

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-84-685

Л.В.Авдеев, Б.-Д.Дёрфель

УРАВНЕНИЯ АНЗАТЦА БЕТЕ
ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА
ГЕЙЗЕНБЕРГА
ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

Направлено в журнал "Nuclear Physics B"

1984

1. Введение

Прошло уже более пятидесяти лет с тех пор, как Бете^{/1/} предложил свой анзац для точного решения одномерной модели Гейзенберга (МГ) с периодическими граничными условиями. Модель описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N (\vec{\mathcal{J}}_n \cdot \vec{\mathcal{J}}_{n+1} - 1/4), \quad (1.1)$$

где $\vec{\mathcal{J}}_n = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_n$ - операторы спина 1/2 (матрицы Паули) в n -ном узле цепочки, причем $\vec{\mathcal{J}}_{N+1}$ отождествляется с $\vec{\mathcal{J}}_1$. Хотя Бете сумел получить целый ряд важных результатов, некоторые вопросы о характере решений, особенно в антиферромагнитном случае $J > 0$, остаются открытыми до сегодняшнего дня.

Анзац Бете (АБ) состоит в том, чтобы искать решения в виде

$$\Phi = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_M \leq N} \sum_{R \in S_M} C_R \prod_{j=1}^M \left[\left(\frac{\lambda_{R_j} + i/2}{\lambda_{R_j} - i/2} \right)^{n_j} \mathcal{Y}_{n_j}^{(-)} \right] \Phi_+. \quad (1.2)$$

Здесь Φ_+ - состояние, в котором все спины направлены вверх; $\mathcal{Y}_n^{(-)}$ - понижающий оператор в n -ном узле. АБ (1.2) действительно приводит к решению, если коэффициенты C_R будут определены соотношением

$$\frac{C_{(R_1, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, R_j, R_{j+2}, \dots, R_M)}}{C_R} = \frac{\lambda_{R_{j+1}} - \lambda_{R_j} + i}{\lambda_{R_{j+1}} - \lambda_{R_j} - i}, \quad (1.3)$$

а набор $M \leq N/2$ попарно различных - иначе вектор (1.2) зануляется - комплексных чисел λ_j будет удовлетворять системе так называемых уравнений анзаца Бете (УАБ):

$$\left(\frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2} \right)^N = - \prod_{k=1}^M \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i}, \quad j = 1 \dots M. \quad (1.4)$$

При этом состояние (1.2) будет собственной функцией гамильтониана

(1.1) с собственным значением $E = -J \sum_{j=1}^M \frac{1/2}{\lambda_j^2 + 1/4}$, собственной функцией оператора циклической перестановки $e^{iP} \vec{\mathcal{J}}_n = \vec{\mathcal{J}}_{n+1} e^{iP}$ с собственным значением $e^{iP} = \prod_{j=1}^M \frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2}$ и высшим членом спинового мультиплетта со спином $L = N/2 - M$. Таким образом, задача диагонализации гамильтониана сводится к решению системы алгебраических уравнений (1.4).

Впоследствии, с помощью квантового метода обратной задачи рассеяния^{/2/}, не использующего явного координатного АБ типа (1.2), МГ была обобщена на случай произвольного спина S с сохранением точной интегрируемости^{/3/}. Некоторые свойства этой модели и ее решений рассматривались в работах^{/4/}. Наиболее просто обобщаются на произвольный спин УАБ (1.4):

$$\left(\frac{\lambda_j + iS}{\lambda_j - iS} \right)^N = - \prod_{k=1}^M \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i}, \quad j = 1 \dots M. \quad (1.5)$$

В то же время решение этих уравнений (в нем не должно быть совпадающих корней) содержит всю необходимую информацию о состоянии: через него выражаются энергия, импульс, спин,

$$E = -J \sum_{j=1}^M \frac{S}{\lambda_j^2 + S^2}, \quad (1.6)$$

$$P = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^M \ln \left(\frac{\lambda_j + iS}{\lambda_j - iS} \right) \pmod{2\pi}, \quad (1.7)$$

$$L = SN - M \geq 0, \quad (1.8)$$

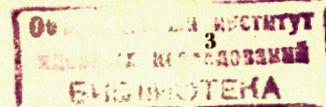
а также высшие интегралы движения. Поэтому именно УАБ (1.5) будут исходным пунктом нашего анализа. Следует отметить, что к уравнениям подобного типа приводится целый ряд задач не только квантовой механики, но и двумерной квантовой теории поля, например, проблема Кондо^{/5/}, модель Гросса - Невё^{/6/}, модель главного кирального поля и $O(4)$ -сигма-модель^{/7,8/}, $O(3)$ -сигма-модель^{/9/}. Поэтому изучение уравнений (1.5) представляется важным и интересным.

С момента появления УАБ, для анализа и классификации их решений использовалась так называемая струнная гипотеза^{/1,10,11/}. Она утверждает, что при $N \rightarrow \infty$ любое решение системы (1.5) состоит из некоторого количества струн (смотри рисунок в приложении) - семейств комплексных корней вида

$$\lambda = X + i \left(\frac{n+1}{2} - m \right), \quad m = 1 \dots n, \quad (1.9)$$

где n - натуральное число (длина струны), а X - вещественное число (центр струны). „Струнная“ гипотеза использовалась и при рассмотрении УАБ (1.5) в работах^{/4/}. Однако более тщательный анализ^{/12-14/} показал, что, вообще говоря, эта гипотеза неверна: в случае $S = 1/2$ для некоторых состояний были обнаружены отклонения от нее.

Настоящая работа является обобщением работы^{/12/} на случай произвольного спина. При этом обнаруживаются некоторые качественно новые черты решений УАБ. Мы стремились подробно изложить выкладки, чтобы явно продемонстрировать причины нарушения струнной картины. Мы считаем



такое изложение целесообразным также в связи с тем, что методика может быть применена ко всем УАБ, сходным с (1.5).

2. Общая структура состояний и уравнения для моря

Ниже мы будем исследовать в пределе $N \rightarrow \infty$ только такие состояния, энергия которых над антиферромагнитным физическим вакуумом остается конечной в этом пределе. В частности, не рассматриваются низшие ферромагнитные ($J < 0$) состояния, хотя, в принципе, они описываются такими же УАБ. В антиферромагнитном случае, поскольку спины стремятся выстроиться антипараллельно, суммарный спин состояния должен быть сравнительно небольшим, а значит, ввиду (1.8), M будет лишь немного меньше SN , так что мы должны иметь дело с большим числом уравнений.

Мы примем несколько более общую, чем струнная, гипотезу о структуре решений и в дальнейшем убедимся в самосогласованности этого подхода в пределе $N \rightarrow \infty$. Основу составляет море $2S$ -струн — совокупность большого числа

$$M_s = N/2 - K \quad (2.1)$$

струн (1.9) длины $2S$. При этом (полу)целое — если N (не)четно — неотрицательное число K полагается конечным при $N \rightarrow \infty$. Далее, мы допускаем в наборе M корней λ_j , кроме моря $2S$ -струн, существование конечного числа вещественных корней и пар взаимно-сопряженных комплексных корней $\lambda = x \pm iy$, которые в струны объединяться не обязаны.

Комплексная самосопряженность каждого решения системы (1.5), предполагаемая нами (струны (1.9), очевидно, тоже являются самосопряженными), обеспечивает вещественность энергии и импульса (1.6)–(1.7) и приводит к тому, что УАБ для λ^* получается сопряжением и взятием обратной величины из УАБ для λ , так что число уравнений, как и неизвестных, уменьшается вдвое. Для случая $M=2$ гипотеза о самосопряженности всех решений может быть строго доказана^{14/}. В остальном наши конфигурации являются максимально общими.

Ниже возникает необходимость следующей классификации пар по величине их мнимых частей:

- 1) узкие пары, $0 \leq y < S - 1/2$, их число будем обозначать M_n ;
 - 2) промежуточные пары, $S - 1/2 < y < S + 1/2$, их число — M_i ;
 - 3) широкие пары, $y > S + 1/2$, их число — M_w .
- Общее число пар $M_p = M_n + M_i + M_w$. Вещественный корень удобно рассматривать как половину узкой пары с $y = 0$, а особые случаи $y = S \pm 1/2$ можно специально исследовать, и выясняется, что они не

присутствуют в решениях. Узкие пары могут существовать только при $S > 1/2$. Очевидно, что

$$M = 2SM_s + 2M_p = SN - 2SK + 2M_p. \quad (2.2)$$

Исследуем теперь УАБ для моря $2S$ -струн. Вообще говоря, при конечном N струны не являются точными. Однако имеющиеся отклонения от точных струн, обеспечивающие выполнение УАБ для каждого из членов струны по отдельности, стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Мы будем интересоваться только лидирующим порядком, полагая струны точными (1.9). При этом мы требуем выполнения УАБ для каждой струны в среднем: берем произведение УАБ для всех ее членов^{10/}. Для таких усредненных уравнений предел точных струн является гладким, в то время как УАБ для отдельных корней содержат полюса по отклонениям от струн, и поэтому лидирующие при $N \rightarrow \infty$ члены в них могут быть скомпенсированы за счет исчезающих в пределе отклонений. Ниже (разделы 3,5) продемонстрируем это на примере струноподобных мультиплетов, которые во многом аналогичны струнам моря.

При рассмотрении уравнений для моря мы пользуемся стандартной техникой^{15,11/}, позволяющей свести задачу к интегральному уравнению. Произведение УАБ (1.5) для членов j -той $2S$ -струны (1.9) из моря в присутствии M_p пар $x_k \pm iy_k$ после перегруппировки множителей и сокращения в числителе и знаменателе выражений, совпадающих тождественно или в пределе точных струн, сводится к виду

$$\prod_{m=1}^{2S} \left[\frac{X_j + i(m-1/2)}{X_j - i(m-1/2)} \right]^N = - \prod_k^{M_p} \left[\frac{X_j - x_k + i(S \pm 1/2 \pm y_k)}{X_j - x_k - i(S \pm 1/2 \pm y_k)} \right] \quad (2.3)$$

$$* \prod_k^{M_s} \left[\frac{X_j - X_k + 2iS}{X_j - X_k - 2iS} \prod_{m=1}^{2S-1} \left(\frac{X_j - X_k + im}{X_j - X_k - im} \right)^2 \right],$$

где каждый \pm означает, что в произведение следует включить члены с обоими знаками. Таким образом, под знаком произведения по парам в (2.3) содержатся четыре дроби. Мы будем пользоваться подобными сокращенными обозначениями и в дальнейшем. Поскольку для вещественного α справедливо

$$\ln \left(\frac{\alpha + i}{\alpha - i} \right) = i [\pi - 2 \operatorname{atan}(\alpha)] \pmod{2\pi i}, \quad (2.4)$$

можно переписать (2.3) в виде

$$\prod_{m=1}^{2S} \frac{N}{\pi} \sum_{m=1}^{2S} \operatorname{atan} \left(\frac{X_j}{m-1/2} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_k^{M_p} \operatorname{atan} \left(\frac{X_j - x_k}{S \pm 1/2 \pm y_k} \right) \quad (2.5)$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_k^{M_s} \left[\operatorname{atan} \left(\frac{X_j - X_k}{2S} \right) + 2 \sum_{m=1}^{2S-1} \operatorname{atan} \left(\frac{X_j - X_k}{m} \right) \right] = Q(X_j),$$

где $Q(X_j)$ - целое или полуцелое (если $2SN - M_s$ нечетно или четно) число. Разным X_j соответствуют разные $Q(X_j)$, отличающиеся на целые числа. Таким образом, если решение, задаваемое набором корней $\{X_k\}$, зафиксировано, то формула (2.5) определяет некую функцию $Q(x)$, которая принимает (полу)целые значения в точках, содержащихся в наборе $\{X_k\}$. Однако функция (2.5) может принимать (полу)целые значения и в других точках, не содержащихся в этом наборе. Такие точки $x_j, j=1 \dots H$, мы называем дырками в распределении центров струн. При $N \rightarrow \infty$ производная функции (2.5) растет, расстояние между точками, где функция принимает (полу)целые значения, уменьшается, и, таким образом, корни и дырки заполняют всю вещественную ось с некоторой плотностью $\rho(x)$, которая является гладкой функцией - производной от $Q(x)$:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \rho(x) \equiv \sigma(x) + \sum_j^H \delta(x - x_j), \quad (2.6)$$

где введена $\sigma(x)$ - плотность распределения центров струн, без дырок. При $N \rightarrow \infty$ можно заменять суммы по корням интегралами:

$$\sum_j^{M_s} f(X_j) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) f(x) - \sum_j^H f(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sigma(x) f(x). \quad (2.7)$$

Тогда, подставляя (2.5) в (2.6) и пользуясь (2.7), получим линейное интегральное уравнение для функции $\rho(x)$:

$$\rho(x) = N \sum_{m=1}^{2S} A(x, m-1/2) - \sum_j^{M_s} A(x-x_j, S \pm 1/2 \pm y_j) + \sum_j^H B(x-x_j) \quad (2.8)$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(X) B(x-X); \quad B(x) = A(x, 2S) + 2 \sum_{m=1}^{2S-1} A(x, m), \quad A(x, \alpha) = \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2}.$$

Его удобно решать с помощью преобразования Фурье (П.1), смотри приложение. Находя Фурье-образы членов (2.8) с помощью (П.3) и суммируя конечные геометрические прогрессии, возникающие из сумм по m , можно представить Фурье-образ решения в виде суммы вкладов различных конфигураций - невозмущенного моря, дырок, промежуточных, узких и широких пар:

$$\tilde{\rho}(p) = \sum_{j=0}^{H+M_s} e^{-ix_j p} \bar{\rho}_j(|p|), \quad \text{Im}(\bar{\rho}_j) = 0; \quad (2.9)$$

$$\bar{\rho}_0(p) = \frac{N}{2 \cosh(p/2)}, \quad x_0 \equiv 0; \quad \rho_0(x) = \frac{N}{2 \cosh(\pi x)}; \quad (2.10)$$

$$\bar{\rho}_j^{(h)}(p) = \frac{2 e^{(S-1/2)p} - e^{-(S-1/2)p} - e^{-(S+1/2)p}}{2 \cosh(p/2) 2 \sinh(Sp)}; \quad (2.11)$$

$$\bar{\rho}_j^{(i)}(p) = -\frac{\tanh(p/2)}{2 \sinh(Sp)} [e^{-(y_j+1/2)p} + e^{-(y_j-1/2)p} + e^{(y_j-1/2)p} - e^{(2S-y_j-1/2)p}]; \quad (2.12)$$

$$\bar{\rho}_j^{(n)}(p) = -\frac{\sinh(p/2)}{\sinh(Sp)} 2 \cosh(y_j p), \quad (2.13)$$

$$\bar{\rho}_j^{(\omega)}(p) = 2 \sinh(p/2) e^{-(y_j-S)p}. \quad (2.14)$$

Ввиду (2.6) выражения для плотности корней σ будут те же самые, за исключением вклада дырок (2.11):

$$\bar{\sigma}_j^{(h)}(p) = \bar{\rho}_j^{(h)}(p) - 1 = -\frac{\tanh(p/2)}{2 \sinh(Sp)}. \quad (2.15)$$

Общее число струн в море определяет нормировку плотности:

$$M_s = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sigma(x) = \bar{\sigma}(0) = \frac{N}{2} - \frac{H}{4S} - \frac{M_i}{2S} - \frac{M_n}{S}. \quad (2.16)$$

Подставляя (2.1) в (2.16), найдем число дырок

$$H = 4SK - 4M_n - 2M_i \geq 0, \quad (2.17)$$

а также, пользуясь (2.2), спин (I.8):

$$L = 4SK - 2M_p = H/2 - M_i - 2M_\omega \geq 0. \quad (2.18)$$

С учетом того, что количество дырок и струн в море должно быть целым, из (2.16-18) возникает ряд ограничений на возможные квантовые числа состояний. Например, четность числа дырок и удвоенного спина состояния совпадает с четностью $2SN$.

Положения отдельных корней и дырок $\{\mathcal{X}_j^0\} = \{X_j, x_j\}$ определяются (полу)целыми точками функции (2.5). Если учесть определение плотности (2.6) и граничное условие в (2.5), то получается

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = j - 1/2, \quad j = 1 \dots M_s + H. \quad (2.19)$$

Формулы (2.9-15) содержат полную информацию о море, если положения пар и дырок заданы. Эти формулы являются более общими, чем в случае струнной гипотезы^{4/}. При $S=1/2$ воспроизводятся соответствующие результаты работы^{1/2/}, а в случае $S > 1/2$ может возникнуть качественно новое явление - узкие пары.

3. Уравнения для пар и качественная картина состояний

Выпишем логарифм УАБ (I.5) для верхнего члена какой-либо из пар

$$\lambda = x \pm iy:$$

$$\mathcal{L} \equiv N \ln \left[\frac{x+i(y+S)}{x+i(y-S)} \right] = i\pi + \sum_j^{M_p} \ln \left[\frac{x-x_j+i(y \pm y_j+1)}{x-x_j+i(y \pm y_j-1)} \right] + \mathcal{R} \pmod{2\pi i}. \quad (3.1)$$

Вклад моря $2S$ -струн в (3.1) равен

$$\mathcal{R} = \sum_j^{M_s} \ln \left[\prod_{m=1}^{2S} \frac{x-X_j+i(y-S-1/2+m+1)}{x-X_j+i(y-S-1/2+m-1)} \right] = \sum_j^{M_s} \ln \left[\frac{x-X_j+i(y+S \pm 1/2)}{x-X_j+i(y-S \pm 1/2)} \right], \quad (3.2)$$

где мы сократили совпадающие члены в числителе и знаменателе произведения. В рассматриваемом приближении можно воспользоваться (2.7) и применить к возникающему из (3.2) интегралу формулу (П.5), осуществляющую преобразование Фурье. Тогда, подставляя выражение для плотности корней (2.9), можно получить для широких, узких и промежуточных пар

$$\mathcal{R}^{(\omega)} = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p} 2 \cosh(p/2) 2 \sinh(Sp) \sum_{j=0}^{H+M_p} e^{-[y-i(x-x_j)]p} \bar{\sigma}_j(p), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{R}^{(n)} = -2\pi i \bar{\sigma}(0) + \int_0^{\infty} \frac{dp}{p} 2 \cosh(p/2) \sum_{j=0}^{H+M_p} \left\{ e^{-[S-y+i(x-x_j)]p} - e^{-[S+y-i(x-x_j)]p} \right\} \bar{\sigma}_j(p), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{R}^{(i)} = -i\pi \bar{\sigma}(0) + \int_0^{\infty} \frac{dp}{p} \sum_{j=0}^{H+M_p} \left\{ e^{-[y-S+1/2-i(x-x_j)]p} - e^{-[y+S+1/2-i(x-x_j)]p} + e^{-[S+1/2-y+i(x-x_j)]p} - e^{-[y+S-1/2-i(x-x_j)]p} \right\} \bar{\sigma}_j(p). \quad (3.5)$$

В данном разделе мы рассмотрим только лидирующие вклады в (3.3-5) от невозмущенного моря (2.10). Соответствующие интегралы берутся по формулам (П.8-10).

В результате, если λ - узкая или широкая пара, то из (3.3-4) получается $\mathcal{R}_0^{(n,\omega)} = \mathcal{L}$, то есть лидирующий вклад моря в правую часть (3.1) полностью сокращает левую часть. Таким образом, стандартные аргументы /I, 10, II/ в пользу того, что все комплексные корни должны быть членами струн, не работают: бесконечность в левой части (3.1) компенсируется за счет того, что в правой части (3.1-2) растет общее число членов (2.2), в то время как каждый из них остается конечным и ни один из знаменателей не стремится к нулю. Поэтому могут существовать узкие и широкие пары, не входящие ни в какие струны. Их параметры определяются конечными членами в (3.1-4), которые мы проанализируем ниже (раздел 5).

Для случая же промежуточной пары, $|y-S| < 1/2$, (3.5) дает

$$\pmod{2\pi i} \mathcal{R}_0^{(i)} = -\frac{i\pi N}{2} + N \ln \left[\frac{x+i(y+S)}{x+i(y-S)} \tan \left(\pi \frac{y-S-i x}{2} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$= \mathcal{L} + \frac{N}{2} \ln \left\{ \frac{\cosh(\pi x) - \cos[\pi(y-S)]}{\cosh(\pi x) + \cos[\pi(y-S)]} \right\} + N \ln \left\{ -\frac{\sinh(\pi x) + i \sin[\pi(y-S)]}{|\sinh(\pi x) + i \sin[\pi(y-S)]|} \right\}.$$

Как явствует из (3.6), после сокращения левой части (3.1) в правой части останется член, который ведет себя при $N \rightarrow \infty$ как $-\alpha N$, $\text{Re}(\alpha) > 0$. Следовательно, чтобы скомпенсировать эту минус бесконечность, какой-то из (конечного числа) оставшихся членов правой части, не содержащих N явно, должен стремиться к плюс бесконечности. Значит, кроме рассматриваемой промежуточной пары, решение должно содержать узкую пару, имеющую

$$x_j \pm iy_j = x + i(y-1) + \mathcal{O}(e^{-\alpha N}), \quad (3.7)$$

где стоит плюс или минус в зависимости от знака мнимой части справа. Но тогда в уравнении (3.1) для члена (3.7) этой узкой пары, где лидирующие члены уже сократились, появится вклад $-\alpha N$ от рассмотренной промежуточной пары. И спасти положение может только еще одна пара, один из членов которой лежит на $i + \mathcal{O}(e^{-\alpha N})$ ниже точки (3.7). Так будет продолжаться до тех пор, пока мы не дойдем до нижнего члена промежуточной пары с параметрами

$$x' + iy' = x + i(2S-y) + \mathcal{O}(e^{-\alpha N}), \quad (3.8)$$

для которого имеется вклад моря, подобный (3.6), который компенсирует дисбаланс, вызванный предыдущей парой.

Таким образом, мы делаем вывод о том, что промежуточные пары могут встречаться только в составе струноподобных мультиплетов (смотри рисунок), являющихся обобщением квартетов из работы /12/. Мультиплет содержит две промежуточные и $2S-1$ узких пар, вещественные части которых совпадают, а мнимые расположены через единицу в двух сериях. Параметры промежуточных пар - высших членов серий - связаны формулой (3.8), так что весь мультиплет в пределе $N \rightarrow \infty$ задается двумя вещественными числами x и y . Вырожденным случаем мультиплета, содержащим вдвое меньше членов, когда $y=S$, является струна длины $2S+1$. Мы будем рассматривать ее как половину мультиплета.

В связи с полученным ограничением на промежуточные пары удобно выделить в (2.9) вклады мультиплетов, число которых будем обозначать M_m ; $M_i = 2M_m$. Суммируя вклады в плотность (2.12) от двух промежуточных пар мультиплета, $x_j \pm iy_j$ и $x_j \pm i(2S-y_j)$, получим

$$\bar{p}_j^{(m)}(p) = -\frac{\sinh(p/2)}{\sinh(Sp)} \left[e^{-y_j p} + e^{-(2S-y_j)p} \right]. \quad (3.9)$$

Узкие пары, не входящие в мультиплеты, мы называем свободными и обозначаем их число M_f ; $M_n = M_f + (2S-1)M_m$. Формулы (2.16-18) переписываются в виде

$$M_3 = \tilde{\sigma}(0) = \frac{N}{2} - \frac{H}{4S} - \frac{M_f}{S} - 2M_m, \quad (3.10)$$

$$H = 4SK - 4M_f - 8SM_m \geq 0, \quad (3.11)$$

$$L = H/2 - 2M_w - 2M_m \geq 0. \quad (3.12)$$

Итак, мы получили качественную картину состояний: широкие и свободные узкие пары плюс мультиплеты на фоне моря с некоторым числом дырок. Обратимся теперь к количественному описанию.

4. Энергия и импульс состояний

Согласно (I.6-7), все комплексные пары дают прямой вклад в энергию и импульс:

$$-\frac{E_p}{J} = \sum_j^{M_p} \frac{S}{(x_j \pm iy_j)^2 + S^2} = \operatorname{Re} \sum_j^{M_p} \frac{1}{ix_j \pm y_j + S}, \quad (4.1)$$

$$P_p = \frac{1}{i} \sum_j^{M_p} \ln \left[\frac{x_j + i(S \pm y_j)}{x_j - i(S \pm y_j)} \right] \pmod{2\pi}. \quad (4.2)$$

Кроме этого, существует еще косвенный вклад вследствие реакции моря $2S$ -струн на присутствие пар. Преобразуем энергию и импульс моря:

$$\begin{aligned} -\frac{E_s}{J} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sigma(x) \sum_{m=1}^{2S} \frac{S}{[x+i(S+1/2-m)]^2 + S^2} \\ &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dp \tilde{\sigma}(p) \sum_{m=1}^{2S} e^{-(m-1/2)p} = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dp \tilde{\sigma}(p) \frac{\sinh(Sp)}{\sinh(p/2)} e^{-Sp}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \sigma(x) \sum_{m=1}^{2S} \ln \left[\frac{x+i(m-1/2)}{x-i(m-1/2)} \right] \\ &= 2\pi S \tilde{\sigma}(0) - 2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{dp}{p} \tilde{\sigma}(p) \frac{\sinh(Sp)}{\sinh(p/2)} e^{-Sp}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где мы воспользовались (П.1-3,5) и учли, что фурье-образ плотности корней имеет структуру (2.9). Подставляя вклады в плотность от пар (2.13-14) и (3.9), после несложных вычислений с помощью (П.10) обнаруживаем, что косвенные вклады всех пар в энергию и импульс (4.3-4) в точности сокращают прямые вклады (4.1-2). Далее, вклады в (4.3-4) от невозмущенного моря (2.10) имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 &= \pi SN \pmod{2\pi}, \\ E_0 &= JN \int_0^{\infty} \frac{d(e^{-p})}{1+e^{-p}} \sum_{m=1}^{2S} (e^{-p})^{m-1} = -JN * \begin{cases} \sum_{n=1}^S \frac{1}{2n-1}, & S \text{ целое;} \\ \sum_{n=1}^{S-1/2} \frac{1}{2n}, & S \text{ полуцелое.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

а вклады дырок (2.15) сводятся к (П.4,8-9) и равны

$$E_j^{(h)} = \frac{J\pi}{2 \cosh(\pi x_j)} > 0, \quad P_j^{(h)} = -2 \operatorname{atan}(e^{-\pi x_j}). \quad (4.6)$$

Таким образом, мы видим, что состояние невозмущенного моря обладает минимальной энергией и представляет собой антиферромагнитный физический вакуум, а дырки - элементарные возмущения над ним с дисперсионным законом $E_j^{(h)} = -J \frac{\pi}{2} \sin[P_j^{(h)}]$. Комплексные пары влияют только на спин и мультиплетность состояний. Этот результат не изменился по сравнению со струнной картиной: допустимые неструнные конфигурации пар, как и струнные возмущения в работах ^{14/}, непосредственно не влияют на энергию и импульс состояния, которые определяются только дырками.

5. Уравнения для допустимых конфигураций

Наиболее просто выводятся уравнения для широких пар. Лидирующие члены в (3.1) для них уже сократились (раздел 3). После подстановки в (3.3) плотности корней из (2.13-15) и (3.9), все интегралы берутся с помощью (П.10). Подставляя результат в (3.1) и экспоненцируя, мы имеем

$$\prod_j^N \frac{x-x_j+i(y-S+1/2)}{x-x_j+i(y-S-1/2)} = - \prod_j^{M_w+M_m} \frac{x-x_j+i[y-S \pm (y_j-S)+1]}{x-x_j+i[y-S \pm (y_j-S)-1]}. \quad (5.1)$$

Действуя по той же схеме, после несколько более утомительных выкладок с помощью (П.7,9), получаем из (3.1,4) УАБ для узких пар:

$$\prod_j^N \frac{\sinh[\pi \frac{x-x_j+i(y-S-1/2)}{2S}]}{\sinh[\pi \frac{x-x_j+i(y-S+1/2)}{2S}]} = (-)^{N-1} \prod_j^{M_n+M_m} \frac{\sinh\{\pi \frac{x-x_j+i[y-S \pm (y_j-S)+1]}{2S}\}}{\sinh\{\pi \frac{x-x_j+i[y-S \pm (y_j-S)-1]}{2S}\}}, \quad (5.2)$$

где при вычислении знакового фактора мы учли, что число струн в море (3.10) целое. Замечателен тот факт, что в уравнении для широких пар (5.1) вклады узких пар полностью сократились, а в уравнении (5.2) для узких пар сократились вклады широких.

Выведем теперь УАБ для мультиплетов. Уже из качественного анализа (раздел 3) ясно, что уравнения для отдельных членов мультиплета будут сингулярны по отклонениям от точной предельной картины. Поэтому, как и для струн моря (раздел 2), мы получим для каждого мультиплета несингулярное усредненное уравнение, имея в виду, что его выполнение даст возможность обеспечить УАБ для всех членов за счет малых деформаций конфигурации, исчезающих в пределе. Важно, что при этом для деформаций число уравнений совпадает с числом неизвестных (такого совпадения не будет для особых пар с $y = S \pm 1/2$, поскольку один из параметров для них точно зафиксирован, но соответствующее уравнение не

превращается в тождество, как, например, для вещественных корней. Именно по этой причине мы исключили особые случаи из рассмотрения).

Наше усредненное уравнение для мультиплета будет произведением уравнений для всех его пар, а именно, для следующих членов:

$$\lambda = x + i(y - m), \quad m = 0 \dots 2S, \quad |y - S| < 1/2. \quad (5.3)$$

Уравнения для членов узких пар ($m = 1 \dots 2S - 1$) уже найдены (5.2). Для двух высших членов ($m = 0, 2S$) мы рассмотрим сразу сумму уравнений (3.1):

$$N \ln \left[\frac{x + i(y + S)}{x + i(y - 3S)} \right] = \sum_j^{M_p} \ln \left[\frac{x - x_j + i(y + y_j + 1)}{x - x_j + i(y + y_j - 1)} \frac{x - x_j + i(y + y_j - 2S + 1)}{x - x_j + i(y + y_j - 2S - 1)} \right] \quad (5.4)$$

$$- 2\pi i \tilde{\sigma}(0) + \int_0^\infty \frac{dp}{p} 2 \cosh(p/2) \sum_{j=0}^{H+M_n+M_w+M_m} \left\{ e^{-[3S-y+i(x-x_j)]p} - e^{-[S+y-i(x-x_j)]p} \right\} \tilde{\sigma}_j(p) \pmod{2\pi i}.$$

Интегралы берутся с помощью (П.7,9,10), и после ряда сокращений экспоненцированный ответ оказывается в точности произведением (5.1) и (5.2).

Прежде чем перемножать уравнения для членов мультиплета, отметим важное свойство уравнений (5.2): УАБ для любой узкой пары на самом деле не содержит вкладов мультиплетов, за исключением лишь того, членом которого эта пара является. Это свойство легко устанавливается с помощью троика, аналогичного (3.2). В произведении по мультиpletу λ_j вида (5.3) большинство членов в числителе и знаменателе сокращаются. Например, из членов, в которых берется знак плюс, остаются только два первых ($m = 0, 1$) в знаменателе и два последних ($m = 2S - 2, 2S - 1$) в числителе (второй высший член мультиплета ($m = 2S$) в произведении (5.2) включать не надо!). Но в силу периодичности синуса, эти члены тоже сокращаются. Единственное исключение из правила сокращений - невозможность сократить ноль с нулем (сингулярные члены), когда пара входит в мультиплет, по которому берется произведение.

Перемножим теперь УАБ для членов мультиплета. Множитель (5.1) появится один раз - из (5.4), - а среди уравнений (5.2) для членов (5.3) с $m = 0 \dots 2S - 1$ будут происходить рассмотренные только что сокращения. Однако произведение было специально устроено так, чтобы в правой части сократились и сингулярные члены, - они дадут знаковый множитель $(-)^{2S}$. К знаковому же множителю $(-)^H$ сводится при этом и левая часть. В результате получается уравнение, отличающееся от (5.1) только множителем $(-)^{2SN-H}$, но вследствие (3.10) это - единица.

Таким образом, мы получили окончательные уравнения (5.1) для широких пар и мультиплетов, а также (5.2) для свободных узких пар, где $M_n + M_m$ следует заменить на M_f . "Половинные" конфигурации - вещественные корни и $(2S+1)$ -струны - рассматриваются на равных основаниях, только в правых частях для них следует брать один из двух совпадающих множителей. Наши предельные уравнения уже не содержат параметра $N \rightarrow \infty$, кроме знакового множителя в (5.2). Формула (5.1) при $S = 1/2$ согласуется с результатом работы /12/. Отметим сходство структуры (5.1) для любого спина с УАБ (1.4) для МГ спина $1/2$, а (5.2) - с уравнениями для анизотропной XXZ МГ, которые изучались в работе /16/.

Строго говоря, выведенные уравнения описывают только лидирующий порядок по $N \rightarrow \infty$ для конфигураций, оставшихся фиксированными в этом пределе. Оценить поправки к ним очень трудно: необходимо учесть ошибку аппроксимации моря функцией плотности и отклонения от точной картины $2S$ -струн. В частности, нельзя придавать слишком большого значения выводу об экспоненциальной точности мультиплетов, полученному в предположении идеальности струн моря. Очевидно, наибольших отклонений от предельной картины следует ожидать для конфигураций, наиболее удаленных по вещественной оси туда, где плотность моря мала.

6. Некоторые низшие состояния

В разделе 4 было установлено, что энергия состояний над вакуумом определяется дырками (4.6). Поэтому низшие состояния должны иметь наименьшее число дырок. Однако из формул (3.II -12) видно, что после фиксирования числа дырок, широких пар и мультиплетов (сумма последних двух чисел ограничена неотрицательностью спина) остается некоторый произвол в добавлении свободных пар - выбор $0 \leq K \leq N/2$. Наша гипотеза состоит в том, что если состояние вообще существует, то оно реализуется при наименьшем возможном K . Эта гипотеза подтверждается при анализе простейших состояний, хотя общим доказательством мы пока не располагаем. Ввиду сложности решения большого числа уравнений (5.1-2) мы продемонстрируем наши результаты на примере $S = 3/2$ при четных N .

В этом случае имеется вакуум с $H = L = M_w = M_m = 0$. Тогда из (3.II) $M_f = \frac{3}{2} K$. Наименьшему $K = 0$ отвечает невозмущенное море из $N/2$ штук 3-струн. Докажем, что при $K = 1$ физических решений не будет. Можно реализовать $M_f = 3/2$ двумя способами.

1) Три вещественных корня: a_1, a_2, a_3 . Для них мы имеем систему трех уравнений (5.2):

$$1 = \frac{\sinh\left(\pi \frac{\alpha_j - \alpha_k + i}{3}\right)}{\sinh\left(\pi \frac{\alpha_j - \alpha_k - i}{3}\right)} \frac{\sinh\left(\pi \frac{\alpha_j - \alpha_l + i}{3}\right)}{\sinh\left(\pi \frac{\alpha_j - \alpha_l - i}{3}\right)}, \quad (6.1)$$

где (j, k, l) - циклические перестановки $(1, 2, 3)$. Решая (6.1), находим, что $2\alpha_j = \alpha_k + \alpha_l$. Тогда из трех уравнений следует, что все три корня совпадают. Но такое решение не соответствует никакому физическому состоянию, потому что бетеvский вектор при наличии совпадающих корней зануляется.

2) Узкая пара $\alpha \pm i\beta$ и один вещественный корень $\alpha + c$. Уравнения (5.2) дают

$$1 = \frac{\sin\left(\pi \frac{2\beta + 1}{3}\right)}{\sin\left(\pi \frac{2\beta - 1}{3}\right)} \frac{\sinh\left[\pi \frac{-c + i(\beta + 1)}{3}\right]}{\sinh\left[\pi \frac{-c + i(\beta - 1)}{3}\right]}, \quad (6.2)$$

$$1 = \frac{\sinh\left[\pi \frac{c + i(\beta + 1)}{3}\right]}{\sinh\left[\pi \frac{c + i(\beta - 1)}{3}\right]} \frac{\sinh\left[\pi \frac{c + i(-\beta + 1)}{3}\right]}{\sinh\left[\pi \frac{c + i(-\beta - 1)}{3}\right]}. \quad (6.3)$$

Из (6.3) получаем единственное решение: $c = 0$. Подстановка его в (6.2) приводит к тому, что β должно быть целым. Однако для узкой пары $0 \leq \beta < S - 1/2 = 1$, поэтому единственная возможность - это $\beta = 0$. Но тогда мы снова получаем три совпадающих вещественных корня.

Перейдем теперь к возбуждениям. Согласно правилу четности (раздел 2), низшие возбуждения будут содержать $N=2$ дырки: x_1, x_2 . С учетом (3.12) можно ожидать синглетное ($L = M_w = 0, M_m = 1/2$) и триплетное ($L=1, M_w = M_m = 0$) состояния.

Для триплета в (3.11) минимальное $K=1$, и $M_f = S - 1/2 = 1$. Снова возможны два случая.

1) Два вещественных корня: a, β . Для первого, (5.2) дает

$$\cosh\left(\pi \frac{a - x_1 - i/2}{3}\right) \cosh\left(\pi \frac{a - x_2 - i/2}{3}\right) \sinh\left(\pi \frac{a - \beta - i}{3}\right) = \cosh\left(\pi \frac{a - x_1 + i/2}{3}\right) \cosh\left(\pi \frac{a - x_2 + i/2}{3}\right) \sinh\left(\pi \frac{a - \beta + i}{3}\right). \quad (6.4)$$

Вычитая из (6.4) аналогичное уравнение для второго корня, после преобразований получим единственное решение: $a = \beta = (x_1 + x_2)/2$. Но оно не удовлетворяет (6.4) ни при каких вещественных x_1 и x_2 .

2) Узкая пара: $\alpha \pm i\beta$. УАБ (5.2) сводится к виду

$$\cosh\left[\pi \frac{a - x_1 + i(\beta - 1/2)}{3}\right] \cosh\left[\pi \frac{a - x_2 + i(\beta - 1/2)}{3}\right] \sin\left(\pi \frac{2\beta - 1}{3}\right) = \cosh\left[\pi \frac{a - x_1 + i(\beta + 1/2)}{3}\right] \cosh\left[\pi \frac{a - x_2 + i(\beta + 1/2)}{3}\right] \sin\left(\pi \frac{2\beta + 1}{3}\right). \quad (6.5)$$

Единственное решение (6.5), удовлетворяющее $0 \leq \beta < 1$, есть

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2\pi} \arccos\left[\frac{1}{\cosh\left(\pi \frac{x_2 - x_1}{3}\right) + \sqrt{\cosh^2\left(\pi \frac{x_2 - x_1}{3}\right) + 2}}\right]. \quad (6.6)$$

Таким образом, триплет содержит свободную пару (6.6). Ее мнимая часть монотонно растет от приблизительно 0,571 до 3/4 с ростом расстояния между дырками от нуля до бесконечности, в то время как струнная гипотеза потребовала бы 1/2 независимо от расстояния.

Для синглета минимальное $K=2$. Кроме узкой пары (6.6), он содержит струну длины $2S+1=4$. Положение ее центра c определяется из УАБ (5.1):

$$\frac{c - x_1 + i/2}{c - x_1 - i/2} \frac{c - x_2 + i/2}{c - x_2 - i/2} = 1 \Rightarrow c = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (6.7)$$

Возможные положения дырок в (6.6-7) определяются формулой (2.19), которую можно переписать в виде

$$j - 1/2 = \sum_{k=0}^{N+M_n+M_w+M_m} [F_k(\mathcal{P}_j - x_k) - F_k(-\infty)], \quad j=1 \dots M_s + H, \quad (6.8)$$

где различным членам (2.10-II, 13-14) и (3.9) в плотности (2.9) отвечают функции

$$F_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \sin(xp) \bar{p}_k(p) = \frac{1}{2} \varepsilon(x) \bar{p}_k(0) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n \bar{p}_k^{(2n+1)}(0)}{(2n+1) x^{2n+1}}. \quad (6.9)$$

Самому низкому возбуждению при четных N , очевидно, соответствует симметричное расположение двух дырок на максимальном удалении от начала координат: $x_1 = \mathcal{P}_1 = -x_2 = -\mathcal{P}_{M_s+H}$. Это соответствует импульсу $P = \pi(SN - 1)$, который является целым кратным $2\pi/N$, необходимость чего однозначно следует из перемножения всех УАБ (1.5): в правой части получается единица, а в левой, с учетом (1.7), e^{iPN} . Для нашего низшего возбуждения $x_1 \rightarrow -\infty$ при $N \rightarrow \infty$, и, оставляя в (6.8) только лидирующие члены, получим

$$-x_1 = x_2 = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{8SN}{\pi}\right) \Rightarrow E - E_0 = \frac{J\pi^2}{4SN}, \quad (6.10)$$

с точностью до поправок по $1/\ln(N)$, которые можно найти, пользуясь разложением (6.9). Лидирующий член, (6.10), одинаков для синглета и триплета. Однако первая поправка для синглета будет на

$\Delta E = \frac{J\pi^2}{N \ln(N)}$ больше из-за вклада входящей в $(2S+1)$ -струну промежуточной пары - половины (3.9). Полученные формулы для низшего возбуждения справедливы при произвольном S и, как и другие предсказания схемы, могут быть сопоставлены с численными расчетами.

Заканчивая данную работу, мы узнали о сходных результатах, полученных Решетихиным и Фаддеевым ^{18/} для уравнений, почти совпадающих с (I.5).

Мы благодарны П.Б.Вигману, А.А.Владимирову и Л.А.Тахтаджану за обсуждения и ценные замечания.

Приложение. Некоторые полезные формулы

Мы используем преобразование Фурье следующего вида:

$$\tilde{p}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\rho x} p(x), \quad p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} e^{i\rho x} \tilde{p}(\rho). \quad (\text{П.1})$$

Тогда имеет место тождество:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dX p(X) \sigma(x-X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} e^{i\rho x} \tilde{p}(\rho) \tilde{\sigma}(\rho), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \sigma(x) = \tilde{\sigma}(0). \quad (\text{П.2})$$

Некоторые частные фурье-интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\rho x} \frac{a/\pi}{x^2+a^2} = \varepsilon(a) e^{-|\alpha\rho|}, \quad \varepsilon(a) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -1, & \alpha < 0; \end{cases} \quad (\text{П.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \frac{e^{i\rho x}}{2 \cosh(\rho/2)} = \frac{1}{2 \cosh(\pi x)}. \quad (\text{П.4})$$

Для вещественных x , $a \neq 0 \neq A$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} dX \sigma(X) \ln \left(\frac{x-X+ia}{x-X+iA} \right) = \frac{i\pi}{2} [\varepsilon(A) - \varepsilon(a)] \tilde{\sigma}(0) + \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \left\{ e^{-[|A|-i\varepsilon(A)x]\rho} \tilde{\sigma}[\varepsilon(A)\rho] - e^{-[|a|-i\varepsilon(a)x]\rho} \tilde{\sigma}[\varepsilon(a)\rho] \right\}. \quad (\text{П.5})$$

При вычислении возникающих интегралов исходной является формула 3.54I.2 (страница 370) из таблиц ^{17/}, которую удобно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-a\rho} \frac{\sinh(b\rho)}{\sinh(c\rho)} = \frac{\partial}{\partial a} \ln \left[\frac{\Gamma\left(\frac{a+b+c}{2c}\right)}{\Gamma\left(\frac{a-b+c}{2c}\right)} \right]. \quad (\text{П.6})$$

Интегрирование (П.6) по параметру a дает

$$\int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} (e^{-A\rho} - e^{-a\rho}) \frac{\sinh(b\rho)}{\sinh(c\rho)} = \ln \left[\frac{\Gamma\left(\frac{a+b+c}{2c}\right) \Gamma\left(\frac{A-b+c}{2c}\right)}{\Gamma\left(\frac{a-b+c}{2c}\right) \Gamma\left(\frac{A+b+c}{2c}\right)} \right]. \quad (\text{П.7})$$

В частности, при $b=1/2$, $c=1$ имеем из (П.7)

$$\int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \frac{e^{-A\rho} - e^{a\rho}}{2 \cosh(\rho/2)} = \ln \left[\frac{\Gamma(a/2+3/4) \Gamma(A/2+1/4)}{\Gamma(a/2+1/4) \Gamma(A/2+3/4)} \right]. \quad (\text{П.8})$$

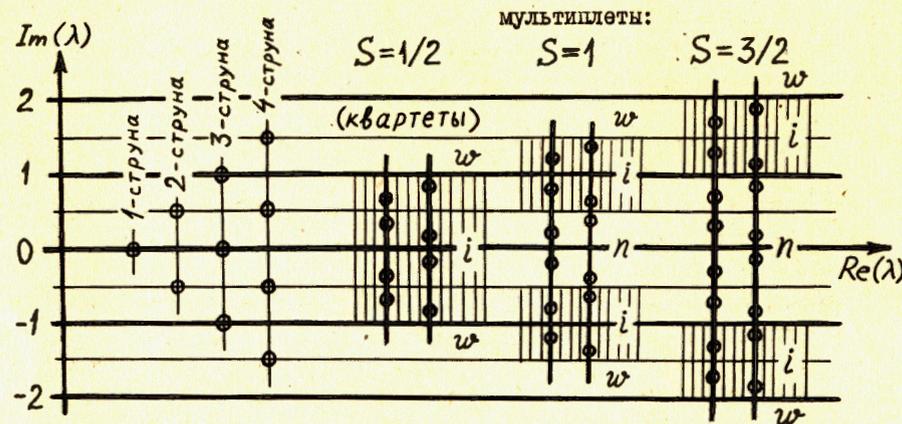
Для преобразования выражений с гамма-функциями используются тождества

$$\Gamma(1+z) = z \Gamma(z), \quad \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi / \sin(\pi z). \quad (\text{П.9})$$

Из (П.6-7,9) при $b=c$ можно получить и совсем простые интегралы:

$$\int_0^{\infty} d\rho e^{-a\rho} = 1/a, \quad \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} (e^{-A\rho} - e^{-a\rho}) = \ln(a/A). \quad (\text{П.10})$$

Рисунок. Струны и струноподобные мультиплеты



Литература

1. Bethe H. - Zeitschr. für Phys., 1931, Bd.71, S.205.
2. Faddeev L.D. - Contemp. Math. Phys., 1980, 1C, p.107; Kulish P.P., Sklyanin E.K. - Lecture Notes in Phys., 1982, 151, p.61; Изергин А.Г., Корепин В.Е. - ЭЧАЯ, 1982, 13, №3, с.501.
3. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. - Lett. Math. Phys., 1981, 5, p.393.
4. Takhtajan L.A. - Phys. Lett., 1982, 87A, p.479; Babujian H.M. - Nucl. Phys., 1983, B215, p.317.

5. Andrei N., Furuya K., Lowenstein J.H. - Rev.Mod.Phys., 1983, 55, p.331.
6. Andrei N., Lowenstein J.H. - Phys.Rev.Lett., 1979, 43, p.1698; Belavin A.A. - Phys.Lett., 1979, 87B, p. 117; Дутышев В.Н. - ЖЭТФ, 1980, 78, с.1332; Lowenstein J.H. - Surveys in High Energy Phys., 1981, 2, p.207.
7. Polyakov A., Wiegmann P.B. - Phys.Lett., 1983, 131B, p.121.
8. Фаддеев Л.Д., Решетихин Н.Д. - В кн.: Труды УИ Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. - ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с.37.
9. Faddeev L.D., Takhtajan L.A. - Integrability of quantum $O(3)$ nonlinear σ -model - LOMI preprint, E-4-83, Leningrad, 1983.
10. Takahashi M. - Progr.Theor.Phys., 1971, 46, p.401.
11. Фаддеев Л.Д., Тахтаджян Л.А. - Зап.научн.семина. ЛОМИ, 1981, 109, с.134.
12. Destri C., Lowenstein J.H. - Nucl. Phys., 1982, B205, p.369.
13. Woynarovich F. - J.Phys., 1982, A15, p.2985.
14. Владимиров А.А. - Неструнные двухмагнитные решения в изотропном магнетике Гейзенберга . - ОИЯИ, P17-84-409, Дубна, 1984.
15. Hulthen L. - Arkiv för Matematik, Astronomi och Physik, 1938, Bd. 26A, N.3, N.11, S.1; Des Cloizeaux J., Pearson J.J. - Phys.Rev. , 1962, 128, p.2131.
16. Babelon O., de Vega N.J., Viallet C.M. - Nucl. Phys., 1983, B 220, p.13.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. - Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - Физматгиз, М., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 октября 1984 года.

Л.В.Авдеев, Б.-Д.Дёрфель P2-84-685
Уравнения анзатца Бете
для изотропного антиферромагнетика Гейзенберга
произвольного спина

Исследуются решения уравнений анзатца Бете для обобщения изотропного антиферромагнетика Гейзенберга на произвольный спин. Показано, что в пределе бесконечного числа узлов N ранее принятая струнная гипотеза не имеет места для возбужденных состояний. Получена качественная картина решений. Выведена полная система уравнений, не содержащая параметра $N \rightarrow \infty$, и рассмотрены низшие возбуждения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Andrei N., Furuya K., Lowenstein J.H.

P2-84-685