

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-84-716

Г.В.Ефимов

ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА
И КОНФАЙНМЕНТ

Направлено в журнал "Annals of Physics"

1984

Введение

В настоящее время считается общепринятым, что инфракрасные сингулярности глюонного пропагатора

$$\tilde{D}(k^2) = 1/(k^2)^2 \quad (1)$$

приводят к конфайнменту кварков в квантовой хромодинамике (КХД). Этому вопросу посвящено такое множество работ, что перечислять их всех просто невозможно.

В изучаемой проблеме можно выделить три основные ступени:

- 1) доказательство того, что ожидаемое инфракрасное поведение пропагатора глюона (I.I) действительно следует из уравнений КХД;
- 2) доказательство того, что сингулярность (I.I) действительно ведет к конфайнменту кварков;
- 3) формулировка механизма возникновения стабильных адронных состояний из кварков, удовлетворяющих условию конфайнмента.

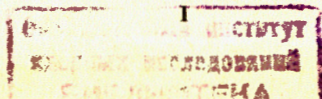
Коротко остановимся на успехах, достигнутых в решении каждой из этих проблем.

Первое. Несмотря на многочисленные усилия (см., например, работы /1-5/), удалось лишь показать, что искомая инфракрасная особенность (I) при разного рода предположениях не противоречит уравнениям Швингера-Дайсона (ШД) в КХД. Следует особо подчеркнуть, что уравнения ШД непосредственно связаны с теорией возмущений, т.е. суммируют определенные классы диаграмм и поэтому никаким образом не учитывают принципиально непертурбативные явления в КХД, такие, как инстантоны (см. /6/) или дальнейшие предположения о существовании кваркового и глюонного конденсатов /7/. Поэтому статус инфракрасной особенности (I.I) настолько неустойчив, что появилось достаточно обоснованное сомнение /8,9/ в правильности такого поведения (I.I) и, как следствие, предположение о неполном конфайнменте, т.е. о возможности наблюдения кварков.

Второе. Здесь наиболее существенным является отсутствие точного определения: что такое кварковый конфайнмент. Имеется два наиболее распространенных определения. Одно из них под конфайнментом понимает убывание вильсоновской петли /10,11/:

$$\langle Sp T \exp \{ i g \oint_L dx_\mu A_\mu(x) \} \rangle \sim e^{-const \cdot S} \quad (2)$$

где S - площадь, охватываемая петлей L . С этим определением непосредственно связан потенциальный подход, в котором под конфайнментом понимается положение, когда пропагатор глюонного поля определяет линейно растущий потенциал между кварком и антикварком (см., например, /12/). При этом следует особо подчеркнуть, что в этом определении ничего не



говорится о конфайнменте отдельного кварка. Считается, что поведение глюонного пропагатора (I) обеспечивает выполнение кваркового кон-
файнмента в сформулированном выше смысле.

Другое определение конфайнмента связано с поведением вблизи мас-
совой поверхности функции Грина кварка, возникшей в результате взаимо-
действия с глюонным полем. Под конфайнментом понимается исчезновение
простого полюса у функции Грина кварка в точке $p^2 = m_q^2$, где m_q -
- масса кварка. В литературе имеются утверждения о том, что функция Грина
кварка может быть целой /13,14/, но может быть и не целой, однако полюс
первого порядка в точке $p^2 = m_q^2$ исчезает /15,16/. В этих работах
также имеется ряд предположений (и даже неточностей математического
характера), на которых основывается окончательный результат. Отличие
этого определения от предыдущего прежде всего в том, что формулирует-
ся конфайнмент одного изолированного кварка.

Третье. Наиболее легко эта проблема решается в потенциальном
подходе. Действительно, глюонный пропагатор создает потенциальную
яму, и тем самым задача сводится к стандартной проблеме отыскания
энергетических уровней в этой яме. При этом теряется релятивистски
ковариантное описание кварковой системы. Что касается второго опреде-
ления конфайнмента, то в литературе пока не было описания механизма
возникновения связанных адронных состояний, возникающих из кварков,
удовлетворяющих этому определению.

В настоящей работе, во-первых, покажем, что если мы будем исхо-
дить из предположения, что сингулярность глюонного пропагатора дается
(I), то тогда сформулированные два определения конфайнмента противоречивы. Мы делаем вывод о том, что если исходить из требования конфайн-
мента изолированного кварка, то, по всей видимости, предположение об
инфракрасной асимптотике (I) не является верным.

Во-вторых, если предположить, что пропагатор глюона на больших
расстояниях в \mathcal{X} -пространстве ведет себя как

$$D(x^2) = A + \frac{B}{x^2} + O\left(\frac{1}{(x^2)^2}\right), \quad (3)$$

где A и B - некоторые константы, то в теории осуществляется
конфайнмент в смысле второго определения и возникают стабильные свя-
занные адронные состояния.

Физически картина выглядит следующим образом. Взаимодействие с
глюонным полем приводит к конфайнменту изолированного кварка. Это
означает, что если кварк как-либо возникнет в какой-либо точке $x \in \mathcal{R}^4$,
то он тут же как бы растворится в вакууме. Однако, если возникнут
кварк и антикварк, то между ними возникают такие силы отталкивания
(не притяжения!), которые полностью компенсируют силы конфайнмента,

и такая система начинает существовать в виде стабильного адрона.

I. Постановка задачи

Пусть взаимодействие фермионного кваркового $q(x)$ и вектор-
ного - глюонного $A_\mu^a(x)$ полей описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_I(x) = ig(\bar{q}(x)\gamma_\mu t_a q(x))A_\mu^a(x). \quad (I.1)$$

Здесь t_a - матрицы основного представления группы $SU(N)$, нормиро-
ванные условием $Sp t_a t_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}$. γ_μ - матрицы Дирака, которые выби-
раются эрмитовыми $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$, так что $Sp \gamma_\mu \gamma_\nu = 4\delta_{\mu\nu}$.

Все рассмотрение в данной работе будем проводить в евклидовой
метрике.

Полная функция Грина кварка, как известно (см., например, /17/), за-
писывается

$$G(x-y) = \frac{1}{C} \int d\sigma_A S_0[A] G(x,y|A), \quad (I.2)$$

$$C = \int d\sigma_A S_0[A].$$

Поясним обозначения.

Мера $d\sigma_A$ глюонного поля $A_\mu^a(x)$ включает в себя, вообще го-
воря, полное взаимодействие калибровочных полей $A_\mu^a(x)$, согласно
теории полей Янга-Миллса (см., например, /18/). Нам же будет интересо-
вать только инфракрасная асимптотика функций Грина, поэтому будем
считать, что мера $d\sigma_A$ такова, что

$$\int d\sigma_A A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) = \delta_{ab} D_{\mu\nu}(x-y), \quad (I.3)$$

$$\int d\sigma_A \exp\{i \int dx J_\mu^a(x) A_\mu^a(x)\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2} \iint dx dy J_\mu^a(x) D_{\mu\nu}(x-y) J_\nu^a(y)\right\},$$

где $\delta_{ab} D_{\mu\nu}(x)$ - пропагатор глюонного поля в инфракрасной асим-
птотике.

В данной работе мы не будем касаться существенного для КХД вопро-
са о калибровочных преобразованиях функций Грина и т.д. Поэтому выбе-

рем пропагатор глюонного поля в лоренцевой калибровке:

$$\partial_\mu D_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (I.4)$$

В этом случае пропагатор $D_{\mu\nu}(x)$ можно представить в форме

$$D_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} D(x^2) - \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} (x^2)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{x^2} du u^{\frac{3}{2}} D'(u). \quad (I.5)$$

Явный вид пропагатора глюонного поля будет обсуждаться в следующем разделе.

Далее, $S_c[A]$ в (I.2) - так называемый фермионный детерминант, описывающий взаимодействие глюонного поля через кварковые петли:

$$S_c[A] = \det[ip\hat{p} - m + ig\gamma_\mu t_a A_\mu^a(x)]. \quad (I.6)$$

Считается, что из-за наличия массы у кварка в инфракрасную асимптотику этот детерминант не дает основного вклада. Поэтому можно положить $S_c[A] = 1$.

$G(x, y|A)$ - функция Грина кварка во внешнем поле $A_\mu^a(x)$, она удовлетворяет уравнению

$$(ip\hat{p} - m + ig t_a \gamma_\mu A_\mu^a(x)) G(x, y|A) = -\delta(x-y). \quad (I.7)$$

Таким образом, мы считаем, что инфракрасное поведение функции Грина кварка $G(x)$, т.е. поведение при $x \rightarrow \infty$, определяется интегралом

$$G(x-y) = \int d\sigma_A G(x, y|A), \quad (I.8)$$

где мера $d\sigma_A$ связана только с инфракрасным поведением пропагатора глюонного поля (I.5).

В данной работе нас будет интересовать проблема конфайнмента, т.е. удержания кварка. Под полным конфайнментом мы будем понимать отсутствие каких-либо особенностей по импульсу p у функции Грина

$$\tilde{G}(p) = \int dx e^{ipx} G(x) \quad (I.9)$$

в комплексной p -плоскости. Другими словами, мы будем считать, что в теории имеет место конфайнмент, если полная функция Грина квар-

ка $\tilde{G}(p)$ является целой аналитической функцией в комплексной p -плоскости.

Следует заметить, что сформулированное условие конфайнмента является достаточным. Весьма возможно, что для осуществления конфайнмента в полной теории потребуется выполнение не столь сильного условия. Однако этот вопрос в настоящее время является открытым.

Таким образом, для того, чтобы в рассматриваемой нами теории осуществлялся конфайнмент кварка, достаточно, чтобы интеграл в (I.9) сходилась при любых комплексных $p = p + iq$. Это требование обеспечивается быстрым убыванием функции $G(x)$ в (I.9) при больших x , а такое убывание определяется поведением пропагатора глюонного поля $D_{\mu\nu}(x)$ в инфракрасном пределе, т.е. при $x \rightarrow \infty$.

Кроме функции Грина кварка $G(x)$, будет рассмотрена кварковая петля

$$\Pi(x-y) = \int d\sigma_A Sp \Gamma G(x, y|A) \Gamma G(y, x|A), \quad (I.10)$$

где Γ - некоторая γ -матрица, описывающая вершину. нас будет интересовать возможность образования связанного состояния в системе кварк-антикварк. С точки зрения аналитических свойств в импульсном пространстве, это означает, что у функции

$$\tilde{\Pi}(p) = \int dx e^{ipx} \Pi(x) \quad (I.11)$$

должен появиться простой полюс в некоторой точке $p^2 = M^2$, где M - масса связанного состояния.

2. Пропагатор глюонного поля в инфракрасной асимптотике

Будем изучать теорию, в которой пропагатор векторного глюонного поля имеет инфракрасную особенность следующего вида:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(p) = -\eta \frac{\Lambda^2}{(p^2)^2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (1-d_0) \right]. \quad (2.1)$$

Здесь и ниже выбрана евклидова метрика ($p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$). Параметр Λ , имеющий размерность массы, должен возникнуть при решении уравнений квантовой хромодинамики.

Следует заметить, что знак $\eta = \pm 1$ перед пропагатором глюона не является точно установленным. Ниже будут обсуждены следствия, к которым приводит выбор того или иного знака.

Пропагатор глюонного поля выберем в лоренцевой калибровке, т.е. положим $d\rho = 0$ в (2.1).

Как говорилось выше, такое поведение (2.1), как считается^{/I-4/}, возникает у глюонного пропагатора в инфракрасной асимптотике в результате взаимодействия, описываемого квантовой хромодинамикой.

Функция (2.1) имеет неинтегрируемую особенность при $\rho = 0$. Поэтому наша первая задача состоит в том, чтобы математически определить эту особенность.

Выпишем формальные соотношения

$$\int d\vec{x} |\vec{x}| e^{i\vec{k}\vec{x}} = -\frac{8\pi}{(\vec{k}^2)^2},$$

$$\int d^4x \ln x^2 e^{ikx} = -\frac{16\pi^2}{(\kappa^2)^2}. \quad (2.2)$$

Применив формально обратное преобразование Фурье, получим

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{(\vec{k}^2)^2} e^{-i\vec{k}\vec{x}} = -\frac{1}{8\pi} |\vec{x}|, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(\kappa^2)^2} e^{-ikx} = -\frac{1}{16\pi^2} \ln x^2.$$

Из соотношений (2.2-3) легко вывести следующее формальное равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \ln(x_4^2 + \vec{x}^2) = 2\pi |\vec{x}|. \quad (2.4)$$

Фурье-образ пропагатора (2.1) с помощью соотношений (2.2-3) запишется

$$D_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{\mu\nu}(p) e^{-ipx} =$$

$$= \eta \frac{3\Lambda^2}{(8\pi)^2} \left[\delta_{\mu\nu} \ln x^2 - \frac{2}{3} \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \right]. \quad (2.5)$$

Ясно, что все выписанные интегралы (2.2-5) являются расходящимися, и полученные соотношения строгого математического смысла не имеют. Поэтому задача прежде всего состоит в том, чтобы придать математический смысл формулам (2.2-5).

Обратим внимание на следующее. В (2.3) интегралы явно расходятся, и в самих подынтегральных выражениях размерность пространства

$d = 4$ является единственным естественным параметром, изменением которого можно добиться сходимости интегралов. Однако в рамках размерностной регуляризации соотношения (2.2-4) не выполняются.

Обратимся теперь к формулам (2.2), в них интегралы можно рассматривать как несобственные в естественном понимании, например,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int d\vec{x} |\vec{x}| e^{-\delta \vec{x}^2 - i\vec{k}\vec{x}} = -\frac{8\pi}{(\vec{k}^2)^2},$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int d^4x \ln x^2 e^{-\delta x^2 - ikx} = -\frac{16\pi^2}{(\kappa^2)^2}.$$

Тем не менее, эта естественная регуляризация также не является удовлетворительной, поскольку в ее рамках соотношение (2.4) не выполняется, так как при $\delta \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \ln(x_4^2 + \vec{x}^2) e^{-\delta x_4^2} =$$

$$= |\vec{x}| \sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \left(\ln \frac{\vec{x}^2}{\delta} + \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) + 2\pi |\vec{x}| + O(\delta).$$

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти регуляризационную процедуру, такую, чтобы соотношения (2.2-5) были определены как предельные равенства при снятии регуляризации.

Введем функцию

$$E(u) = \sum_{n=1}^4 A_n e^{-n^2 u}, \quad (2.6)$$

где числа A_n удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^4 A_n = 1,$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{A_n}{n} = \sum_{n=1}^4 \frac{A_n \ln n}{n} = \sum_{n=1}^4 \frac{A_n}{n^2} = 0. \quad (2.7)$$

При $u \rightarrow \infty$ функция $E(u)$ убывает как гауссова экспонента

$$E(u) = O(e^{-u}).$$

С помощью функции E регуляризованные функции определим сле-

дукщим образом:

$$\begin{aligned} \ln x^2 &\rightarrow \text{reg}_\delta \ln x^2 = \ln x^2 E(\delta x^2), \\ |\vec{x}| &\rightarrow \text{reg}_\delta |\vec{x}| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \text{reg}_\delta \ln(x_4^2 + \vec{x}^2), \quad (2.8) \\ (k^2)^{-2} &\rightarrow \text{reg}_\delta (k^2)^{-2} = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x e^{ikx} \text{reg}_\delta \ln x^2, \\ (\vec{k}^2)^{-2} &\rightarrow \text{reg}_\delta (\vec{k}^2)^{-2} = -\frac{1}{8\pi} \int d\vec{x} e^{i\vec{k}\vec{x}} \text{reg}_\delta |\vec{x}|; \end{aligned}$$

здесь $\delta > 0$ - параметр регуляризации. Все интегралы в (2.8) абсолютно сходятся при $\delta > 0$.

Нетрудно проверить, что регуляризованные функции (2.8) в пределе $\delta \rightarrow 0$ удовлетворяют соотношениям (2.2-5).

Используя введенную регуляризацию, пропагатор глюонного поля в регуляризованной форме запишется:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x) &\rightarrow D_{\mu\nu}^\delta(x) = \\ &= \eta \frac{3\Lambda^2}{(8\pi)^2} \left[\delta_{\mu\nu} \ln x^2 - \frac{2}{3} \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \right] E(\delta x^2), \quad (2.9) \\ \tilde{D}_{\mu\nu}(p) &\rightarrow \tilde{D}_{\mu\nu}^\delta(p) = \int dx e^{ipx} D_{\mu\nu}^\delta(x). \end{aligned}$$

При этом при $p \neq 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{D}_{\mu\nu}^\delta(p) = \tilde{D}_{\mu\nu}(p) = -\eta \frac{\Lambda^2}{(p^2)^2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right].$$

Заметим, что при $\delta > 0$ регуляризованный пропагатор является целой аналитической функцией в p -плоскости. Таким образом, при $\delta > 0$ пропагатор $\tilde{D}_{\mu\nu}^\delta(p)$ не имеет инфракрасной особенности при $p^2 = 0$, но эта особенность восстанавливается в пределе $\delta \rightarrow 0$.

Согласно методам квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием (см. /19/), существует такое квантованное поле $A_\mu^{a\delta}(x)$, определенное на пространстве Фока с индефинитной метрикой, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu^{a\delta}(x) A_\nu^{b\delta}(y) | 0 \rangle &= \delta_{ab} D_{\mu\nu}^\delta(x-y), \\ \langle 0 | \exp \{ i \int dx J_\mu^a(x) A_\mu^{a\delta}(x) \} | 0 \rangle &= \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint dx dy J_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^\delta(x-y) J_\nu^a(y) \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Согласно тем же методам (см. /19/), в функциональном пространстве можно построить гауссову меру $d\sigma_A$, так что

$$\begin{aligned} \int d\sigma_A &= 1, \\ \int d\sigma_A A_\mu^{a\delta}(x) A_\nu^{b\delta}(y) &= \delta_{ab} D_{\mu\nu}^\delta(x-y), \\ \int d\sigma_A \exp \{ i \int dx J_\mu^a(x) A_\mu^{a\delta}(x) \} &= \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint dx dy J_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^\delta(x-y) J_\nu^a(y) \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Следует заметить, что в этом представлении поле $A_\mu^{a\delta}(x)$ не является эрмитовым, так как соответствует квантованию с индефинитной метрикой.

3. Функция Грина кварка во внешнем поле

Будем решать уравнение

$$(i\hat{p} - m + ig \hat{A}(x)) G(x, y | A) = -\delta(x-y). \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \gamma_\mu P_\mu, \quad P_\mu = i\partial_\mu, \quad \gamma_\mu^+ = \gamma_\mu, \\ \hat{A}(x) &= \gamma_\mu t_a A_\mu^a(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

t_a - базисные матрицы группы $SU(N)$.

Решение уравнения (3.1) запишем в форме

$$G(x, y|A) = \int_0^{\infty} ds e^{-ms} \exp\{is(\hat{p} + g\hat{A}(x))\} \delta(x-y) =$$

$$= \int_0^{\infty} ds e^{-ms} T_{\xi} \exp\left\{is \int_0^1 d\zeta [\gamma_{\mu}(\zeta) i \partial_{\mu}(\zeta) + g \gamma_{\mu}(\zeta) t_a(\zeta) A_{\mu}^a(x, \zeta)]\right\} \delta(x-y). \quad (3.3)$$

Здесь T_{ξ} -оператор упорядочивания по индексу ξ . В (3.2) имеются три группы операторов

$$\{\partial_{\mu}, A_{\mu}^a(x)\}, \{\gamma_{\mu}, \mu=1,2,3,4\}, \{t_a, a=1,2,\dots, N^2-1\},$$

которые не коммутируют внутри каждой группы, но операторы разных групп коммутируют друг с другом.

Введем функциональные δ -функции. Функциональные интегралы определим в решеточной аппроксимации. Интервал $(0, 1)$ по ξ разобьем на M интервалов длины Δ , так что $M\Delta=1$, и введем среднее по j -тому интервалу

$$f_j = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} d\zeta f(\zeta) = \int_0^1 d\varphi f(\Delta(j-1+\varphi)).$$

Тогда, по определению, имеем

$$\delta[f-\varphi] = \frac{1}{C} \int \delta q \exp\left\{i \int_0^1 d\zeta q(\zeta) [f(\zeta) - \varphi(\zeta)]\right\} = \quad (3.4)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^M \delta(f_j - \varphi_j) = \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^M \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_j \Delta}{2\pi} \exp\{i \Delta q_j (f_j - \varphi_j)\} \right].$$

С помощью функциональных δ -функций функцию Грина (3.3) можно представить в форме

$$G(x, y|A) = \int_0^{\infty} ds e^{-ms} \int \delta z R[z] \int \delta q Q[q] \times$$

$$\times T_{\xi} \exp\left\{-s \int_0^1 d\zeta z_{\mu}(\zeta) \partial_{\mu}(\zeta) + i g s \int_0^1 d\zeta q_a(\zeta) z_{\mu}(\zeta) A_{\mu}^a(x, \zeta)\right\} \delta(x-y). \quad (3.5)$$

Здесь

$$R[z] = \frac{1}{C} \int \delta b T_{\xi} \exp\left\{i \int_0^1 d\zeta b_{\mu}(\zeta) [z_{\mu}(\zeta) - \gamma_{\mu}(\zeta)]\right\} =$$

$$= \prod_{j, \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db_{j\mu} \Delta}{2\pi} \exp\{i \Delta b_{j\mu} [z_{j\mu} - \gamma_{\mu}]\}, \quad (3.6)$$

$$Q[q] = \frac{1}{C} \int \delta c T_{\xi} \exp\left\{i \int_0^1 d\zeta c_a(\zeta) [q_a(\zeta) - t_a(\zeta)]\right\} =$$

$$= \prod_{j, a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_{ja} \Delta}{2\pi} \exp\{i \Delta c_{ja} [q_{ja} - t_a]\}.$$

Порядок сомножителей в произведении по j должен строго соблюдаться, а именно:

$$\prod_j A_j = A_M A_{M-1} \dots A_2 A_1.$$

Это есть следствие упорядочения операторов по индексу ξ . Обратим особое внимание на то, что при каждом заданном значении j порядок множителей по μ, a может быть выбран произвольным.

В мере $d \Sigma[z, q] = \delta z R[z] \delta q Q[q]$ подробнее исследуем функционалы $R[z]$ и $Q[q]$. Рассмотрим $R[z]$, для $Q[q]$ все утверждения сохраняют силу. В решеточной аппроксимации функционал $R[z]$ определяется формулой (3.6). Воспользуемся соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{db \Delta}{2\pi} \exp\{i b [z_{\mu} - \gamma_{\mu}]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db}{2\pi} [\cos b - i \gamma_{\mu} \sin b] e^{i b z_{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{2} [\delta(1+z_{\mu}) + \delta(1-z_{\mu})] \gamma_{\mu} \frac{1}{2} [\delta(1+z_{\mu}) - \delta(1-z_{\mu})] =$$

$$= \delta(1-z_{\mu}^2) (1 + \gamma_{\mu} z_{\mu}).$$

Заметим, что в этой формуле суммирование по индексу μ отсутствует. Тогда

$$\delta z R[z] = \prod_j \left\{ \prod_{\mu} \int db_{j\mu} \delta(1-z_{j\mu}^2) (1 + \gamma_{\mu} z_{j\mu}) \right\} \quad (3.7)$$

Таким образом, мера $\delta z R[z]$ сосредоточена на функциях $|z_{\mu}(\zeta)|=1$. Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$\begin{aligned}
 J &= \int \delta z R[z] \int_0^1 dz_1 \dots \int_0^1 dz_N F_{\mu_1 \dots \mu_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) z_{\mu_1}(\xi_1) \dots z_{\mu_N}(\xi_N) = \\
 &= \prod_{j>r} \sum_{z_{j\mu} = \pm 1} \prod_{i,v} \frac{1}{2} (1 + \gamma_{iv} z_{iv}) \Delta^N \sum_{j_1, \dots, j_N} F_{j_1 \mu_1 \dots j_N \mu_N} z_{j_1 \mu_1} \dots z_{j_N \mu_N} = \\
 &= \Delta^N \sum_{j_1, \dots, j_N} F_{j_1 \mu_1 \dots j_N \mu_N} [\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_N} + \delta_{j_1 j_2} \gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_N} + \dots].
 \end{aligned}$$

В пределе $\Delta \rightarrow 0$ все слагаемые, кроме первого, исчезают, и мы имеем

$$J = N! \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_N F_{\mu_1 \dots \mu_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_N}.$$

Таким образом, мера $\delta z R[z]$ действует подобно грассмановой мере только с коммутирующими образующими.

Для меры $\delta q Q[q]$, проводя аналогичные выкладки в случае группы $SU(2)$, получим

$$\delta q Q[q] = \prod_j \left\{ \prod_a dq_{ja} \delta(1 - q_{ja}^2) (1 + q_{ja} t_a) \right\} \quad (3.8)$$

Для группы $SU(N)$ ($N \geq 3$) формулы оказываются более громоздкими.

Вернемся теперь к формуле (3.5). Воспользуемся стандартной формулой (см., например, (17))

$$\begin{aligned}
 T_{\xi} \exp \left\{ -s \int_0^1 dz z_{\mu}(\xi) \dot{q}_{\mu}(\xi) + i g s \int_0^1 dz q_a(\xi) z_{\mu}(\xi) A_{\mu}^a(x, \xi) \right\} \delta(x-y) = \\
 = \exp \left\{ i g s \int_0^1 dz q_a(\xi) z_{\mu}(\xi) A_{\mu}^a(x - s \int_0^{\xi} z(\xi')) \right\} \delta(x-y - s \int_0^1 z(\xi)). \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Тогда решение уравнения (3.1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 G(x, y | A) &= \int_0^{\infty} ds e^{-ms} \int d\Sigma [z, q] \times \\
 &\times \exp \left\{ i g s \int_0^1 dz q_a(\xi) z_{\mu}(\xi) A_{\mu}^a(x - s \int_0^{\xi} z(\xi')) \right\} \delta(x-y - s \int_0^1 z(\xi)), \\
 d\Sigma [z, q] &= \delta z R[z] \delta q Q[q]. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Полученное общее выражение (3.10) достаточно сложно для изучения, поэтому ниже будем рассматривать некоторые модельные приближения.

Приближение, которое назовем моделью Блоха-Нордсика, состоит в том, что γ_{μ} и t_a считаются постоянными векторами

$$\gamma_{\mu} \rightarrow u_{\mu}, \quad t_a \rightarrow v_a, \quad (3.11)$$

а не матрицами. Это приближение соответствует модели Блоха-Нордсика (см. (17)). Функционалы $R[z]$ и $Q[q]$ примут вид

$$R[z] = \delta[z - u], \quad Q[q] = \delta[q - v],$$

и функция Грина (3.10) запишется:

$$\begin{aligned}
 G(x, y | A) &= \int_0^{\infty} ds e^{-ms} \delta(x-y - su) \times \\
 &\times \exp \left\{ i g s u_{\mu} v_a \int_0^1 dz A_{\mu}^a(x - suz) \right\}. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Кроме того, будем рассматривать приближение, которое назовем асимптотической моделью. Эта модель основана на следующих приближениях. Во-первых, свободную причинную функцию Грина кварка заменим ее асимптотикой при $x \rightarrow \infty$, т.е.

$$S_c(x) = (m - i\hat{\partial}) D_c(x) \rightarrow S_{as}(x) = \theta(\sqrt{x^2})^{-\frac{3}{2}} e^{-m\sqrt{x^2}}, \quad (3.13)$$

где

$$\theta = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{3/2},$$

$$D_0(x) = \int \frac{d\kappa}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\kappa x}}{m^2 + \kappa^2} = \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{K_1(m\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2m} \beta(\sqrt{x^2})^{-\frac{3}{2}} e^{-m\sqrt{x^2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{m\sqrt{x^2}}\right) \right].$$

Фурье-образ $S_{as}(x)$ имеет простой полюс в точке $p^2 = m^2$

$$\tilde{S}_{as}(p) = \int dx e^{ipx} S_{as}(x) =$$

$$= \frac{m}{m^2 + p^2} \cdot \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 2; -\frac{p^2}{m^2}\right) \xrightarrow{p^2 \rightarrow -m^2} \frac{2m}{p^2 + m^2} + O(1).$$

Во-вторых, будем использовать приближение

$$\chi_{\mu_1} \dots \chi_{\mu_{2n}} \sim \int d^4u \delta(1-u^2) u_{\mu_1} \dots u_{\mu_{2n}}. \quad (3.14)$$

Это приближение правильно передает главную асимптотику функций вида

$$e^{\hat{P}} = O(e^{\sqrt{p^2}}) \sim \int d^4u \delta(1-u^2) e^{pu} =$$

$$= 2\pi^2 \frac{I_1(\sqrt{p^2})}{\sqrt{p^2}} = O(e^{\sqrt{p^2}}), \quad p^2 \rightarrow \infty.$$

В-третьих, не будем учитывать упорядочение по $\vec{\xi}$ матриц t_a .

Таким образом, в асимптотической модели функция Грина кварка во внешнем поле записывается

$$G(x, y|A) = \beta \int ds s^{3/2} e^{-ms} \int d^4u \delta(1-u^2) \delta(x-y-su) \times$$

$$\times \exp\left\{ i g s t_a u_\mu \int_0^1 d\vec{\xi} A_\mu^a(x-su\vec{\xi}) \right\} =$$

$$= S_{as}(x-y) \exp\left\{ i g t_a(x-y) \int_0^1 d\vec{\xi} A_\mu^a(x\vec{\xi} + y(1-\vec{\xi})) \right\}, \quad (3.15)$$

где $S_{as}(x)$ дается формулой (3.13).

4. Квантовая функция Грина кварка

Квантовая функция Грина кварка, взаимодействующего с глюонным полем, пропагатор которого задается формулой (2.5), в пренебрежении кварковым детерминантом записывается

$$G(x-y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d\bar{\sigma}_A G(x, y|A^\delta) =$$

$$= \int ds e^{-ms} \int d\Sigma[z, q] \delta(x-y - s \int_0^1 d\vec{\xi} z(\vec{\xi})) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} g^2 s^2 \int_0^1 d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 (q_a(\vec{\xi}_1) q_a(\vec{\xi}_2)) (z D z)(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) \right\}. \quad (4.1)$$

Здесь введено обозначение

$$(z D z)(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \left(z_\mu(\vec{\xi}_1) D_{\mu\nu} \left(s \int_0^1 d\vec{\xi} z(\vec{\xi}) \right) z_\nu(\vec{\xi}_2) \right) =$$

$$= \eta \frac{3\Lambda^2}{(8\pi)^2} \left[(z_\mu(\vec{\xi}_1) z_\mu(\vec{\xi}_2)) \ln s^2 R^2(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} R^{-2}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) (z_\mu(\vec{\xi}_1) R_\mu(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)) (R_\nu(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) z_\nu(\vec{\xi}_2)) \right], \quad (4.2)$$

где

$$R_\mu(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \int_{\vec{\xi}_2}^{\vec{\xi}_1} d\vec{\xi} z_\mu(\vec{\xi}),$$

$$R_\mu = R_\mu(1, 0) = \int_0^1 d\vec{\xi} z_\mu(\vec{\xi}).$$

В импульсном пространстве функция Грина представляется в форме

$$\tilde{G}(p) = \int dx e^{ipx} G(x) = \int_0^\infty ds e^{-sm} \int d\Sigma [z, q] \exp\{-is(pR) - \eta G I(s|z, q)\}. \quad (4.3)$$

Здесь введены обозначения $G = \frac{g^2}{2} \frac{3\Lambda^2}{(8\pi)^2}$, (4.4)

$$I(s|z, q) = \int_0^1 d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 (q_a(\bar{z}_1) q_a(\bar{z}_2)) \left[s^2 (z_\mu(\bar{z}_1) z_\mu(\bar{z}_2)) \ln s^2 R^2(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - \frac{2}{3} s^2 \bar{R}^2(\bar{z}_1, \bar{z}_2) (z_\mu(\bar{z}_1) R_\mu(\bar{z}_1, \bar{z}_2)) (R_\nu(\bar{z}_1, \bar{z}_2) z_\nu(\bar{z}_2)) \right].$$

Исследование функции Грина в форме интеграла (4.3) представляет определенные трудности, поэтому мы последовательно рассмотрим модельные приближения в интеграле (4.3).

I. Модель Блоха - Нордсика

В этом приближении матрицы γ_μ и t_a считаются просто векторами, согласно (3.II). Будем считать, что векторы u_μ и v_a нормированы следующим образом:

$$u_\mu^2 = 1, \quad v_a^2 = 1.$$

Функция Грина кварка во внешнем поле определяется формулой (3.I2). В этом случае функциональные интегралы в (4.3) вычисляются, и квантовая функция Грина представляется в форме

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty ds e^{-ms + is(pu) - \eta G I(s^2)} \quad (4.5)$$

$$I(s^2) = I(s|u, v) = \int_0^1 d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 \left[s^2 \ln s^2 (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2 - \frac{2}{3} s^2 \right] = s^2 \ln s^2 - \frac{11}{3} s^2. \quad (4.6)$$

Итак, мы видим, что при

$$\eta = +1 \quad (4.7)$$

функция Грина кварка является целой аналитической функцией в комплексной p -плоскости. Таким образом, функция Грина не имеет полюса, а это означает, что в результате взаимодействия с векторным полем, имеющим инфракрасную особенность, осуществляется конфайнмент, т.е. кварк не может существовать как обычная дираковская частица.

II. Векторное взаимодействие

В этом приближении будем считать матрицы t_a векторами v_a^μ с нормировочным условием $v_a^2 = 1$. Здесь и далее положим $\eta = +1$. Тогда для функции Грина кварка имеем

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty ds e^{-ms} \int d\tau R[\tau] \exp\{is(pR) - G I(s|\tau)\} \quad (4.8)$$

где $I(s|\tau) = I(s|\tau, v)$.

Удобно преобразовать показатель экспоненты с причинной функцией D . Замечая, что

$$z_\mu(\bar{z}_1) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} R(\bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad z_\mu(\bar{z}_2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} R_\mu(\bar{z}_1, \bar{z}_2),$$

легко получить, используя интегрирование по частям:

$$G I(s|\tau) = \frac{g^2}{2} s^2 \int_0^1 d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 (\tau D\tau)(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = G [I(s^2 R^2) + s^2 J[\tau]], \quad (4.9)$$

где $I(s^2 R^2)$ дается формулой (4.6), а

$$J[\tau] = \frac{8}{3} \int_0^1 d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 (z_\mu(\bar{z}_1) M_{\mu\nu}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) z_\nu(\bar{z}_2)),$$

$$M_{\mu\nu}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \delta_{\mu\nu} - \frac{R_\mu(\bar{z}_1, \bar{z}_2) R_\nu(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{R^2(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}.$$

Тогда функция Грина (4.8) перепишется

$$\tilde{G}(p) = \int_0^{\infty} ds e^{-ms} \int \delta z R[z] \exp\{is(pR) - G I(s^2 R^2) - G s^2 J[z]\}. \quad (4.10)$$

Покажем теперь, что $\tilde{G}(p)$ является целой аналитической функцией в комплексной p -плоскости. Для этого достаточно показать, что интеграл в (4.8) сходится для любых комплексных p . Итак, будем считать, что в (4.10) p является произвольным комплексным вектором, достаточно большим по модулю. Рассмотрим интеграл (4.10). Прежде всего заметим, что функционал $J[z]$ положительно определен, поэтому сходимость интеграла при больших p только ухудшится, если отбросить слагаемое с $J[z]$ в показателе экспоненты. Тогда при больших p

$$\tilde{G}(p) \approx \tilde{G}_1(p) = \int_0^{\infty} ds e^{-ms} \int \delta z R[z] e^{is(pR) - G I(s^2 R^2)}. \quad (4.11)$$

Функциональный интеграл в (4.11) вычисляется в явном виде, согласно формуле

$$\begin{aligned} \int \delta z R[z] f(R) &= \int dx f(x) \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{ikx} \int \delta z R[z] \exp\{-ik_p \int \delta z_p(z)\} = \\ &= \int dx f(x) \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{ikx - i\hat{k}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Воспользовавшись соотношением (4.12), получим для (4.11)

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(p) &= \int_0^{\infty} ds e^{-ms} \int dx \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \exp\{ikx - i\hat{k} + ispx - G I(s^2 x^2)\} = \\ &= \int dx e^{-G I(x^2)} \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(k+p)x}}{m - i\hat{k}} = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{V((k+p)^2)}{m - i\hat{k}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$V(k^2) = \int dx e^{ikx - G I(x^2)}$$

Функция $V(k^2)$ — целая аналитическая в комплексной k^2 -плоскости порядка роста $\rho = 2$. Уточненный порядок, т.е. функция $h(k^2)$, для которой

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{h(z^2)} \ln \max_{|k^2|=z^2} |V(k^2)| = 1,$$

равна

$$h(z^2) = \frac{z^2}{4G \ln z^2}. \quad (4.14)$$

Таким образом, функция Грина кварка в результате взаимодействия с глюонным полем, пропагатор которого имеет инфракрасную особенность (2.1) при $\eta = +1$, в импульсном представлении становится целой функцией. Итак, полюс функции Грина кварка исчез, и, следовательно, имеет место конфайнмент.

III. Цветовая группа $SU(N)$

Рассмотрим теперь наиболее общее выражение для функции Грина (4.2). Изучение предыдущих приближений показало, что слагаемое с $\ln s^2$ в показателе экспоненты определяет необходимое убывание по S . Именно это убывание обеспечивает конфайнмент. Снова будем изучать функцию Грина при больших комплексных p . В представлении (4.3) функционал $I(s|z, q)$ запишем в форме:

$$I(s|z, q) = I_1[szq] + s^2 I_2[z, q]. \quad (4.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_1[szq] &= s^2 Q^2[zq] \ln s^2 Q^2[zq], \\ Q_{a\mu}[zq] &= \int_0^1 d\zeta q_a(\zeta) z_\mu(\zeta) \end{aligned} \quad (4.16)$$

и

$$I_2[z, q] = -Q^2[zq] \ln Q^2[zq] + \quad (4.17)$$

$$+ \int \int d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 (q_a(\bar{z}_1) q_a(\bar{z}_2)) \left[(z_p(\bar{z}_1) z_p(\bar{z}_2)) \ln R^2(\bar{z}_1, \bar{z}_2) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{(z_p(\bar{z}_1) R_p(\bar{z}_1, \bar{z}_2)) (R_v(\bar{z}_1, \bar{z}_2) z_v(\bar{z}_2))}{R^2(\bar{z}_1, \bar{z}_2)} \right].$$

При больших комплексных p сходимость интеграла в (4.3) определяется большими S , поскольку мера $d\Sigma[z, q]$ сосредоточена на функциях

$$|z_p(z)| = 1, \quad |q_a(z)| = 1.$$

Это означает, что поведение функции Грина при больших комплексных p будет определяться только функционалом $I_1[szq]$, а функционалом $I_2[z, q]$ можно пренебречь по сравнению с $I_1[szq]$.

В этом приближении функциональный интеграл

$$\tilde{G}(p) \approx \tilde{G}_1(p) = \int dse^{-ms} \int d\Sigma[z, q] \times \\ \times \exp\{is(pR) - Gs^2 Q^2[zq] \ln s^2 Q^2[zq]\} \quad (4.18)$$

вычисляется точно, и в результате преобразований, аналогичных (4.12) и (4.13), получим:

$$\tilde{G}_1(p) = \int dse^{-ms} \int d^{4N}x \exp\{-Gx^2 \ln x^2\} \int \frac{d^{4N}\mathcal{K}}{(2\pi)^{4N}} e^{-i\mathcal{K}x} \times \\ \times \int d\Sigma[z, q] \exp\{is \int d\bar{z} (p\bar{z}(z) + i s \mathcal{K}_{ap} \int d\bar{z} q_a(\bar{z}) z_p(\bar{z}))\} = (4.19) \\ = \int dse^{-ms} \int \frac{d^{4N}\mathcal{K}}{(2\pi)^{4N}} T_{\bar{z}} \exp\{is \int [p_r \gamma_r(\bar{z}) + \mathcal{K}_{ap} t_a(\bar{z}) \gamma_r(\bar{z})] d\bar{z}\} \times \\ \times \int d^{4N}x \exp\{-i(\mathcal{K}x) - Gx^2 \ln x^2\} =$$

$$= \int \frac{d^{4N}\mathcal{K}}{(2\pi)^{4N}} V(\mathcal{K}^2) \int ds \exp\{-s[m - i(\hat{p} + t_a \hat{\mathcal{K}}_a)]\} = \\ = \int \frac{d^{4N}\mathcal{K}}{(2\pi)^{4N}} \frac{V(\mathcal{K}^2)}{m - i(\hat{p} + t_a \hat{\mathcal{K}}_a)},$$

где

$$V(\mathcal{K}^2) = \int d^{4N}x \exp\{-i(\mathcal{K}x) - Gx^2 \ln x^2\} = \\ = (2\pi)^{2N} \int du u^{2N} \frac{J_{2N-1}(ku)}{k^{2N-1}} e^{-Gu^2 \ln u^2}, \quad k = \sqrt{\mathcal{K}^2}. \quad (4.20)$$

Функция $\tilde{G}_1(p)$ - целая, поскольку при изменении переменной p в (4.19) контур интегрирования по \mathcal{K} всегда может быть изменен таким образом (функция $V(\mathcal{K}^2)$ - целая!), что знаменатель в (4.19) не обратится в нуль.

Таким образом, при любых p интеграл, определяющий функцию Грина кварка $\tilde{G}(p)$, сходится, т.е. функция $\tilde{G}(p)$ - целая, и осуществляется конфайнментом.

5. Проблема конфайнмента

В предыдущих разделах было показано, что пропагатор глюона вида (2.1) при $\eta = +1$ обеспечивает конфайнмент кварков. Тем не менее нам представляется, что такое поведение глюонного пропагатора не является удовлетворительным. И вот почему.

Прежде всего обсудим общепринятую постановку задачи конфайнмента в потенциальном подходе. Задача формулируется следующим образом. Имеются два источника, условно называемые кварком и антикварком, которые по отдельности ничем не удерживаются, т.е. понятие динамического конфайнмента одного кварка отсутствует. Взаимодействие, возникающее в результате обмена квантами глюонного поля, пропагатор которого задается формулой (2.1), приводит к возникновению потенциала между кварком и антикварком. Считается, что имеет место конфайнмент, если этот потенциал, во-первых, является потенциалом притяжения и, во-вторых, растет с увеличением расстояния между источниками. Еще раз подчеркнем, что каждый из источников, т.е. кварк, в отсутствие антикварка или наоборот, вполне может существовать самостоятельно, и

только система кварка-антикварка из-за сильного притяжения является стабильной, так как кварк и антикварк не могут уйти далеко друг от друга.

Математически эта идея оформляется следующим образом. Пусть лагранжиан взаимодействия имеет вид (I.1) и

$$\langle 0 | T(A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)) | 0 \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta_{ab} D((x-y)^2). \quad (5.1)$$

Тогда, как известно (см., например, /20/), в нерелятивистском пределе потенциал взаимодействия кварка и антикварка, находящихся на расстоянии z друг от друга, дается выражением

$$U_{q\bar{q}}(z) = -g^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 D(x_4^2 + z^2), \quad (5.2)$$

а потенциал между двумя кварками или двумя антикварками равен

$$U_{qq}(z) = U_{\bar{q}\bar{q}}(z) = -U_{q\bar{q}}(z). \quad (5.3)$$

Подставляя в (5.2) пропагатор глюона (2.5), получим

$$U_{q\bar{q}}(z) = -\eta \frac{g^2}{4\pi} (3\Lambda^2) z, \quad (d_c = 0). \quad (5.4)$$

Таким образом, для осуществления конфайнмента необходимо, чтобы

$$\eta = -1. \quad (5.5)$$

Полученное условие конфайнмента как условие существования потенциала притяжения между кварком и антикварком противоречит условию конфайнмента отдельного изолированного кварка (4.7).

В связи с этим противоречием делаем вывод о том, что механизм конфайнмента должен быть не таким, каким он представляется в потенциальном подходе. Мы считаем, что общая картина взаимодействия кварков с глюонным полем, должна быть следующей.

Во-первых, взаимодействие с глюонным полем, пропагатор которого в инфракрасной области имеет особенность (подчеркнем, что мы пока точно не знаем, какова на самом деле эта особенность) должно приводить к конфайнменту каждого отдельного кварка или антикварка.

На языке формул это означает, что в результате взаимодействия функция Грина кварка в евклидовой области при $x \rightarrow \infty$ должна иметь вид

$$G_q(x) = S_0(x) \exp\{-g^2 C(x^2)\}, \quad (5.6)$$

где $C(x^2)$ растет значительно быстрее, чем $\sqrt{x^2}$. Например,

$$C(x^2) = O(x^2) \quad \text{или} \quad C(x^2) = O(x^2 \ln x^2).$$

Такое поведение функции Грина кварка на языке волновых пакетов означает, что, если кварк каким-либо образом возник в некоторой пространственно-временной точке $(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^4$, то он из этой точки никуда уйти не может, т.е. кварк как бы растворяется в вакууме. Этот анализ можно провести в рамках методов нелокальной квантовой теории поля (см. /19/). То же самое происходит и с системой из нескольких кварков.

Во-вторых, в системе кварк-антикварк должно возникнуть отталкивание между кварком и антикварком, которое компенсирует силы конфайнмента, и такая система уже может существовать как независимая частица-адрон.

Продемонстрируем все вышесказанное в асимптотической модели. Примем, что функция Грина кварка во внешнем глюонном поле имеет вид (3.15).

Сначала рассмотрим группу $SU(2)$. Будем изучать два объекта: функцию Грина кварка (I.8) и кварковую петлю (I.10). Пусть пропагатор глюона дается общей формулой (I.5), где функция $D(x^2)$ пока еще не фиксирована. Проведем стандартные преобразования, воспользовавшись представлением

$$e^{ig\tau_a \omega_a} = -\frac{1}{\pi} \int d^3q (1 + \tau_a q_a) \delta'(q^2 - 1) e^{igq_a \omega_a}. \quad (5.7)$$

Получим

$$G(x) = S_{as}(x) \left(1 - \frac{g^2}{2} D_4(x^2)\right) \exp\left\{-\frac{g^2}{2} D_1(x^2)\right\},$$

$$\Pi(x) = S_{as}^2(x) \exp\left\{-g^2 [D_1(x^2) - D_2(x^2)]\right\} \times$$

$$\times \left[1 + O\left(\frac{1}{D_2(x^2)}\right)\right], \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_1(x^2) &= \int_0^1 d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 (x_\mu D_{\mu\nu}(x|\bar{z}_1-\bar{z}_2)x_\nu) = \\
 &= 3x^2 \int_0^1 du (1-u)^2 D(x^2 u^2), \\
 D_2(x^2) &= \int_0^1 d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 (x_\mu D_{\mu\nu}(x|\bar{z}_1+\bar{z}_2)x_\nu) = \\
 &= 3x^2 \left\{ \int_0^1 du u(1-\frac{3}{4}u) D(x^2 u^2) + \int_1^2 du (1-\frac{u}{2})^2 D(x^2 u^2) \right\}.
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Пусть теперь

$$D(x^2) = c \ln x^2, \quad (5.10)$$

что соответствует (2.1) и (2.5). Тогда

$$D_1(x^2) = cx^2 \left[\ln x^2 - \frac{11}{3} \right], \quad D_2(x^2) = cx^2 \left[\ln x^2 - \frac{11}{3} + 4 \ln 2 \right].$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 C(x) &= S_{as}^2(x) \left[1 - \frac{g^2}{2} cx^2 \left(\ln x^2 - \frac{11}{3} \right) \right] \times \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{g^2}{2} cx^2 \left(\ln x^2 - \frac{11}{3} \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (5.11)$$

в соответствии с требованием конфайнмента. Однако для кварковой петли получаем

$$\Pi(x) = S_{as}^2(x) \exp \left\{ g^2 cx^2 \ln 4 \right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{x^2 \ln x^2} \right) \right], \quad (5.12)$$

и фурье-образа

$$\tilde{\Pi}(p) = \int dx e^{ipx} \Pi(x) \quad (5.13)$$

не существует.

Итак, в этой модели мы убедились, что пропагатор глюонного поля (2.1) и (2.5), приводящий к кварковому конфайнменту, ведет к слишком сильному отталкиванию между кварком и антикварком. Рост кварковой петли при $x^2 \rightarrow \infty$ можно трактовать как в некотором смысле взрыв, рождающий спектр физических и нефизических состояний. Действительно, формулу (5.13) можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Pi}(p) &\sim \int dx e^{ipx} S_{as}^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-\mu^2 - 2\mu g_1 \sqrt{x^2}} \sim \\
 &\sim \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-\mu^2} \frac{1}{(\sqrt{x^2})^3} e^{-(2m+2\mu g_1)\sqrt{x^2}},
 \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $g_1^2 = g^2 c \ln 4$.

Таким образом, в рассматриваемом случае взаимодействие кварка и антикварка, описываемое петлей (5.14), приводит к возникновению непрерывного спектра состояний с положительными и отрицательными массами

$$M = 2m + 2\mu g_1 \quad (-\infty < \mu < \infty).$$

В таком поведении кварковой петли имеется мало физического смысла, поэтому мы считаем, что инфракрасное поведение глюонного пропагатора, описываемое формулами (2.1) и (2.5), не является истинным.

6. Возможное поведение пропагатора глюона

Полученный в предыдущем разделе результат наводит на мысль о том, что функция $D(x^2)$ в пропагаторе глюона (1.5) должна расти в евклидовом пространстве медленнее, чем (2.5).

Предположим, что в инфракрасном пределе функция $D(x^2)$ в (1.5) имеет вид

$$D(x^2) = A + B U(x^2 \Lambda^2), \quad (6.1)$$

где A и B - некоторые постоянные, а функция $U(x^2 \Lambda^2)$ аналитична в точке $x^2 = 0$ и при $x^2 \rightarrow \infty$.

$$U(x^2 \Lambda^2) = \frac{1}{x^2 \Lambda^2} + O\left(\frac{1}{(x^2 \Lambda^2)^2} \right). \quad (6.2)$$

Постоянная Λ характеризует масштаб области конфайнмента.

Пока мы не располагаем каким-либо доказательством справедливости данного предположения и не знаем, как получить такое поведение глюонного пропагатора из уравнений квантовой хромодинамики. Этот вопрос требует специального изучения.

Однако такой вид пропагатора, в частности, согласуется с предположением о существовании глюонного конденсата. В этом случае

$$\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle = 48N[-V'(0)]\Lambda^2 B. \quad (6.3)$$

Ниже для определенности рассмотрим две функции

$$U_1(u) = \frac{1}{1+u}, \quad U_2(u) = \frac{1}{u}(1-e^{-u}). \quad (6.4)$$

Функция $U_2(u)$ соответствует полному конфайнменту глюона.

В импульсном представлении имеем

$$\tilde{D}(p) = A(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) + B\tilde{U}(p^2), \quad (6.5)$$

т.е. пропагатор глюона имеет δ -функциональную особенность в точке $p=0$. Эта особенность слабее, чем (2.1), поскольку δ -функция интегрируема, а функция (2.1) неинтегрируема.

Исследуем функцию Грина кварка и кварковую петлю в случае глюонного пропагатора (6.1). Будем снова рассматривать асимптотическую модель. Воспользуемся формулами предыдущего раздела (5.8) и (5.9). Подставим функции (6.4) в (5.9) и вычислим асимптотику при больших x^2 . Получим

$$D_1(x^2) = A + B_j \frac{1}{\sqrt{x^2}\Lambda^2} - 3B \frac{\ln x^2 \Lambda^2}{x^2 \Lambda^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (6.6)$$

$$D_1(x^2) - D_2(x^2) = B_j \frac{1}{\sqrt{x^2}\Lambda^2} - \frac{g}{2} B \frac{\ln x^2 \Lambda^2}{x^2 \Lambda^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

где индекс j равен 1 или 2 в соответствии с выбором функции $U(u)$ в (6.4). Так,

$$B_1 = \frac{3\pi}{2} B, \quad B_2 = 3\sqrt{\pi} B.$$

Подставляя (6.6) в (5.8), получим для функции Грина кварка и кварковой петли

$$G(x) = S_{as}(x) \exp\left\{-\frac{g^2}{2} x^2 A + O(\sqrt{x^2})\right\}, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= S_{as}^2(x) \exp\left\{-\frac{g^2}{\Lambda^2} B_j \sqrt{x^2} \Lambda^2 + \frac{g}{2} \frac{g^2}{\Lambda^2} B \ln x^2 \Lambda^2\right\} = \\ &= \frac{\text{const}}{(\sqrt{x^2})^\gamma} \exp\left\{-(2m + \Lambda \frac{g^2}{\Lambda^2} B_j) \sqrt{x^2}\right\}, \end{aligned}$$

где $\gamma = 3 - \frac{g}{2} \frac{g^2}{\Lambda^2} B$.

Полагая $3B \frac{g^2}{\Lambda^2} = 1$, т.е. $\gamma = \frac{3}{2}$, имеем

$$\Pi(x) = \text{const} \frac{1}{(\sqrt{x^2})^{3/2}} e^{-M\sqrt{x^2}}, \quad (6.8)$$

где

$$M = 2m + \Lambda \frac{g^2}{\Lambda^2} B_j = 2m + \frac{1}{3} \Lambda \beta_j, \quad \beta_j = \frac{B_j}{B}.$$

Легко видеть, что функция Грина кварка $G(x)$ удовлетворяет условию конфайнмента, а функция $\Pi(x)$ имеет форму пропагатора скалярной частицы с массой M . Таким образом, в результате взаимодействия кварка и антикварка образовалось стабильное состояние с массой

$$M = 2m + \frac{1}{3} \Lambda \beta_j > 2m. \quad (6.9)$$

Приведенные формулы дают нам механизм образования стабильного связанного состояния с массой, превышающей массы составляющих частиц.

Следует подчеркнуть, что этот механизм коренным образом отличается от привычной квантовомеханической потенциальной схемы образования связанных состояний.

Вернемся снова к пропагатору глюона (6.1). Для него при $x^2 \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$D(x^2) \sim A + \frac{B}{x^2 \Lambda^2} + O\left(\frac{1}{(x^2 \Lambda^2)^2}\right). \quad (6.10)$$

Наш результат говорит о том, что первый член в (6.10) отвечает за конфайнмент кварка и исчезает в кварковой петле, т.е. при взаимо-

действию кварка и антикварка. Второй член в (6.10) отвечает за образование стабильного связанного состояния кварка и антикварка.

Рассмотрим теперь группу $SU(N)$. Покажем, что конфайнмент осуществляется для всех состояний, не инвариантных относительно цветовой $SU(N)$. Действительно, пусть

$$D(x^2) = A. \quad (6.11)$$

Другими словами, учтем в пропагаторе глюона только слагаемое, отвечающее за конфайнмент, и пренебрежем функцией \mathcal{U} в (6.1).

Тогда в асимптотической модели

$$G(x|A) = S_{as}(x) \exp\{igt_a x_\mu A_\mu^a\}, \quad (6.12)$$

где A_μ^a - вещественное постоянное поле. С другой стороны,

$$U_\omega = e^{it_a \omega_a}, \quad \omega_a = g x_\mu A_\mu^a \quad (6.13)$$

является матрицей преобразований группы $SU(N)$. Поэтому все величины, неинвариантные относительно преобразований группы $SU(N)$, удовлетворяют условию конфайнмента. Например,

$$G_{ab}(x) = \int d\sigma_A G_{ab}(x|A) = O(e^{-x^2 A}),$$

$$G_{a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n}(x) = \int d\sigma_A \prod_{i=1}^n G_{a_i b_i}(x|A) = O(e^{-n^2 x^2 A}). \quad (6.14)$$

Действительно, мера $d\sigma_A$ чисто гауссова и имеет вид

$$d\sigma_A = \left(\prod_{\mu=1}^4 \prod_{a=1}^N \frac{dA_\mu^a}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \sum_{a=1}^N (A_\mu^a)^2\right\}. \quad (6.15)$$

Функция \mathcal{U}_ω в (6.13) целая первого порядка по A_μ^a , так что интегралы (6.14) являются по сути дела фурье-преобразованиями гауссовской меры.

Если же рассмотреть комбинации функций Грина кварков, инвариантные относительно преобразований группы $SU(N)$, то такие выражения уже не удовлетворяют условию конфайнмента и тем самым определяют синглетные в группе $SU(N)$ состояния, которые могут существовать как физические частицы. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \int d\sigma_A \text{Sp} G(x|A) G(-x|A) = \\ &= \int d\sigma_A S_{as}^2(x) \text{Sp} U_\omega U_\omega^\dagger = N S_{as}^2(x), \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \Sigma(x) &= \int d\sigma_A \epsilon_{a_1 \dots a_N} \prod_{j=1}^N G_{a_j b_j}(x|A) \epsilon_{b_1 \dots b_N} = \\ &= N! \int d\sigma_A \det G(x|A) = N! S_{as}^N(x). \end{aligned}$$

Здесь $\epsilon_{a_1 \dots a_N}$ - полностью антисимметричный тензор, описывающий синглетное состояние группы $SU(N)$. В частности, в группе $SU(3)$ существует состояние из трех кварков - барион:

$$\Sigma(x) = \int d\sigma_A \epsilon_{a_1 a_2 a_3} \prod_{j=1}^3 G_{a_j b_j}(x|A) \epsilon_{b_1 b_2 b_3} = 6 S_{as}^3(x). \quad (6.17)$$

Для того, чтобы получить массу связанных состояний в (6.16) и (6.17), необходимо учесть второй член в пропагаторе глюона (6.1).

Таким образом, поведение глюонного пропагатора (6.1) обеспечивает конфайнмент как кварка, так и любого состояния, неинвариантного относительно цветовой группы $SU(N)$, и дает нам новый механизм образования стабильных связанных бесцветных состояний, причем массы этих состояний могут быть значительно больше масс составляющих их кварков. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы, во-первых, попытаться получить пропагатор глюона в форме (6.1) из уравнений квантовой хромодинамики и, во-вторых, доказать полученные выше соотношения не в асимптотической модели, а в реальной теории.

Литература

1. Mandelstam S. Phys. Rev., 1979, D20, p. 3223.
2. Baker M., Ball J.S., Zachariasen F. Nucl. Phys., 1981, B186, p. 531.
3. Алексеев А.И. ЯФ, 1981, 33, с. 516.
4. Алексеев А.И., Арбузов Б.А., Байков В.А. ТМФ, 1982, 52, с. 187.
5. Cea F., Castorina P. Nuovo Cimento, 1984, A81, p. 567.
6. Callan C.G., Dashen Jr. and R., G. Gross D.J. Phys. Rev., 1978, D17, p. 2717.
7. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl. Phys., 1979, B147, p. 385.
8. Арбузов Б.А. Препринт ИФВЭ, 83-31, Серпухов, 1983.
9. Арбузов Б.А., Байков В.А., Босс Э.Э. Препринт ИФВЭ, 83-195, Серпухов, 1983.
10. Wilson K., Phys. Rev., 1974, D10, p. 2445.
11. West G.B. Phys. Lett., 1982, B115, p. 468.
12. Susskind L. in: Weak and electromagnetic interactions at high energy. North-Holland, Amsterdam, 1977.
13. Cornwall J.M., Tiktopoulos Phys. Rev., 1977, D15, p. 2937.
14. Cornwall J.M., Phys. Rev., 1980, D22, p. 1452.
15. Harada K. Progr. Theor. Phys., 1982, 68, p. 1324.
16. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. ЯФ, 1984, 39, с. 1275.
17. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1973.
18. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", М., 1978.
19. Ефимов Г.В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей, "Наука", М., 1977.
20. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, М., 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 ноября 1984 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, P2-84-649,
Дубна, 1984.

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, D13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб. "Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна, 1984, с.3.

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, я/я 79.

Ефимов Г.В.

P2-84-716

Инфракрасная асимптотика и конфайнмент

Показано, что поведение глюонного пропагатора $\tilde{D}(k) = -1/(k^2)^2$ в инфракрасной области приводит к кварковому конфайнменту. Приводятся аргументы, состоящие в том, что такое поведение глюонного пропагатора не является удовлетворительным. Предполагается, что глюонный пропагатор на больших расстояниях должен вести себя как

$$D(x) = A + B \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{(x^2)^2}\right).$$

Показывается, что такое предположение приводит к кварковому конфайнменту и возникновению стабильных связанных состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Efimov G.V.

P2-84-716

Infrared Singularity and Confinement

It is shown that the infrared behaviour of the gluon propagator $\tilde{D}(k) = -1/(k^2)^2$ leads to the quark confinement. The arguments are formulated why this infrared singularity is not satisfactory. The hypothesis that the gluon propagator on large distances in the Euclidean space behaves as

$$D(x) = A + B \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{(x^2)^2}\right)$$

leads to the quark confinement and to the production of stable bound states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1984