объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-649

В.Н.Первушин, Р.И.Азимов

О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ КОНФАЙНМЕНТЕ ЦВЕТА

Направлено в журнал "Nuclear Physics"

1984

Введение

Одной из наиболее интригующих особенностей неабелевой калибровочной теории является топологическое вырождение классического вакуума /1,2,3/. При этом под вакуумом понимают чисто калибровочные стационарные поля $A_i = v(\vec{x})\partial_i v(\vec{x})^{-1}$, которые имеют нулевую классическую энергию и определяются несингулярными матрицами $v(\vec{x})$ со значениями в группе $SU(2)$ (множество матриц $v(\vec{x})$ топологически несвязно и эквивалентно множеству замкнутых путей на цилиндре /4/).

В электродинамике реально используют другое определение вакуума $A_i = \partial_i \lambda(\vec{x})$, значительно более узкое, которое ограничено условием поперечности $\partial_i^2 \lambda(\vec{x}) = 0$. Оно имеет единственное несингулярное $(\lambda(\infty)=0)$ решение: $\lambda(\vec{x}) = 0$.

Исходным пунктом настоящей работы является обобщение этого уравнения вакуума $\partial_i^2 \lambda(\vec{x}) = 0$ на неабелевы поля, находящиеся в пространстве конечного объема $\int\limits_{\Omega} d^3x = \frac{4}{3}\pi R^3$, с граничным условием на элемент группы

$$\lim_{|\vec{x}| \to R} e^{\hat{\lambda}_n(\vec{x})} = 1 \qquad \hat{\lambda} = g\frac{\tau^a}{2i}\lambda^a \qquad g = \frac{e}{\hbar c}.$$

Соответствующие изменения в электродинамике, конечно, не приводят к отличному от нуля вакууму, однако легко убедиться, что в неабелевой теории (в низшем порядке теории возмущений по константе связи) существуют нетривиальные решения уравнения $\partial_i^2 \lambda^a(x) = 0$ с условием $e^{\hat{\lambda}(R)} = \pm 1$. Это решение имеет вид

$$\lambda^a(\vec{x}) = 2\pi n \frac{x^a}{R}\cdot\frac{\hbar c}{e}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad e^{\hat{\lambda}} = e^{\frac{\tau^a x^a}{iR}\pi n}.$$

Таким образом, поперечный неабелевый вакуум в конечном объеме вырожден. Размерность вырождения совпадает с числом элементов группы гомотопии отображения пространства $\vec{X}$ на $SU(2)$ /1-4/

$$\pi_3(SU(2)) = Z; \qquad (\ Z\ \text{- группа целых чисел}).$$

Можно думать, что это вырождение снимается в пределе бесконечного объема, $R \to \infty$. Чтобы убедиться, что это не так, рассмотрим пример волновой функции кварка ψ, которая в вырожденном вакууме имеет вид суммы произведений фазовых факторов $e^{\hat{\lambda}(n)}$ на решение свободного уравнения Дирака $\psi_0(\vec{x})$

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\hat{\lambda}(n)}\psi_0(\vec{x}) = \delta\left(\frac{|\vec{x}|}{R}\right)\psi_0(\vec{x}) \equiv R\delta(|\vec{x}|)\psi_0(\vec{x}), \quad \lim_{R\to\infty} \neq \psi_0(\vec{x})\cdot const. \quad (1)$$

Результат суммирования по вырождению приводит к изменению трансформационных свойств "свободного" решения ψ_0, которые не восстанавливаются в пределе бесконечного объема (это типичный пример спонтанного нарушения симметрии, аналогичный квазисредним Боголюбова [5]. Из-за интерференции бесконечного числа фазовых факторов амплитуда вероятности нахождения кварка (I) с импульсом k равна нулю для класса функций $\psi_0(\vec{x})$, регулярных в точке $|\vec{x}|=0$: $\int d^3x\, \psi(\vec{x}) e^{i\vec{k}\vec{x}}=0$. Этот чисто квантовый эффект можно интерпретировать как конфайнмент цвета.

Определение физических переменных калибровочной теории допускает также динамический произвол. Например, в той же электродинамике электрические поля $E_i=\partial_0 A_i$ определены с точностью до произвольной калибровочной фазы $\partial_0\lambda(\vec{x},t)$, удовлетворяющей уравнению $\partial^2\partial_0\lambda(\vec{x},t)=0$. Такое же уравнение (в низшем порядке по g) имеет место для неабелевой теории, в калибровке $\nabla_i\partial_0 A_i=0$ $(\nabla_i=\partial_i+[A,\;])$, где поля A_i определены неоднозначно с точностью до калибровочных преобразований $\hat{A}_i'=v(\hat{A}_i+\partial_i)v^{-1}$, удовлетворяющих уравнению $\nabla^2(A)v\partial_0 v^{-1}=\partial_i^2\partial_0\hat{\lambda}+o(g)=0$, которое в настоящее время называется уравнением Грибова [6]. Граничными условиями для $\lambda^a(\vec{x},t)$ являются значения фазы на границах временного интервала ($\pm$ T/2): $\lambda^a(\vec{x},\pm\frac{T}{2})=\lambda^a_{(\pm)}(\vec{x})$. Эти функции от пространственных переменных удовлетворяют вакуумным уравнениям $\partial_i^2\lambda^a_{(\pm)}(\vec{x})=0$. Ясно, что спонтанное вырождение обоих вакуумов $\lambda^a_{(\pm)}(\vec{x})$ с числами $n_\pm$ ведет к нетривиальному решению для поля $\lambda^a_N(\vec{x},t)$

$$\lambda^a_N(\vec{x},t)=N(t)2\pi\frac{x^a}{R}\cdot\frac{\hbar c}{e}\,;\qquad N(t)=\frac{t}{T}(n_+-n_-)+\frac{1}{2}(n_++n_-),$$

где $N(t)$ функция, которая описывает интерполяцию между различными вакуумами $(N(\pm\frac{T}{2})=n_{(\pm)})$ и которая по смыслу является голдстоуновской модой топологического вырождения [7].

В настоящей работе сформулирована квантовая теория возмущения для неабелевых полей со спонтанным топологическим вырождением вакуума. Для квантования такой теории мы используем методы, развитые в работах [7,8] (в работе [8], по существу, показано, что спонтанное топологическое вырождение вакуума в модели Швингера приводит к самосогласованному описанию θ - вакуума и нарушения киральной симметрии).

Раздел I посвящен выбору динамических переменных неабелевой теории и более подробной постановке задачи. В разделе 2 рассматривается вакуумный сектор теории и доказывается эквивалентность квазиклассического приближения и точной квантовой теории. В разделе 3 формулируется квантовая теория возмущений и рассматривается предел бесконечного объема. В разделе 4 обсуждаются результаты.

I. Выбор физических переменных, постановка задачи

Рассмотрим теорию Янга-Миллса в конечном объеме и для конечного интервала времени:

$$S=\int\limits_{-T/2}^{T/2}dt\int\limits_{\Omega}d^3x\,\mathcal{L}=\int\limits_{-T/2}^{T/2}dt\,L_\Omega,\qquad \Big(\int\limits_{\Omega}d^3x=\frac{4}{3}\pi R^3\Big) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^{a2}_{\mu\nu}+i\bar{\psi}(\partial_\mu+\hat{A}_\mu)\gamma_\mu\psi,\quad \hat{A}_\mu=g\frac{\tau^a A^a}{2i}, \tag{3}$$

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu.$$

Действие (2), (3) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$A^u_\mu(\vec{x},t)=u(\vec{x},t)(A_\mu(\vec{x},t)+\partial_\mu)u^{-1}(\vec{x},t),\qquad \psi^u=u(\vec{x},t)\psi$$

и содержит нефизические степени свободы. Их можно устранить, используя тот факт, что классическое уравнение на временную компоненту

$$\delta S/\delta A_0=0,\ \Rightarrow(\nabla_i^2(A)A_0)^a=(\nabla(A)\partial_0 A_i)^a+j_0^a \tag{4}$$

является уравнением связи [7]. Здесь

$$j^a_\mu=g\bar{\psi}\frac{\tau^a}{2}\gamma_\mu\psi,\qquad \nabla_i^{ab}(A)=\delta^{ab}\partial_i+g\epsilon^{acb}A^c_i.$$

Выберем динамические переменные на решениях (4) в виде

$$(T)\qquad \hat{a}_i^T(A)=v_{a_0}(A)(\hat{A}_i+\partial_i)v^{-1}_{a_0}(A),\qquad \psi^T(A,\psi)=v_{a_0}(A)\psi, \tag{5}$$

где матрица v_{a_0} подчиняется уравнению

$$\partial_0 v_{a_0}(A)=v_{a_0}\hat{a}_0(A),\qquad \Big(a_0^a(A)=\Big(\frac{1}{\nabla(A)^2}\nabla_i(A)\partial_0 A_i\Big)^a\Big) \tag{6}$$

и определена с точностью до произвольной стационарной матрицы $g(x)$

$$v_{a_0}(A)=g(x)\bar{T}\exp\Big\{\int^t dt'a_0\Big\}, \tag{7}$$

(где $\bar{T}$ - операция антиупорядочивания по времени). В силу трансформационных свойств a_0 и v_{a_0}: $\hat{a}_0^u=u(\hat{a}_0+\partial_0)u^{-1}$, $v^u_{a_0}=v_{a_0}u^{-1}$ переменные (5) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\hat{a}_i^T(A^u) = \hat{a}_i(A), \qquad \hat{A}_i^u = u(\vec{x},t)(\hat{A}_i + \partial_i)u^{-1}(\vec{x},t)$$

Как следствие, переменные (5) удовлетворяют тождеству (см. /7/ x))

$$\nabla_i(a^T)\partial_0 a_i^T = 0. \tag{8}$$

Непосредственное квантование неабелевых калибровочных полей в калибровке (8) было сделано в недавней работе /10/. В этой работе показано, что поля a^T однозначно (с точностью до топологического вырождения вакуума) фиксируются дополнительным условием

$$\int^t dt\, \nabla_i \partial_0 a_i^T = 0 \tag{9}$$

и получено выражение для производящего функционала функций Грина. Мы приведем здесь обобщение результата /10/ на теорию со спинорными полями

$$Z(\eta,\bar{\eta},J) = \int \mathcal{D}a^T \mathcal{D}\psi^T \mathcal{D}\bar{\psi}^T (\det \nabla_i^2(a^T))^{1/2} \prod \delta(\nabla_i(a^T)\partial_0 a_i^T) \exp\{i\int dt \int d^3x [\mathcal{L}^T + J_i a_i^T + \bar{\eta}\psi^T + \bar{\psi}^T\eta]\}, \tag{10}$$

где $\mathcal{L}^T$ нетрудно получить, подставляя решение (4) $A_0^a = a_0(A) + \frac{1}{\nabla^2} j_0$ в действие (2)

$$\mathcal{L}^T(a_i^T; \partial_\mu a_i^T; \psi^T, \partial_\mu \psi^T) = \frac{1}{2}(\partial_0 a_i^T)^2 - \frac{1}{4}(F_{ij}^a(a^T))^2 + i\bar{\psi}^T \partial_\mu \gamma_\mu \psi^T + j_i^T a_i^T + j_0^T \frac{1}{\nabla^2(a^T)} j_0^T. \tag{11}$$

(В приложении I мы получим выражение (10) методом Фаддеева-Попова /11/, справедливость которого для калибровок, зависящих от времени, была доказана в /12/).

Цель настоящей работы - получить аналогичное выражение для производящего функционала в теории с топологическим вырождением вакуума.

Обратим внимание на то, что решение классического уравнения связи (4), и, следовательно, определение физических переменных (5) допускает произвол /7/, который описывается решением однородного уравнения связи (4)

---

x) Аналогом таких калибровочно-инвариантных переменных в электродинамике являются поля в кулоновской калибровке /9/.

$$(\nabla_i^2(A)\Phi)^a = 0, \qquad \Phi^a \neq 0$$

$$\nabla^2 = \delta^{ab}\partial^2 + L^{ab}, \qquad L^{ab} = g\epsilon^{acb}[2A_i^c\partial^i + (\partial_i A_i^c)] + g^2[A_i^a A_i^b - \delta^{ab}A_i^c A_i^c]. \tag{12}$$

В этом случае решение (4) принимает вид

$$A_0^a = \Phi^a + a_0^a(A) + \left(\frac{1}{\nabla^2} j_0\right)^a. \tag{13}$$

Физические калибровочно-инвариантные переменные выберем в виде

$$(\Phi) \qquad \hat{A}_i^\Phi = v_{\Phi T}(\hat{a}_i^T + \partial_i)v_{\Phi T}^{-1}, \qquad v_{\Phi T} = g(\vec{x})\, T\exp\{\int^t dt' \hat{\Phi}^T\},$$

$$\psi^\Phi = v_{\Phi T}\psi^T, \tag{14}$$

где $\hat{\Phi}^T = v_{a_0}\hat{\Phi} v_{a_0}^{-1}$ подчиняется уравнению

$$\nabla^2_{(a^T)}\Phi^T = 0. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что в силу (15) переменные (Φ) (14) калибровочно-эквивалентны переменным (T) (5), т.е. удовлетворяют тому же уравнению

$$\nabla_i(A^\Phi)\partial_0 A_i^\Phi = 0. \tag{16}$$

Мы имеем здесь пример калибровочной неоднозначности /6/ в калибровке (8), (16). Уравнение (15) совпадает с уравнением Грибова для этой калибровки

$$\nabla_i^2(a^T) v_{\Phi T}^{-1}\partial_0 v_{\Phi T} = 0, \qquad (v_{\Phi T}^{-1}\partial_0 v_{\Phi T} \equiv \hat{\Phi}^T). \tag{17}$$

Это уравнение необходимо дополнить калибровочным условием, фиксирующим калибровку поля на границах временного интервала $\pm T/2$ (см. (9))

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt(\nabla_i^2 v_{\Phi T}^{-1}\partial_0 v_{\Phi T}) = 0. \tag{18}$$

Как мы уже отмечали во введении, существуют нетривиальные решения уравнений (17), (18) в низшем порядке теории возмущений по константе g, где $v_{\Phi T}$ можно представить в виде $\exp\hat{\lambda}$. Уравнения (17), (18) тогда принимают форму

$$\partial_i^2\partial_0\lambda^a=0,\qquad \partial_i^2\lambda^a_{(\pm)}(\vec x)=0,\qquad \left(\lambda^a_{(\pm)}(\vec x)=\lambda^a(\vec x,\pm T/2)\right)$$

и имеют решения

$$\hat\lambda_{(\pm)}(\vec x)=\frac{x^a\tau^a}{2iR}2\pi n_{(\pm)},\qquad \Phi_0^a=\partial_0\lambda^a(t,\vec x)=2\pi\dot N(t)\frac{x^a}{Rg},\qquad (I9)$$

удовлетворяющие граничным условиям $e^{\hat\lambda(R,\pm T/2)}=\pm 1$. Здесь $N(t)$ – функция, интерполирующая между различными вакуумами $N(\pm T/2)=n_{(\pm)}$ и играющая роль голдстоуновской моды топологического вырождения. Точное решение уравнения Грибова (I2), (I5),(I7) будем строить по теории возмущений.

$$\Phi^a=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\partial^2}L}\right)\Phi_0=\Phi_0^a-\frac{1}{\partial^2}L^{ab}_{(a^T)}\Phi^b+\dots,\qquad \left(\frac{1}{\partial^2}f(x)=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(y)d^3y}{|x-y|}\right).\qquad (20)$$

Поля A^Φ имеют ненулевой индекс Понтрягина

$$\nu=\frac{-g^2}{32\pi^2}\int_{-T/2}^{T/2}dt\int_\Omega d^3x\,tr\left(\hat F_{\mu\nu}\hat F_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\right)\neq 0,\qquad (2I)$$

который легко вычислить, пренебрегая на границе объема, как это принято делать в теории возмущения, полями a_i^T и ψ^T:

$$\nu=N^\Phi\left(t=+\frac T2\right)-N^\Phi\left(t=-\frac T2\right)=n_{(+)}-n_{(-)}\qquad (22)$$

$$N^\Phi=-\frac{1}{12\pi^2}\int_\Omega d^3x\,\epsilon_{ijk}\,tr\,\hat V_i^\Phi\hat V_j^\Phi\hat V_k^\Phi=N(t)-\frac{\sin N(t)\pi}{\pi},\qquad \hat V_i^\Phi=v_{\Phi T}\,\partial_i v_{\Phi T}^{-1}.\qquad (23)$$

2. Вакуумный сектор, "инстантонное" приближение

Рассмотрим в низшем приближении по g вакуумный сектор такой теории (I4)-(23). Поля A^Φ (I4) в этом приближении принимают вид

$$\hat A_i^\Phi=\hat V_i^N(\vec x,t)=v_0(\vec x/N(t))\,\partial_i v_0(\vec x/N(t))^{-1},\qquad (24)$$

$$v_0(\vec x/N(t))=\exp\left(\frac{\tau^a x^a}{2iR}2\pi N(t)\right).\qquad (25)$$

Действие на этих полях равно выражению

$$S_{кл}(\nu)=\int_{-T/2}^{T/2}dt\int_\Omega d^3x\,\frac12(\partial_0 V_i^a)^2=\int_{-T/2}^{T/2}dt\,\frac{\dot N^2}{2}I^\Phi,\qquad \left(I^\Phi=\frac{16\pi^3}{g^2}R\right)\qquad (26)$$

и приводит к следующему решению уравнения движения для $N(t)$ с граничными условиями $N(\pm T/2)=n_{(\pm)}$

$$N(t)=(n_+-n_-)\frac tT+\frac12(n_++n_-).\qquad (27)$$

Поле (24), (27) является действительным классическим решением неабелевых уравнений, которое играет роль инстантона, интерполирующего между классическими вакуумами с действием

$$S_{кл.}(\nu/T,R)=I^\Phi\frac{\nu^2}{2T}\equiv\left(\frac{8\pi^2}{g^2}\right)\nu\left[\frac{2\pi R\nu}{T}\right].$$

Это действие конечно как в пространстве Минковского, так и в пространстве Евклида (при $R\sim T\to\infty$).

Найдем энергию θ-вакуума вычислением амплитуды перехода в квазиклассическом приближении /I3/

$$e^{-\varepsilon_0\tau}\simeq\lim_{-iT=\tau\to\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{i\nu\theta}\exp\{iS_{кл.}(\nu/T,R)\}.$$

Эту сумму по гомотопическим классам можно записать в виде спектрального представления

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\exp\left\{-i\frac{(2\pi\ell+\theta)^2}{2I^\Phi}T\right\}\simeq e^{-\frac{\theta^2}{2I^\Phi}\tau}+\dots,\qquad (28)$$

используя различные представления θ – функции Якоби /I4/. Из формулы (28) видно, что квазиклассическое приближение приводит к целому энергетическому спектру

$$\mathcal E_\theta(\ell)=\frac{(2\pi\ell+\theta)^2}{2I^\Phi}.$$

Этот же спектр возникает из точного квантования системы, описываемой действием (26) и удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$\delta S/\delta\dot N=\mathcal K,\qquad [\mathcal K,N]=i,\qquad H_N=\frac{\mathcal K^2}{2I^\Phi},\qquad H_N\psi=\mathcal E_\theta(\ell)\psi,$$

если спектр импульса $\mathcal K$ определять из условия физической эквивалентности точек N и $N+1$

$$\psi(N+1)=e^{i\theta}\psi(N),\qquad \mathcal K\psi=(2\pi\ell+\theta)\psi.\qquad (29)$$

Такая эквивалентность имеет место из-за топологического вырождения вакуума. (В формулах (29) возник θ-параметр, характеризующий представления группы гомотопии Z, который универсален для всех состояний ℓ – номер зоны Бриллюэна). Собственные состояния оператора положения N также характеризуются параметром θ

$$\hat{N}|N\rangle_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}(N+n)|N+n\rangle. \tag{30}$$

Существование реальных интерполирующих классических полей (24) противоречит предположению о потенциальном барьере между топологическими вакуумами, которое лежит в основе инстантонного подхода. Вместо "барьера" имеется "гора" с реальными путями вокруг нее. Их учет ведет к эффектам, которые не подавлены экспоненциальным фактором. Обсуждению этих эффектов посвящен следующий раздел.

3. Квантование в терминах топологических переменных

Построим производящий функционал функций Грина.

Из свойств θ-состояний (30) следует, что переменная A^Φ содержит большое слагаемое

$$\hat{A}_i^\Phi = \hat{a}_i^\Phi + \hat{V}_i^\Phi, \qquad V_i^\Phi = v_{\Phi T}\partial_i v_{\Phi T}^{-1}, \tag{31}$$

и классически-эквивалентные поля $(\psi^\Phi$ и $\psi^T)$, $(a_i^\Phi$ и $a_i^T)$

$$\psi^\Phi = v_{\Phi T}\psi^T, \qquad \hat{a}_i^\Phi = v_{\Phi T}\hat{a}_i^T v_{\Phi T}^{-1} \tag{32}$$

на θ-состояниях отличаются суперпозицией фазовых множителей.

В приложении II получен лагранжиан в терминах переменных (31), (32). Если пренебречь поверхностными членами, зависящими от "малых" полей (32), то окончательный результат будет иметь простой и наглядный вид

$$L^\Phi = \frac{\dot{N}^2}{2}I^\Phi + \int_\Omega d^3x\,\mathcal{L}(a_i^\Phi, \nabla_\mu(V^\Phi)a_i^\Phi; \psi^\Phi; \nabla_\mu(V^\Phi)\psi^\Phi), \tag{33}$$

где $\mathcal{L}^\Phi$ совпадает с лагранжианом $\mathcal{L}^{(T)}$ (II) с точностью до замены полей a_i^T и ψ^T и их производных $\partial_\mu a_i^T$, $\partial_\mu\psi^T$ на поля a_i^a, ψ^Φ и их ковариантные производные $\nabla_\mu(V^\Phi)a_i^\Phi$, $\nabla_\mu(V^\Phi)\psi^\Phi$ в вакуумном поле

$$V_\mu^\Phi = v_{\Phi T}\partial_\mu v_{\Phi T}^{-1}. \tag{34}$$

Лагранжиан $\mathcal{L}^\Phi$ сводится к лагранжиану $\mathcal{L}^T$ (II) с помощью замены переменных (32).

Производящий функционал функций Грина в конечном объеме пространства Ω для системы (33) имеет два существенных отличия от выражения Фаддеева-Попова (I0):

Первое связано с определением канонического импульса топологической голдстоуновской переменной. Топологический импульс $\mathcal{K}$ является сохраняющейся величиной, которая характеризует физический вакуум. Минимальное значение этой величины равно θ (см. раздел 3). В теории (33) этот импульс приобретает слагаемое от взаимодействия вакуумного поля (34) с цветными токами

$$\mathcal{K} = \frac{\delta L^\Phi}{\delta \dot{N}} = \dot{N}I^\Phi + \xi, \tag{35}$$

$$\xi = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}^\Phi}{\partial V_\mu^\Phi}\frac{\partial V_\mu^\Phi}{\partial \dot{N}} = \frac{2\pi}{R}\int d^3x\,(x^a j_0^a(x)) + O(g), \tag{36}$$

$$j_0^a = g[\bar{\psi}\gamma_0\frac{T^a}{2}\psi + \epsilon^{abc}(\partial_0 a_i^b)a_i^c],$$

где j_0^a есть временная компонента полного цветного тока кварков и глюонов. В результате гамильтониан теории (Φ) (I4), в отличие от теории (T) (5), имеет дополнительное низкоэнергетическое взаимодействие

$$\Delta H_\theta = \frac{(\mathcal{K}-\xi)^2}{2I^\Phi} = \frac{(\theta-\xi)^2}{2I^\Phi}. \tag{37}$$

Это взаимодействие CP-неинвариантно (с параметром нарушения CP-симметрии – θ) перенормируемо и исчезает в пределе бесконечного объема $R\to\infty$. (В модели Швингера аналогичное низкоэнергетическое взаимодействие в пределе бесконечного объема совпадает с гамильтонианом Коулмена /8,I5/).

Для бесцветных функций Грина, типа корреляторов электромагнитных токов

$${}_\theta\langle j_\mu^{\text{эл}}(x), j_\nu^{\text{эл}}(y)\rangle_\theta, \qquad j_\mu^{\text{эл}}(x) = \bar{\psi}^\Phi(x)\Gamma_\mu^{\text{эл}}\psi^\Phi(x) \equiv \bar{\psi}^T(x)\Gamma_\mu^{\text{эл}}\psi^T(x)$$

(где $\Gamma_\mu^{\text{эл}}$ –скаляр относительно цветной группы) квантование теории (33) – (37) не вызывает трудностей. В этом случае после замены переменных (32) получим производящий функционал (I0), в котором лагранжиан L^T заменен на лагранжиан

$$L_\theta = L^T + \Delta H_\theta, \qquad S_\theta = \int dt\, L_\theta \tag{38}$$

$$Z_\theta(\text{безц. ист.}) = \int \mathcal{D}a_i^T \mathcal{D}\psi^T \mathcal{D}\bar{\psi}^T \delta(\nabla_i(a^T)\partial_0 a_i^T)\cdot(\det \nabla_i^2(a^T))^{1/2} \exp\{iS_\theta + \text{безц. источ.}\}$$

Выражение (38) в пределе $R\to\infty$ совпадает с выражением (I0).

Второе отличие возникает при вычислении функций Грина цветных полей. Рассмотрим для иллюстрации асимптотическую функцию Грина кварков $(g \to 0)$. Для простоты положим $\theta=0, f=0$. Производящий функционал для функций Грина кварков выражается через

$$Z^{(0)}_{\theta=0}(\eta,\bar{\eta}) = \langle 0|T\exp\{-i\int_{-T/2}^{T/2} dt H\}|0\rangle_{\theta=0} \tag{39}$$

$$H = \frac{\mathcal{K}^2}{2I^\Phi} + \int d^3x [\bar{\psi}^\Phi \nabla_i (V^N)\psi^\Phi + \bar{\eta}\psi^\Phi + \bar{\psi}^\Phi \eta],$$

где вакуумное поле V^N определено формулой (24) и явно зависит от переменной N : $[\mathcal{K},N]=i$. T - упорядочивание в (39) по фермионным полям ведет к выражению

$$Z_{(\theta=0)}(\eta,\bar{\eta}) = \langle 0|T\exp\{-i\int_{-T/2}^{T/2} dt \frac{\mathcal{K}^2}{2I^\Phi} + \int_{-T/2}^{T/2} dx_0 \int_{-T/2}^{T/2} dy_0\, \bar{\eta}_N(x,x_0) G(x_\mu - y_\mu)\eta_N(y,y_0)\}|0\rangle_{\theta=0}$$

$$\left(\bar{\eta}_N(x,x_0) = v(x/N(x_0))\eta(x,x_0),\ \eta_N(y,y_0) = v(y/N(y_0))\eta(y,y_0)\right).$$

Здесь $G(x_\mu - y_\mu)$ - "свободная" функция Грина.

θ- функция Грина для кварков

$$G_{\theta=0}(x_\mu - y_\mu) = \frac{\delta Z_{\theta=0}(\eta,\bar{\eta})}{\delta\bar{\eta}(x_\mu)\,\delta\eta(y_\mu)}\Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

вычисляется точно с помощью полного набора собственных состояний гамильтониана

$$H = \frac{\mathcal{K}^2}{2I^\Phi}, \qquad \mathcal{K}|l\rangle_{\theta=0} = 2\pi l|l\rangle_{\theta=0}$$

$$G_{\theta=0}(x,y) = G_0(x_\mu - y_\mu)\langle 0|e^{-iH_0(-\frac{T}{2}+x_0)} v_c(\vec{x}/N(x_0)) e^{-iH_0(y_0-x_0)} v_0(\vec{y}/N(y_0)) e^{-iH_0(\frac{T}{2}-y_0)}|0\rangle$$

$$= G(x_\mu - y_\mu)\sum_{l=0}^{\infty}\langle 0|v_0(\vec{x}/N)|l\rangle\langle l|v_0(\vec{y}/N)|0\rangle\, e^{i\frac{(2\pi l)^2}{I^\Phi}(x_0-y_0)}, \tag{40}$$

где

$$\langle 0|v(\vec{x}/N)|l\rangle = \int_0^1 dN e^{i2\pi l N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(\vec{x}/N+n) = \int_{-\infty}^{\infty} dN e^{i2\pi l N} v(\vec{x}/N).$$

Последнее выражение пропорционально δ - функции

$$\delta\left(\frac{r}{R} - l\right) = R\delta(r - lR), \quad r = |x|, \quad l = 0,1,2,\ldots$$

Поскольку мы работаем в конечном объеме (в классе функций,исчезающих при $r \geqslant R$), то в сумме (40) остается лишь одно слагаемое $\sim R\delta(r)$, которое соответствует суперпозиции фазовых факторов $v_0(\vec{x}/n)$, отвечающих всем вырожденным состояниям классического вакуума

$$\langle 0|v(\vec{x}/N)|l\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(\vec{x}/n) = R\delta(r), \tag{41}$$

в результате для θ-функции Грина получим выражение:

$$G_{\theta=0}(x_\mu, y_\mu) = R^2\delta(|\vec{x}|)\delta(|\vec{y}|)G(x_\mu - y_\mu), \tag{42}$$

которое имеет дополнительные факторы. Эти факторы не исчезают в пределе $R \to \infty$ и ответственны за конфайнмент цвета. Пропагатор (42) в импульсном представлении равен нулю.

Обобщение этих результатов на цветные группы $SU(N)$ связано с минимальным вложением группы $SU(2)$ в $SU(N)$, т.е. таким, когда фундаментальное представление $SU(N)$ остается неприводимым представлением относительно преобразований подгруппы $SU(2)$. В частности, три генератора $\lambda^{\bar{a}}$ ($\bar{a}$ = 1,2,3) в фундаментальном представлении $SU(N)$ можно выбрать так, чтобы они совпадали с тремя матрицами представления $SU(2)$ той же размерности $N=2l+1$. Для $SU(3)$ это будут матрицы $\lambda^{\bar{1}}=\lambda^3$, $\lambda^{\bar{2}}=\lambda^5$, $\lambda^{\bar{3}}=\lambda^7$.

4. Обсуждение результатов

Исходным для настоящей работы является эффект топологического вырождения поперечного неабелевого вакуума в пространстве конечного объема. (Напомним, что в "инстантонном" подходе топологические свойства неабелевых полей определяются исключительно предположением о конечности евклидова действия, хотя пространство - время также ограничиваются при вычислении физических величин типа энергии θ - вакуума).

Для конечного временного интервала $(|t| \leqslant T/2)$ мы нашли классические действительные поля с ненулевым индексом Понтрягина, описывающие интерполяцию между вырожденными вакуумами. Действие для таких полей остается конечным в пределе $R \sim T \to \infty$,а энергия θ -вакуума исчезает $\mathcal{E}_\theta \sim O(1/R)$.

Сформулирована квантовая теория возмущений с топологически вырожденным вакуумом, которую мы в дальнейшем будем называть $KXД(T)$.

Показано, что бесцветный сектор производящего функционала для функций Грина КХД (T) в пределе бесконечного объема совпадает с функциональным интегралом Фаддеева-Попова.

В цветном секторе КХД (T) асимптотические состояния кварков и глюонов содержат суперпозицию бесконечного числа калибровочных факторов (41), интерференция которых приводит к исчезновению цветных функций Грина для пространства любого объема, в том числе бесконечного. Этот чисто квантовый эффект можно интерпретировать как "конфайнмент" цвета.

Для конечного объема пространства КХД (T) отличается от КХД взаимодействием (37), которое нарушает киральную $U(1)$ симметрию и CP-неинвариантно:

$$ {}_{\theta}\left\langle \frac{\partial}{\partial t} Q_5 \right\rangle_{\theta} = {}_{\theta}\langle \dot{N} \rangle_{\theta} = \frac{\alpha_s}{2\pi R}\left(\frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{R}\int d^3x\,(x^a \dot{j}_0^a)\right). $$

(Здесь Q_5 - аксиальный $U(1)$ заряд, θ - параметр CP-нарушения, $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$). По-видимому, имеет смысл его учитывать в модели КХД - мешков, где оно ведет к осцилляторноподобному потенциалу между кварками и динамическими массами кварков (ψ) и глюонов (a_i^u), исчезающих в пределе больших импульсов.

В заключение авторы хотели бы поблагодарить Б.М. Барбашова, А.В. Ефремова, Г.А. Зиновьева, М.М. Мусаханова, В.Б.Приезжева, Я.А.Смородинского за плодотворные дискуссии. Один из авторов (В.П.) благодарен С.П.Новикову за обсуждение топологических аспектов неабелевой теории.

Приложение I

Воспроизведем результаты работы /I0/ с помощью рецепта Фаддеева - Попова (Ф-П), используя тот факт, что теория (5) классически эквивалентна теории в калибровке

$$ \nabla_i(A)\partial_0 A_i = 0. \qquad (\text{П.I}) $$

Согласно методу Ф-П, производящий функционал для функций Грина в калибровке (П.I) имеет вид

$$ Z(\text{источ.}) = \int \Pi\, \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\, \Delta(A)\left\{\delta(\nabla_i(A)\partial_0 A_i)\, e^{iS + (\text{источ})}\right\}, \qquad (\text{П.2}) $$

где величина $\Delta(A_i)$ определяется соотношением

$$ \Delta\int du(x)\,\delta(\nabla_i(A_i^u)\partial_0 A_i^u) = 1, \quad \hat{A}_i^u = u(\hat{A}_i + \partial_i)u^{-1}. $$

Используя трасформационные свойства

$$ \partial_0 \hat{A}_i^u = u[\partial_0 \hat{A}_i + \nabla_i(A)\cdot(\partial_0 u^{-1})u]u^{-1}, $$

$$ \nabla_i(A^u)\partial_0 \hat{A}_i^u = [\nabla_i(A)\partial_0 \hat{A}_i + \nabla^2(\partial_0 u^{-1}u)]u^{-1} $$

для детерминанта Ф - П, получим выражение

$$ \Delta = (\mathrm{Det}\,\nabla_i^2). $$

Интегрируя в функциональном интеграле (П.2) по A_0, окончательно получим результат работы /I0/

$$ Z^{(T)} = \int \mathcal{D}A_i \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\,(\mathrm{Det}\,\nabla_i^2)^{1/2}\,\delta(\nabla_i(A)\partial_0 A_i)\, \exp\left(i\int d^4x\, \mathcal{L}^T(A) + \text{источ.}\right). $$

(В работе /I0/ представлена также и другая форма функционального интеграла, удобная для применения методов теории возмущений).

Приложение II

Определим лагранжиан (3) на решениях (I3)

$$ L = \int d^3x\,\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + A_\mu)\psi \Big/_{A_0 = a_0(A) + \Phi + \nabla^{-2}(A)j_0} \qquad (\text{П.3}) $$

в терминах физических переменных (I4). Рассмотрим вначале поперечные переменные (5), (I5)

$$ \left.\begin{aligned} \hat{a}_i^T &= v_{a_0}(\hat{A}_i + \partial_i)v_{a_0}^{-1} \\ \psi^T &= v_{a_0}\psi, \quad \hat{\Phi}^T = v_{a_0}\hat{\Phi}\, v_{a_0}^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \partial_0 v_{a_0} &= v_{a_0}\hat{a}_0 \\ \nabla_i(a^T) &= \nabla^T. \end{aligned} $$

Лагранжиан (П.3) в этих переменных принимает вид

$$ \mathcal{L}^T = \frac{1}{2}(\partial_0 a_i^T - \nabla_i^T \Phi^T)^2 + i\bar{\psi}^T\gamma_\mu\partial_\mu\psi^T + \frac{1}{2}j_0^T\frac{1}{\nabla^{T2}}j_0^T + j_i^T a_i^T + [\Phi^T j_0^T + (\nabla_i^T\Phi^T)(\nabla_i^T\frac{1}{\nabla^{T2}}j_0^T)]. \qquad (\text{П.4}) $$

Легко проверить, что лагранжиан (П.4) локально зависит от поля Φ, $\delta L/\delta\Phi^T = 0$ в силу условий поперечности $\nabla_i^T\partial_0 a_i^T = 0$, $\nabla_i^{T2}\Phi = 0$. Последнее слагаемое в (П.4) (в квадратных скобках) является полной производной, с точностью до которой имеет место равенство

$$ (\nabla_i^T\Phi^T)\cdot\nabla_i^T\frac{1}{\nabla^{T2}}j_0^T = -j_0^T\Phi^T. \qquad (\text{П.5}) $$

Перейдем к физическим переменным

$$A_i^{\Phi} = v_{\Phi T}(a_i^T + \partial_i)v_{\Phi T}^{-1}$$
$$\psi^{\Phi} = v_{\Phi T}\psi^T, \quad V_0^{\Phi} \equiv v_{\Phi T}\partial_0 v_{\Phi T}^{-1} = -v_{\Phi T}\Phi v_{\Phi T}^{-1}$$
$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \quad \partial_0 v_{\Phi T} = v_{\Phi T}\Phi^T, \quad \nabla_i(A^{\Phi}) \equiv \nabla_i^{\Phi}. \qquad (\text{П.6})$$

Лагранжиан (П.4) в терминах (П.6) принимает тот же самый вид, что и лагранжиан $\mathcal{L}^T$ (П.4) с точностью до слагаемого (П.5)

$$\mathcal{L}^{\Phi} = \frac{1}{2}[(\partial_0 A_i^{\Phi})^2 - B^2(A^{\Phi})] + \frac{1}{2}j_0^{\Phi}\frac{1}{\nabla^2}j_0^{\Phi} + i\bar{\psi}^{\Phi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - j_i^{\Phi}A_i + j_0^{\Phi}V_0^{\Phi}.$$

Здесь поле A_i^{Φ} удовлетворяет условию

$$\nabla_i^{\Phi}\partial_0 A_i^{\Phi} = 0,$$

а V_0^{Φ} – уравнению

$$\nabla^{\Phi 2}V_0^{\Phi} = 0. \qquad (\text{П.7})$$

Разделим поле A_i^{Φ} на малую и большую переменные

$$A_i^{\Phi} = a_i^{\Phi} + V_i^{\Phi}, \quad V_i^{\Phi} = v_{\Phi T}\partial_i v_{\Phi T}^{-1}.$$

Представим "электрическое" поле

$$\partial_0 A_i^{\Phi} = \partial_0 a_i^{\Phi} + \partial_0 V_i^{\Phi}$$

в виде суммы ковариантных производных:

$$\partial_0 \hat{A}_i^{\Phi} = [\nabla_0(V)a_i^{\Phi} + \nabla_i^{\Phi}V_0], \qquad (\nabla^{\Phi} \equiv \nabla(A^{\Phi})).$$

(Мы добавили и вычли здесь слагаемые $[V_0, a_i^{\Phi}]$ и учли определение ковариантной производной $\nabla_0(V)a_i^{\Phi} = \partial_0 a_i + [V_0, a_i^{\Phi}]$, а также тот факт, что чисто калибровочное поле $V_\mu^{\Phi} = v_{\Phi T}\partial_\mu v_{\Phi T}^{-1}$ удовлетворяет уравнению $F_{0i} = 0 \Rightarrow \partial_0 V_i^{\Phi} = \nabla_i(V^{\Phi})V_0^{\Phi})$. При вычислении мы будем учитывать и то, что

$$-\int d^3x\, tr(\nabla_i(V^{\Phi})\hat{V}_0^{\Phi})^2 \equiv -\int d^3x\, tr(\nabla_i(A)\hat{\Phi}) \equiv -\int d^3x\, tr(\partial_i(\hat{\Phi}\partial_i\hat{\Phi}) = \frac{\dot{N}^2}{2}I_{g^2}^{\Phi} +$$
+ поверх. члены.

В результате с точностью до поверхностных членов, зависящих от ψ^{Φ} и a_i^{Φ}, мы получим лагранжиан в терминах полей a_i^{Φ}, ψ^{Φ} и V^{Φ}

$$L = L_{\Phi} + \Delta L_N, \quad \Delta L_N = \frac{1}{2}\int d^3x(\nabla^{\Phi}V_0)^2 = \frac{\dot{N}^2}{2}I^{\Phi} \qquad (\text{П.8})$$

$$L_{\Phi} = \int d^3x\,\mathcal{L}_{\Phi}, \quad \mathcal{L}_{\Phi} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^{\Phi}(a^{\Phi}))^2 + \bar{\psi}^{\Phi}\gamma_\mu\nabla_\mu(V^{\Phi})\psi^{\Phi} + j_0^{\Phi}\frac{1}{\nabla^{\Phi 2}}j_0^{\Phi} - j_i^{\Phi}a_i^{\Phi} \qquad (\text{П.9})$$

$$F_{\mu\nu}^{\Phi}(a^{\Phi}) = \nabla_\mu(V)\hat{a}_\nu^{\Phi} - \nabla_\nu(V)\hat{a}_\mu^{\Phi} + [a_\mu^{\Phi}, a_\nu^{\Phi}], \qquad (\text{П.10})$$
$$(\nabla_\mu(V)\hat{a} = \partial_\mu\hat{a} + [V_\mu, a]).$$

Поля V^{Φ} и a_i^{Φ} удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

$$\nabla_i(a^{\Phi} + V^{\Phi})\nabla_0(V^{\Phi})a_i^{\Phi} = 0, \qquad (\text{П.11})$$

$$[\nabla_i(V^{\Phi} + a^{\Phi})]^2 V_0^{\Phi} = 0, \quad \hat{F}_{\mu\nu}(V) = 0. \qquad (\text{П.12})$$

Выражения (П.8) – (П.12) полностью определяют систему в терминах физических переменных V_μ^0, a_i^{Φ}, ψ^{Φ}.

Литература

1. Belavin A. et al., Phys. Lett., 1975, 59B, 85.
2. Callan C.G., Jr et al Phys. Rev., 1979, D19, p. 1826; Ibid 1978, D17, p. 2717.
3. Первушин В.Н. ЭЧАЯ, 1984, том 15, вып. 5.
4. Фаддеев Л.Д. Материалы IУ Межд. сов. по нелок. теор. поля 1976, ОИЯИ, Д1-9788, Дубна, 1977, с. 267.
5. Боголюбов Н.Н. Препринт Д-781 ОИЯИ, Дубна, 1961; Боголюбов Н.Н. Избранные труды по стат. физике. Изд-во МГУ, 1979.
6. Gribov V.N. Nucl. Phys., 1978, v. B139, p. 1.
7. Первушин В.Н. ТМФ, 1980, т. 45, № 3, стр. 394.
8. Илиева Н.П., Первушин В.Н. ЯФ, 1984, т. 39, В4, стр. 1011.
9. Полубаринов И.В. Препринт ОИЯИ, Р221, Дубна, 1965. Азимов Р.И., Первушин В.Н. Препринт ОИЯИ, Р2-84-63, Дубна, 1984.
10. Friedman J. and Papastamation N.Nucl.Phys.1983, B219, p. 125.
11. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", М., 1978.
12. Barbashov B.M., Chervyakov A.M., Nesterenko V.V. Preprint JINR E2-84-521, Dubna, 1984.
13. Polyakov A.M. Nucl. Phys. B, 1976, v. 120, p. 429.
14. Polland B.R. An Introduction to Algebraic Topology, Lecture notes, 1976-1977. Univ. Briston, 1977.
15. Coleman S. Ann. Phys. (N.Y.), 1976, 101, 239,; 1975, 93, p. 267.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 сентября 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник *"Краткие сообщения ОИЯИ"*. В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condenced matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.

Первушин В.Н., Азимов Р.И. P2-84-649

О топологическом конфайнменте цвета

Обсуждается эффект спонтанного топологического вырождения вакуума для калибровочных полей, находящихся в пространстве конечного объема. Сформулирована квантовая теория неабелевых полей с таким вырождением. Показано, что бесцветный сектор производящего функционала функций Грина для теории в пределе бесконечного объема совпадает с функциональным интегралом Фаддеева-Попова, а функции Грина цветных полей исчезают вследствие квантового интерференционного эффекта, типа эффекта Бома-Ааронова. Для конечного объема в теории возникают дополнительные низкоэнергетические взаимодействия, которые нарушают киральную U(1) -симметрию и CP-симметрию.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Pervushin V.N., Azimov R.I. P2-84-649

On Topological Color Confinement

The non-Abelian fields are considered in a finite-volume space $|x| \leq R$. The paper is based on the fact that the Laplace equation for the gauge phase $\partial_i^2 \lambda^a(x) = 0$ (unlike the electrodynamics) has the nontrivial solutions $\lambda^a(x) = 2\pi n x^a/Rg$, $n = \pm(0, 1, 2..)$ with the boundary condition on the SU(2) group element $\exp(g\lambda^a(R)\tau^a/2i) = \pm 1$. The solution is characterized by the topological index (n). The color particle state amplitude in this vacuum is equal to zero due to the interference of the infinite number of the vacuum phase factor. The perturbation theory for the non-Abelian fields with the topological vacuum degeneration ($QCD_{(t)}$ or't QCD) is discussed. For the finite volume $QCD_{(t)}$ differs from QCD by the additional low-energy interaction, that leads to U(1) -chiral and CP-symmetries breaking and to the oscillator-like potential between quarks. In the infinite-volume limit the gauge invariant sector of $QCD_{(t)}$ coincides with the usual QCD.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984