.13а/, получаем:

$$(\Lambda^{+}_2 - \hat{\Lambda}^{+}_1)(u_n(1))^a = \sigma_3\delta q_n,$$

$$(\Lambda^{-}_2 - \hat{\Lambda}^{-}_1)(u_n(1))^a = \sigma_3\delta q_n + q_n\delta\ln(a^+(1)/a^-(1)), \qquad /4.21/$$

откуда, ввиду /3.16/, следует

$$(\Lambda_2 - \hat{\Lambda}_1)(u_n(1))^a = \sigma_3\delta q_n + \frac{1}{2}q_n\delta\ln(a^+(1)/a^-(1)). \qquad /4.22/$$

Для того, чтобы получить требуемый ответ, остается применить преобразование /4.1/ к /4.21/ и /4.22/ и воспользоваться /4.17/:

$$\widetilde{\sigma_3\delta q}_n = S_{n-1}f^{-1}_n\delta q_n f_n = (\tilde{\Lambda}^{+}_2 - \hat{\tilde{\Lambda}}^{+}_1)\frac{1}{4}[S_{n-1}, \delta S_{n-1}] =$$

$$= (\tilde{\Lambda}_2 - \hat{\tilde{\Lambda}}_1)\frac{1}{4}[S_{n-1}, \delta S_{n-1}] - \frac{1}{2}\tilde{q}_n\delta\ln(a^+(1)/a^-(1)). \qquad /4.23/$$

Из свойства полноты "квадратов" /3.4/ и /3.5/ и симплектических переменных /3.6/ следует, что системы $\{\tilde{\Psi}^{\pm}_n\}$, $\{\bar{\tilde{\Psi}}^{\pm}_n\}$, $\{\tilde{\Phi}^{\pm}_n\}$, $\{\bar{\tilde{\Phi}}^{\pm}_n\}$, $\{\tilde{P}_n, \tilde{Q}_n\}$, $\{\tilde{\tilde{P}}_n, \tilde{\tilde{Q}}_n\}$ тоже являются полными, т.е. любой элемент пространства $\mathfrak{M}^{(0)}$ может быть разложен по каждой из них. Нужные разложения можно получить и непосредственно, применив к соответствующим разложениям, связанным с задачей /1.1/, калибровочное преобразование /4.1/. Так, в частности, из /3.7/ получаем:

$$\tilde{q}_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}(\tilde{\rho}^-\tilde{\Psi}^-_n - \tilde{\rho}^+\tilde{\Psi}^+_n)(z), \qquad /4.24а/$$

$$\tilde{q}_n = -i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}\tilde{P}_n(z). \qquad /4.24б/$$

Отметим, что разложение /4.24б/ после действия оператором $\tilde{\Lambda}_1 - \hat{\tilde{\Lambda}}_2$ переходит в:

$$S_{n-1}(\tilde{q}_n - \tilde{q}_{n-1}) = -i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}(z - \frac{1}{z})\bar{\tilde{P}}_n(z). \qquad /4.25/$$

Точно так же, как и в случае задачи /1.1/, формула обращения:

$$\tilde{\rho}^{\pm}(z) = \frac{1}{(\tilde{a}^{\pm})^2}[\![\tilde{q}_n, h^{-1}_n\tilde{\Phi}^{\pm}_n(z)]\!], \qquad /4.26/$$

которая получается путем калибровочного преобразования из /3.1/, и разложение /4.24а/ позволяют убедиться в том, что МОЗР имеет смысл обобщенного преобразования Фурье. Действительно, из /4.24а/ и /4.26/ следует, что отображение $\{\tilde{q}_n\} \to \{\tilde{\rho}^{\pm}(z)\}$ однозначно и обратимо. Далее S_n восстанавливается однозначно по $\tilde{q}_n$ как решение линейного разностного уравнения $S_n - S_{n-1} = S_{n-1}\tilde{q}_n - \tilde{q}_n S_n$, удовлетворяющего граничным условиям $\lim_{|n|\to\infty} S_n = \sigma_3$.

Для того, чтобы написать разложение для вариации потенциала задачи /1.6/ по "квадратам" $\{\bar{\tilde{\Psi}}^{\pm}_n\}$, применим сначала преобразование /4.1/ к /3.8а/ и затем подействуем оператором $(\tilde{\Lambda}^{+}_2 - \hat{\tilde{\Lambda}}^{+}_1)^{-1} = (\bar{\tilde{\Lambda}}_+ - 1)^{-1}\tilde{\Lambda}^{+}_1$. С учетом /4.23/, /3.9/ и /3.11/ после несложных выкладок получаем:

$$\frac{1}{4}[S_{n-1}, \delta S_{n-1}] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2 - 1}(\delta\tilde{\rho}^+\bar{\tilde{\Psi}}^+_n + \delta\tilde{\rho}^-\bar{\tilde{\Psi}}^-_n). \qquad /4.27/$$

Сходимость интеграла в /4.27/, который следует понимать в смысле главного значения в точках $z = \pm 1$, обеспечивается условием /2.13б/. Путем сложения /4.27/ с аналогичным разложением для $\frac{1}{4}[S_{n-1}, \delta S_{n-1}]$ по "квадратам" $\{\bar{\tilde{\tilde{\Phi}}}^{\pm}_n\}$, которое тоже хорошо определено ввиду /2.13б/, можно получить также разложение по системе $\{\bar{\tilde{P}}_n, \bar{\tilde{Q}}_n\}$:

$$\frac{1}{4}[S_{n-1}, \delta S_{n-1}] = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2 - 1}(\bar{\tilde{Q}}_n\delta\tilde{\pi} - \bar{\tilde{P}}_n\delta\tilde{\kappa})(z), \qquad /4.28/$$

где

$$\tilde{\pi}(z) = \pi(z) = -\frac{1}{2\pi}\ln(1 - \tilde{\rho}^+\tilde{\rho}^-(z)),$$

$$\tilde{\kappa}(z) = -\frac{i}{2}\ln(\tilde{b}^+/\tilde{b}^-(z)) = \kappa(z) + i\ln z + \frac{i}{2}\ln(a^+(1)/a^-(1)). \qquad /4.29/$$

Разложения /4.25/ и /4.28/ позволяют доказать все приведенные ниже результаты для уравнений типа РНУШ. Идея доказательства такая же, как и для уравнений типа РНУШ /см./12/ /. Ниже мы покажем, как результаты I-III раздела 3 переносятся на уравнения типа РФГ путем непосредственного применения калибровочного преобразования /4.1/.

$\tilde{\text{I}}$. Класс уравнений типа РФГ содержит все РЭУ вида:

$$\frac{i}{4}[S_{n-1}, S_{n-1,t}] + \tilde F(\tilde\Lambda) S_{n-1}(\tilde q_n - \tilde q_{n-1}) = 0, \quad \tilde F(z) = \sum_p \tilde F_p z^{2(p-1)}. \qquad /4.30/$$

Уравнение /4.30/ эквивалентно уравнению /3.19/, а следовательно, - и линейным уравнениям /3.20/ для данных рассеяния, если функции $F(z)$ и $\tilde F(z)$ связаны соотношением:

$$F(z) = (z^2 + z^{-2} - 2)\tilde F(z). \qquad /4.31/$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно подействовать на /3.19/ оператором $(\Lambda_2 - \hat\Lambda_1)^{-1} = (\bar\Lambda + \hat{\bar\Lambda} - 2)^{-1}(\Lambda_1 - \hat\Lambda_2)$ и применить преобразование /4.1/. В частности, подставив в /4.31/ закон дисперсии для РНУШ $F(z) = (z^2 + z^{-2} - 2)$, получим $\tilde F = 1$, а соответствующее РЭУ /4.30/ перейдет в РФГ /1.5/.

$\widetilde{\text{II}}$. Из явной связи между данными рассеяния для систем /1.1/ и /1.6/, без труда убеждаемся, что порождающие функционалы интегралов движения просто связаны между собой: $\ln\tilde a^{\pm}(z) = \ln a^{\pm}(z) - \ln a^{\pm}(1)$. Так как $\frac{d}{dt}\ln a^{\pm}(1) = 0$, то наборы сохраняющихся величин A_p для обеих систем совпадают. В терминах потенциала задачи /1.6/ они имеют вид:

$$A_p = \frac{1}{p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}([\tilde q_k, S_{k-1}], h_k^{-1}\tilde\Lambda^p \tilde q_k) = i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} z^{2p}\tilde\pi(z),$$

$$A_0 = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\ln\frac{1}{2}(1 + S_{n-1}S_n) = i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}\tilde\pi(z). \qquad /4.32/$$

$$\delta A_p = -\frac{1}{4}[\![[S_{n-1}, \delta S_{n-1}], \tilde{\tilde\Lambda}^p S_{n-1}(\tilde q_n - \tilde q_{n-1})]\!].$$

В частности, имеем:

$$A_{\pm 1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}\{K(S_n S_{n-1})K(S_{n-1}S_n)(1 \pm S_n)\}, \qquad /4.33/$$

где $K(X) = (1 - X)(1 + X)^{-1}$ - преобразование Кэли матрицы X.

$\widetilde{\text{III}}$. Уравнения /4.30/, так же как и уравнения /3.19/, описывают вполне интегрируемые бесконечномерные гамильтоновы системы.

Соответствующая иерархия гамильтоновых структур задается парами гамильтонианов $\tilde H^{(m)}_{\tilde F}$ и 2-форм $\tilde\omega^{(m)}$, где:

$$\tilde H^{(m)}_{\tilde F} = \sum_p \tilde F_p A_{p+m} = i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}\tilde F(z) z^{2(m+1)}\tilde\pi(z), \qquad /4.34/$$

$$\tilde\Omega^{(m)} = \frac{i}{16}[\![[S_{n-1}, \delta S_{n-1}] \wedge \tilde{\tilde\Lambda}^{m+1}[S_{n-1}, \delta S_{n-1}]]\!] = \qquad /4.35/$$

$$= 2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}\frac{z^{2(m+1)}}{z^2 + z^{-2} - 2}\delta\tilde\pi(z) \wedge \delta\tilde\kappa(z).$$

В качестве переменных типа действие-угол в этом случае выступают величины $z^{(2m+1)}\tilde\pi(z)$ и $\tilde\kappa(z)(z^2 + z^{-2} - 2)^{-1}$ соответственно.

Связь между иерархиями гамильтоновых структур, соответствующих обеим линейным задачам, легче всего можно найти в терминах данных рассеяния. Сравнение /4.34/ и /3.25/ с учетом /4.31/ дает:

$$H^{(m)}_F = \tilde H^{(m+1)}_{\tilde F} + \tilde H^{(m-1)}_{\tilde F} - 2\tilde H^{(m)}_{\tilde F}. \qquad /4.36/$$

Чтобы установить связь между 2-формами, выразим сначала $\Omega^{(m)}$ /3.24/ через данные рассеяния задачи /1.6/:

$$\Omega^{(m)} = 2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} z^{2(m+1)}\delta\tilde\pi \wedge \delta\tilde\kappa + i\delta\ln(a^+(1)/a^-(1)) \wedge \delta A_{m+1}. \qquad /4.37/$$

Сравнивая теперь /4.37/ и /4.35/, находим:

$$\Omega^{(m)} = \tilde\Omega^{(m+1)} + \tilde\Omega^{(m-1)} - 2\tilde\Omega^{(m)} + i\delta\ln(a^+(1)/a^-(1)) \wedge \delta A_{m+1}. \qquad /4.38/$$

Так как сужение вариаций $\delta\ln(a^+(1)/a^-(1)$ и δA_{m+1} на пространство решений любого из РЭУ /4.30/ равно нулю, обе иерархии гамильтоновых структур эквивалентны между собой. Отметим, что простейшая из симплектических форм /4.35/

$$\tilde\Omega^{РФГ} = \tilde\Omega^{(-1)} = -\frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\delta S_n \wedge [S_n, \delta S_n]) \qquad /4.39/$$

совпадает с канонической для систем типа РФГ /16/. Нетрудно убедиться в том, что $\tilde\Omega^{РФГ}$ вместе с гамильтонианом $\tilde H^{РФГ} = A_0$ порождает РФГ /1.5/.

Закончим этот раздел кратким обсуждением перехода к непрерывному пределу. Для уравнений типа РНУШ этот вопрос обсуждался в /10/. Напомним, что этот предел по параметру $\Delta \to 0$, где $z = e^{i\lambda\Delta}$,

$q_n \cong \Delta q(x)$, $S_n \cong S(x)$, причем $x = n\Delta$ остается фиксированным. При $\Delta \to 0$ линейная задача /1.6/ принимает вид $i\frac{d}{dx}\Psi(x,\lambda) = \lambda S(x)\Psi(x,\lambda)$, а формулировка свойств $\widetilde{\mathrm{I}}-\widetilde{\mathrm{III}}$ из раздела 4 перейдет в соответствующие формулировки для уравнений типа ФГ /см.[7] /. В частности, $\tilde{H}^{РФГ} = A_0$ и $\tilde{\Omega}^{РФГ}$ /4.39/ при $\Delta \to 0$ равны, $\Delta\tilde{H}^{ФГ} = \Delta\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{tr}\, S_x^2$ и $\Delta^{-1}\tilde{\Omega}^{ФГ} = -i\Delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{tr}(\delta S \wedge [S, \delta S])$ соответственно, где $\tilde{H}^{ФГ}$ и $\tilde{\Omega}^{ФГ}$ - канонические выражения для гамильтониана и 2-формы классической непрерывной модели ФГ. Для того, чтобы получить уравнения движения этой модели, мы должны также в /1.5/ заменить параметр эволюции t на $\Delta^2 t$.

Высшие интегралы движения для модели ФГ получаются как предел подходящих линейных комбинаций A_p. Так, для того, чтобы получить p-тый интеграл $A_p^{ФГ}$ ФГ, мы должны рассмотреть $\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k A_{p-k}$, что соответствует закону дисперсии $(z - z^{-1})^{2p}$. В пределе $\Delta \to 0$ это выражение переходит в $\Delta^{2p+1} A_p^{ФГ}$. Аналогично, для того, чтобы получить m-тую симплектическую форму $\tilde{\Omega}^{(m)}_{ФГ}$ для ФГ, мы должны рассмотреть предел выражения $\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-1)^k \tilde{\Omega}^{(m-k)} \cong \Delta^{2m-1}\,\tilde{\Omega}^{(m)}_{ФГ}$.

Последнее наше замечание состоит в том, что в непрерывном пределе упрощаются связи между иерархиями гамильтоновых структур. Действительно, формулы /4.36/ и /4.38/ переходят в $H^{(m)}_{НУШ} = \tilde{H}^{(m+2)}_{ФГ}$ и $\Omega^{(m)}_{НУШ} = \tilde{\Omega}^{(m+2)}_{ФГ} + \ldots$ соответственно, что воспроизводит основной результат работы[17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ablowitz M.J. et al. Stud.Appl.Math., 1974, 53, No 4, p.249.
2. Kaup D.J. J.Math.Annal.Appl., 1976, 54, No 3, p. 849.
3. Kaup D.J., Newell A.C. Adv.Math., 1979, 31, p. 67.
4. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Болг. физ.ж., 1980, 7, №1, с. 28; 1980, 7, №2, с. 119.
5. Захаров В.Е. Тахтаджян Л.А. ТМФ, 1979, 38, №1, с. 26.
6. Захаров В.Е., Михайлов А.В. ЖЭТФ, 1978, 74, №6, с. 1953.
7. Gerdjikov V.S., Yanovski A.B. Phys.Lett.A, 1984, 103A, p. 232.
8. Ablowitz M.J., Ladik J.F. J.Math.Phys., 1975, 16, No 3, p. 598; 1976, 17, No 6, p. 1011.
9. Kako F., Mugibayashi N. Progr.Theor.Phys., 1979, 61, No 3, p. 776.
10. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I., Kulish P.P. Preprint of the JINR, E2-80-882, Dubna, 1981.
11. Герджиков В.С., Иванов М.И. ТМФ, 1982, 52, №1, с. 89.

12. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I., Kulish P.P. J.Math.Phys., 1984, 25, No 1, p. 25.
13. Ishimori Y.I. J.Phys.Soc.Japan, 1982, 51, No 11, p. 3417.
14. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I., Vaklev J.S. In JINR, D17-84-407, p. 42.
15. Хабибулин И.Т. ДАН СССР, 1979, 249, №1, с. 67.
16. Faddeev L.D. Preprint CEN-Saclay, S.Ph.T./82/76, 1982.
17. Кулиш П.П., Рейман А.Г. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1978, 77, с. 134.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 декабря 1984 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Ваклев Й.С., Герджиков В.С., Иванов М.И. P2-84-803

Калибровочное преобразование порождающих операторов, связанных с дискретной системой Захарова-Шабата

Предложенный ранее метод разложения по "квадратам" решений разностного аналога системы Захарова-Шабата сформулирован в калибровочно-ковариантном виде. На этой основе получены соответствующие разложения по "квадратам" решений и явно вычислены порождающие операторы для калибровочно-эквивалентной системы. Таким образом основные результаты, касающиеся разностных уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера, переформулируются для разностных аналогов уравнений типа ферромагнетика Гайзенберга, В частности, установлена эквивалентность иерархий гамильтоновских структур для обоих типов уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Vaklev J.S., Gerdjikov V.S., Ivanov M.I. P2-84-803

Gauge Transformations of the Generating Operators, Related to the Discrete Zakharov-Shabat System

A gauge covariant formulation of the method of expansions over the "squared" solutions of the difference Zakharov-Shabat system is proposed. On this ground the corresponding expansions over the "squared" solutions and the explicit form of the generating operators for the gauge equivalent system are obtained. Thus the main results concerning the difference non-linear Schrödinger type equations are reformulated for the difference analogs of the Heisenberg ferromagnetic type equations. In particular, the interrelation between the corresponding hierarchies of Hamiltonian structures is established.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984