сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-71

В.Н.Стрельцов

О ВЗАИМОСВЯЗИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ КООРДИНАТ

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о конвенциональном характере определения одновременности (т.е. времени в удаленной от данного наблюдателя точке) в теории относительности достаточно широко обсуждался в литературе. Может быть, менее известно, что аналогичные элементы условного соглашения имеют место в общем случае при определении понятия расстояния. Это связано с тем, что, согласно специальной теории относительности, не существует абсолютно твердых тел. Поэтому для определения понятия расстояния в релятивистском случае, как и понятия одновременности, вместо эталонных масштабов используются световые сигналы/локационный метод измерения расстояний/. В этом методе непосредственно измеряемыми величинами опять-таки являются моменты отправления (t_1) и приема (t_2) светового сигнала. При вычислении же на их основе величины расстояния привносятся элементы условного соглашения*. В рамках /1+1/-пространства нетрудно видеть, что можно избавиться от указанных условных соглашений, если перейти от обычно используемых координат t и z к новым переменным $t_1 = t - z$ и $t_2 = t + z$. Важно подчеркнуть, что достаточно широко применяемые в последнее время переменные светового фронта [1] и две временные координаты t_1 и t_2 - суть одни и те же величины.

С другой стороны, если рассматривать этот переход, отправляясь от четырехмерного евклидова пространства, то математически напрашивается аналогичная замена для другой пары координат. При этом оказывается, что новые переменные суть спинорные координаты, используемые в последнее время в связи с теорией твисторов /см., например, [2] /.

Таким образом, по нашему мнению, переход к новым переменным имеет достаточно глубокий физический и математический смысл. Поэтому заслуживает дальнейшего внимания формулировка физических результатов в релятивистской области в терминах этих переменных. При этом надо особо выделить те случаи, когда новые переменные уже фактически фигурируют в выражениях ряда широко используемых основных физических величин. С другой стороны /в рамках обычных переменных/ мы должны понимать, что сущест-

*Обычно полагают, что свет прошел туда и обратно одинаковые расстояния.

вует определенный произвол* при разделении этих величин на временные и пространственные координаты. Поэтому можно говорить о своего рода пространственно-временной калибровке. Отмеченное свойство должно, очевидно, проявляться в непосредственно основанных на пространственно-временных координатах понятиях, таких, как четность.

Все эти вопросы и будут предметом нашего рассмотрения.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА В СПИНОРНЫХ КООРДИНАТАХ

2.1. Рассмотрим спинорную систему координат, где две координаты суть известные переменные светового фронта**. При этом метрике Минковского будет соответствовать метрическая форма вида

$$d\tau^2 = dx^0 dx^1 - dx^2 dx^3. \qquad /1/$$

Здесь координаты x^i выражаются через обычные координаты с помощью равенств

$$x^0 = t + z, \quad x^1 = t - z, \quad (c = 1), \qquad /2а,б/$$

$$x^2 = x + iy, \quad x^3 = x - iy = \bar{x}^2. \qquad /2в,г/$$

Формулы /2/ могут быть записаны также с помощью одного выражения, проясняющего смысл названия "Спинорные координаты":

$$x = \begin{pmatrix} x^0 & x^2 \\ x^3 & x^1 \end{pmatrix} = X^i \sigma_i = \begin{pmatrix} p^{1\dot{1}} & p^{1\dot{2}} \\ p^{2\dot{1}} & p^{2\dot{2}} \end{pmatrix}, \qquad /2'/$$

где $X^i = X^i(t, x, y, z)$, σ_i - матрицы Паули, $p^{\alpha\dot{\beta}}$ - спин-тензор второго ранга. С учетом /2г/, метрическую форму /1/ можно переписать в виде

$$d\tau^2 = dx^0 dx^1 - dx^2 d\bar{x}^2 \qquad /1'/$$

и говорить, что она определяет трехмерное пространство с одной комплексной координатой.

---

*В общем случае даже переход к световым координатам не избавляет нас от указанного произвола.

**В дальнейшем мы не будем использовать термины "Переменные светового фронта" или "Две временные координаты", поскольку в общем случае таковыми будут величины $\tau = t + r$ и $\zeta = t - r$.

В импульсном пространстве для частицы массы m будем иметь

$$m^2 = p^0 p^1 - p^2 p^3. \qquad /3/$$

Здесь, в частности,

$$p^0 = E + p^z, \quad p^1 = E - p^z. \qquad /4/$$

Обычно мы привыкли иметь дело с энергией и импульсом. Чтобы сохранить какую-то аналогию с привычным описанием, в дальнейшем будем называть p^0 - "энергией" /x^0 - "временем"/, а p^i - "импульсом". Продолжая аналогию, можно ввести "скорость" (v), которая связана с обычной скоростью движения вдоль оси z равенством

$$v = \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{p^1}{p^0} = \frac{1 - v_z}{1 + v_z}. \qquad /5/$$

Очевидно, что величина v может меняться от 1 ($v_z = 0$) до 0 ($v_z = 1$). При изменении направления движения на противоположное, т.е. при изменении знака v_z, вместо /5/ будем иметь

$$v' = \frac{1 + v_z}{1 - v_z} = v^{-1}, \qquad /6/$$

где $1 \le v' \le \infty$. Таким образом, обычному изменению направления движения на обратное здесь соответствует замена величины "скорости" на обратную.

Таким образом, если принять за ось абсцисс x^0, а за ось ординат x^1, то $v_z(-v_z)$ -движению будут соответствовать прямые, лежащие в первом квадранте в интервале углов $\pi/4$, $\pi/2$ $(0, \pi/4)$.

В частном случае v связана с компонентой u^1, ковариантной скорости равенством

$$u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \sqrt{\frac{dx^1}{dx^0}} = v^{1/2} = (u^0)^{-1}. \qquad /7/$$

С учетом /5/ легко видеть, что u^1 - относительная продольная доплеровская частота или k -коэффициент Бонди.

Отметим также, что специальное преобразование Лоренца для 4-вектора A^i будет иметь вид

$$A^{0'} = uA^0, \quad A^{1'} = u^{-1}A^1, \quad A^{2',3'} = A^{2,3} \; (u \equiv u^1), \qquad /8/$$

а вместо теоремы сложения скоростей имеем теорему их умножения.

На основании /2/ компоненты u^i выражаются через компоненты обычной скорости $\vec{v}$ равенствами

$$u^0 + u^1 = 2\gamma, \quad u^0 - u^1 = 2v_z\gamma,$$
$$u^2 + u^3 = 2v_x\gamma, \quad u^2 - u^3 = 2iv_y\gamma; \quad u^0u^1 - u^2u^3 = 1, \qquad /9/$$

где $\gamma = [1 - (\vec{v})^2]^{-1/2}$, при этом матрицы γ^i в новых обозначениях связаны с прежними выражениями

$$\gamma^0 = \gamma^2, \quad \gamma^1 = \gamma^1, \quad \gamma^2 = \gamma^4, \quad \gamma^3 = -\gamma^3. \qquad /10/$$

Кроме того,

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0. \qquad /11/$$

2.2. Остановимся на некоторых примерах использования новых переменных.

Очень важные характеристики, применяемые в физике высоких энергий, - продольные и поперечные быстроты - выражаются через спинорные переменные с помощью равенств

$$y_\parallel = \frac{1}{2}\ln\frac{E + p^z}{E - p^z} = \frac{1}{2}\ln\frac{p}{p^1} = \frac{1}{2}\ln\frac{u^0}{u^1}, \qquad /12/$$

в частности,

$$y_\parallel = -\frac{1}{2}\ln v = \ln u^0, \qquad /12'/$$

$$y_\perp = \frac{1}{2}\ln\frac{E_\perp + p_\perp}{E_\perp - p_\perp} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^0p^1} + \sqrt{p^2p^3}}{\sqrt{p^0p^1} - \sqrt{p^2p^3}} = \ln(\sqrt{u^0u^1} + \sqrt{u^2u^3}). \qquad /13/$$

Здесь мы учли, что

$$p_\perp^2 = p^2p^3, \quad E_\perp = \sqrt{m^2 + p_\perp^2} = \sqrt{p^0p^1}. \qquad /14/$$

Новые переменные особенно удобны при рассмотрении систем отсчета, имеющих бесконечно большой продольный импульс p_z /IMF, см., например,[3]/. Так, в партонной модели элементарных частиц, имеющих дело с указанными системами, используется эффективный гамильтониан для совокупности n конституентов

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(E - P_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}P_0 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(p^2p^3)_i^2 + m_i^2}{2\eta} = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x^0}, \qquad /15/$$

где $\eta = p_{1i}/\sqrt{2}$. Для описания доли импульса /энергии/, уносимого i-й подсистемой, вводится величина

$$\beta_i = \frac{p_i^0}{p_I^0}, \qquad /16/$$

где p_I^0 - "энергия" налетающего адрона.

В релятивистской ядерной физике для ядерных реакций вида

$$I + II \to 1 + 2 + \ldots, \qquad /17/$$

где II - ядро мишени, используется переменная - кумулятивное число

$$\beta_i^0 = \frac{E_i - p_{iz}}{m^{(0)}} = \frac{E_i + |p_{iz}|}{m^{(0)}} = \frac{p_i^0}{m^{(0)}}. \qquad /18/$$

Здесь $m^{(0)}$ - атомная единица массы. Выберем в реакции /17/ среди родившихся частиц частицу с наибольшей величиной $(E_i - p_{iz})$ - кумулятивную частицу *. Тогда в случае $E_I \approx p_I$, β_i^0 является минимальным эффективным числом нуклонов фрагментирующего ядра II.

Обычно при описании ядерных реакций большую роль играет система центра инерции /с.ц.и/. При столкновении двух частиц их импульсы в этой системе равны по абсолютной величине $(|p_{Iz}| = |p_{II\,z}|)$. В рамках рассматриваемого подхода также можно ввести систему отсчета, обладающую определенной симметрией и характеризующуюся, например, условием

$$p_I^1 = p_{II}^1 \quad \text{или} \quad E_I - |p_{Iz}| = E_{II} - |p_{II\,z}|. \qquad /19/$$

В случае двух частиц одинаковой массы она совпадает с обычной с.ц.и. При столкновении двух частиц разной массы и выполнении условия

$$p_{II}^1 = M_{II}, \qquad /20/$$

она совпадает с антилабораторной системой.

3. ВРЕМЯ-ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КАЛИБРОВКА

3.1. Как отмечалось ранее[5], для /1+1/-пространства формулы /2а,б/ описывают переход к непосредственно наблюдаемым на опыте величинам /двум временным координатам/. Однако уже для /1+2/-пространства формулы связи измеряемых в локационном опыте /служащем для определения местоположения и моментов совершения

*Вылетающую в заднюю полусферу область, кинематически запрещенную для однонуклонных столкновений.

событий/ времени отправления и времени приема световых сигналов с координатами становятся громоздкими, поэтому переход к ним нецелесообразен. Простая же замена переменных /2/ уже не приводит к непосредственно наблюдаемым величинам, но, по нашему мнению, упрощает математический аппарат теории. Таким образом, в общем случае элементы условных соглашений при пространственно-временном описании событий остаются *. Коснемся этой проблемы с другой стороны.

Итак, конвекциональный характер понятий одновременности и расстояния допускает, в частности, преобразование**

$$t \to t + \delta z, \qquad /21/$$

где $-1 \le \delta \le 1$, $\delta = 2\epsilon - 1$, а ϵ - параметр одновременности или временной параметр. С учетом аналогичного преобразования для энергии

$$E \to E + \delta p_z, \qquad /22/$$

например для волновой функции плоской волны, найдем

$$\psi = \exp[-i(Et - p_z z)] \to \exp[-i(Et - p_z z)] \exp[-if(t, z)], \qquad /23/$$

где $f = \delta(Ez + p_z t + \delta p_z z)$. Можно сказать, что здесь мы имеем дело с "временной калибровкой". Общепринятое определение одновременности ($\delta = 0 \to f = 0$) назовем стандартной "временной калибровкой". Аналогичным образом можно говорить о "пространственной калибровке", связанной с заменой

$$z \to z + \delta_1 t, \qquad /24/$$

где $\delta_1 = 2\epsilon_1 - 1$; ϵ_1 - пространственный параметр.

Здесь мы имеем дело с определенной относительностью, означающей, что истинной физической конфигурации соответствует не один выбор параметров δ или δ_1, а целый класс калибровочно-эквивалентных конфигураций. Иначе говоря, не существует выделенных значений $\delta(\delta_1)$ в интервале -1,1. Для удобства практической работы обычно производят параметризацию, т.е. накладывают дополнительное условие, уничтожающее калибровочный произвол. Общепринятая или стандартная калибровка определяется условием δ, $\delta_1 = 0$.

---

*При этом мы оставляем в стороне вопрос о том, что вычисление координат по результатам локационного опыта проводится по правилам евклидовой геометрии.

**Для простоты ограничимся случаем обычного /1+1/-пространства.

Множество преобразований /21/ и /22/, в общем, не образует группу, поскольку может быть, что сумма $(\delta + \delta') \notin -1,1$.

Отметим также, что крайние значения $\delta = 1$ и $\delta_1 = -1$ в формулах /21/ и /24/ приводят именно к формулам /2а/ и /2б/ соответственно.

Предыдущий анализ показывает, что фактически мы не может провести строгой границы между временной и пространственной координатами. То же самое, очевидно, должно иметь место и для основанных на этих величинах понятиях, каковыми являются, например, временная и пространственная четности. Впрочем, на их определенную зависимость указывает уже специальная теория относительности.

3.2. Обсудим теперь, как характер соглашения о величине пространственного параметра ϵ_1 может влиять на определение релятивистской длины стержня, направленного перпендикулярно относительной скорости движения систем отсчета.

Пусть в K'-системе методом локации измерена длина (x') направленного вдоль оси x' покоящегося стержня; $x' = t'_2 - t'_1$, где t'_1 и t'_2 - моменты отправки и возвращения K'-наблюдателем светового сигнала /для простоты $t'_1 = 0$/. С точки зрения K-системы, где стержень движется в направлении оси z /совпадающей с осью z' /, пути, пройденные светом туда и обратно, образуют две равные стороны (r) равнобедренного треугольника. Чтобы определить его стороны и высоту /на основание/, т.е. длину данного стержня в K-системе, можно, например, измерить периметр треугольника и его основание. Для этого нужно определить время t_{11} посылки K-наблюдателем /находящимся в начале координат K-системы/ такого светового сигнала, который достигает K'-наблюдателя /или нижнего конца стержня/ в момент возвращения (t'_2) к нему первого сигнала. Пусть второй сигнал возвратился к K-наблюдателю в момент времени t_2. При условии, что соответствующий t'_1-момент времени $t_1 = 0$, периметр треугольника будет определяться величиной t_2. При этом обычно принимается, что основание треугольника равно $z = (t_2 - t_{11})/2$.

В общем случае с учетом пространственного параметра ϵ_1, например, для направления "туда" имеем

$$\underset{\rightarrow}{z} = \epsilon_1 (t_2 - t_{11}). \qquad /25/$$

Половина этой величины будет определять один из катетов прямоугольного треугольника, второй катет которого - x - отмеченная высота. Привлекая соответствующее выражение для гипотенузы

$$\underset{\rightarrow}{r} = [\epsilon_1 t_2 + (1 - \epsilon_1) t_{11}]/2, \qquad /26/$$

на основании теоремы Пифагора найдем величину катета x /длину стержня в K-системе/:

$$x = \sqrt{\underset{\to}{r}^2 - \underset{\to}{z}^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{2\epsilon_1 t_2 t_{11} + (1-2\epsilon_1)t_{11}^2} \qquad /27/$$

С учетом формул преобразований

$$t_{11} = ut_2', \quad t_2 = u^{-1}t_2' \qquad /28/$$

легко получим, что

$$x = x'\sqrt{2\epsilon_1 + (1-2\epsilon_1)(u)^2}. \qquad /27'/$$

Таким образом, только в случае стандартной калибровки /ϵ_1 = = 1/2/ получим неизменность поперечных размеров при движении. В общем же случае для $\epsilon_1 < 1/2$ эти размеры будут меньше, а для $\epsilon_1 > 1/2$ - больше соответствующих размеров в покое.

Интересно отметить, что аналогичный результат получим, если при вычислении x вместо /27/ воспользуемся, например, правилами геометрии Лобачевского.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Переменные светового фронта были введены в свое время для упрощения описания релятивистской динамики. Однако эта простая замена переменных имеет достаточно глубокий физический смысл. Это особенно ясно видно в простейшем случае /1+1/-пространства на примере локационного опыта, служащего в теории относительности для определения координат удаленных событий. В его рамках световые переменные - это две временные координаты: отправления и приема светового сигнала. Может быть, самый важный результат, связанный с рассматриваемым подходом, заключается в том, что нельзя провести четкой границы между пространственными и временными координатами. Они взаимосвязаны. Такая же связь должна существовать и между основанными на них понятиями.

Автор выражает благодарность академику А.М.Балдину за важные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M. Rev.Mod.Phys., 1949, 21, p.392.
2. Penrose R.,MacCallum M.A.H. Phys.Rep., 1972, 6C, p.241.
3. Kogut J., Susskind L. Phys.Rep., 1973, 8C, p.75.
4. Балдин А.М. Труды Совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. ОИЯИ, Д2-82-568, Дубна, 1982, с.6.
5. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-82-330, Дубна, 1982; Р2-83-76, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 февраля 1984 года.

Стрельцов В.Н. Р2-84-71
О взаимосвязи пространственных и временных координат

Рассматриваются спинорные координаты, включающие в себя известные переменные светового фронта. Показано, что их использование упрощает формулировку релятивистской кинематики. Отмечается, что применяемые в физике высоких энергий величины: быстроты, характеристики партонной модели элементарных частиц /эффективный гамильтониан, доля продольного импульса подсистемы и т.д./, кумулятивное число и другие фактически составлены из спинорных переменных. Исходя из конвенционального характера определения понятий одновременности и расстояния указывается на возможность введения своего рода время-пространственной калибровки. Отмечается также, что следствием взаимосвязи пространственных и временных координат является взаимосвязь пространственных и временных отражений.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Strel'tsov V.N. P2-84-71
On Connection of Space and Time Coordinates

Spinor coordinates including the known light front variables are considered. It is shown that their application simplifies the formulation of relativistic kinematics. It is noted that the applied in high energy physics values-rapidity, characteristics of parton model of elementary particles (effective Hamiltonian, a fraction of subsystem longitudinal momentum etc.), cumulative number a.o. are compailed practically from spinor variables. Proceeding from conventional character of definition of concepts of simultaneity and distance it is pointed to a possibility to introduce some kind of time-spatial gauge. It is also noted that due to relation between space and time coordinates there exists the relation between space and time reflections.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984