сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-84-591

В.Л.Любошиц

ОДНОКАНАЛЬНЫЙ РАСПАД ПРИ КРАТНОМ ВЫРОЖДЕНИИ НЕСТАБИЛЬНЫХ УРОВНЕЙ

1984

1. В настоящей работе исследуются законы одноканального распада нестабильной системы при произвольном числе перекрывающихся /кратных/ уровней.

Как известно, в основе теории нестабильных частиц лежит представление о квазистационарных состояниях с комплексными энергиями /массами/, которые распадаются по экспоненциальному закону. С точки зрения общей теории радиационного затухания понятие квазистационарного состояния соответствует известному приближению Вайскопфа-Вигнера /1-3/. Квазистационарные состояния ассоциируются также с полюсами амплитуд реакций при комплексных значениях эффективной массы продуктов распада /4/.

Квантово-механическое состояние системы N перекрывающихся уровней с общими каналами распада задается вектором $|\psi\rangle$ в N-мерном линейном пространстве. Зависимость произвольного вектора состояния от времени имеет структуру

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{f=1}^{N} b_f |\psi_f\rangle e^{-(i\mathcal{E}_f + \frac{1}{2}\Gamma_f)t/\hbar}, \qquad /1/$$

где $|\psi_f\rangle$ - квазистационарные состояния с энергиями $\mathcal{E}_f$ и ширинами $\Gamma_f > 0$, b_f - коэффициенты разложения начального состояния $|\psi(0)\rangle$ по квазистационарным состояниям.

Из анализа распада суперпозиций нестабильных состояний, учитывающего требование унитарности /сохранения вероятности/, следует, что квазистационарные состояния, имеющие общие каналы распада, у которых разность энергий меньше или сравнима с ширинами, вообще говоря, неортогональны. Они обязательно неортогональны, если соответствующие им квантовые числа, сохраняющиеся в процессах распада /угловые моменты, четности/, одинаковы. Скалярное произведение каждой пары векторов, или степень неортогональности, определяется суммой произведений амплитуд распада по общим каналам:

$$U_{\ell f} = \langle\psi_\ell|\psi_f\rangle = (\sum_n A^*_{n\ell} A_{nf})\left(\frac{1}{2}(\Gamma_f + \Gamma_\ell) + i(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_\ell)\right)^{-1}. \qquad /2/$$

Здесь A_{nf} - амплитуда распада, описывающая переход из состояния $|\psi_f\rangle$ в конечное состояние $|n\rangle$; символ $\sum_n$ включает не только суммирование по внутренним квантовым числам, но и интегрирование по непрерывным переменным /энергиям и углам вылета конечных частиц/. Соотношение /2/ было первоначально получено Беллом и Штейнбергером[5] для долгоживущего и короткоживущего состояний нейтральных K-мезонов. В дальнейшем в ряде работ было показано, что этот результат имеет общий характер и является прямым следствием унитарного описания системы интерферирующих перекрывающихся уровней[6-9]. В пределе кратного вырождения нестабильных уровней, который соответствует кратным полюсам S-матрицы, степень неортогональности квазистационарных состояний стремится к единице.

Временную эволюцию вектора состояния многоуровневой нестабильной системы можно описывать с помощью уравнения Шредингера с эффективным неэрмитовым гамильтонианом[9]:

$$-i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle . \qquad /3/$$

При этом квазистационарные состояния представляют собой собственные состояния матрицы $\hat{H}$ с комплексными собственными значениями:

$$\hat{H} |\psi_f\rangle = (\mathcal{E}_f - \frac{i}{2}\Gamma_f) |\psi_f\rangle . \qquad /3'/$$

Ясно, что матрицу $\hat{H}$ можно представить в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}, \ \hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{H} + \hat{H}^+), \ \hat{\Gamma} = i(\hat{H} - \hat{H}^+), \qquad /4/$$

где $\hat{H}_0$ и $\hat{\Gamma}$ - эрмитовы матрицы со следами

$$\mathrm{Sp}\,\hat{H}_0 = \sum_{f=1}^{N} \mathcal{E}_f, \ \mathrm{Sp}\,\hat{\Gamma} = \sum_{f=1}^{N} \Gamma_f . \qquad /5/$$

В силу унитарности распадная матрица $\hat{\Gamma}$ должна быть неотрицательной, ее элементы в любом представлении выражаются через амплитуды распада соответствующих состояний[9]: $\langle\psi_\alpha|\hat{\Gamma}|\psi_\beta\rangle = \sum_n A^*_{n\alpha} A_{n\beta}$. Последнее соотношение с учетом /3'/ и /4/ эквивалентно результату Белла-Штейнбергера /2/.

2. В одноканальном случае модуль скалярного произведения векторов квазистационарных состояний описывается выражением

$$|\langle\psi_\ell|\psi_f\rangle| = \left[\frac{\Gamma_f \Gamma_\ell}{(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_\ell)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_f + \Gamma_\ell)^2}\right]^{1/2} . \qquad /6/$$

При этом распадная матрица факторизуется:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = A^*_\alpha A_\beta . \qquad /7/$$

Ясно, что в диагональном представлении у матрицы $\hat{\Gamma}$ с элементами /7/ лишь один элемент Γ_{11} отличен от нуля, а остальные равны

нулю. Легко видеть, что

$$\Gamma_{11} = \mathrm{Sp}\,\hat{\Gamma} = \sum_{f=1}^{N} \Gamma_f . \qquad /8/$$

Таким образом, среди собственных состояний распадной матрицы $\hat{\Gamma}$ имеется только одно состояние $|\phi_1\rangle$, которое распадается сразу же в начальный момент времени $t = 0$. Остальные /N -1/ состояний, ортогональных $|\phi_1\rangle$ и друг другу, стабильны при $t = 0$. Собственные состояния $|\phi_k\rangle$ матрицы $\hat{\Gamma}$ /$k = 1,2,\ldots N$/ не являются квазистационарными и с течением времени переходят друг в друга. Распад в рассматриваемом случае проходит только через состояние $|\phi_1\rangle$. Поэтому амплитуды распада состояний $|\phi_k\rangle$, зависящие от времени, имеют вид

$$A_k(t) = (\sum_{f=1}^{N} \Gamma_f)^{1/2} \langle\phi_1|\phi_k(t)\rangle , \qquad /9/$$

где

$$|\phi_k(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\phi_k\rangle . \qquad /10/$$

Исходя из /3/ и /4/, находим

$$\hbar \frac{d}{dt} \langle\phi_k(t)|\phi_\ell(t)\rangle = -i\langle\phi_k(t)|(\hat{H} - \hat{H}^+)|\phi_\ell(t)\rangle , \qquad /11/$$

или

$$\hbar \frac{d}{dt} \langle\phi_k(t)|\phi_\ell(t)\rangle = -\langle\phi_k(t)|\hat{\Gamma}|\phi_\ell(t)\rangle = $$
$$= -(\sum_{f=1}^{N} \Gamma_f) \langle\phi_1|\phi_\ell(t)\rangle \langle\phi_1|\phi_k(t)\rangle^* = -A^*_k(t) A_\ell(t), \qquad /12/$$

где $A_k(t)$ определяется согласно /9/. Интегрируя левую и правую части по времени, получаем соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty A^*_k(t) A_\ell(t)\, dt = \hbar \delta_{k\ell} . \qquad /13/$$

В частности,

$$\int_0^\infty |\langle\phi_1|\phi_k(t)\rangle|^2 dt = (\sum_{f=1}^{N} \Gamma_f)^{-1} \int_0^\infty |A_k(t)|^2 dt = \hbar / \sum_{f=1}^{N} \Gamma_f . \qquad /14/$$

Введем компоненты Фурье

$$A_k(E) = \frac{1}{\hbar} \int_0^\infty A_k(t)\, e^{i\frac{Et}{\hbar}}\, dt . \qquad /15/$$

С учетом /13/ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_k^*(E) A_\ell(E) dE = 2\pi\delta_{\ell k}. \qquad /16/$$

3. Ниже мы найдем явный вид амплитуды $A_1(t)$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ с помощью δ-образного пакета частиц, образующихся при распаде, возбуждается состояние $|\phi_1\rangle$. Согласно /1/ с течением времени это состояние переходит в суперпозицию квазистационарных состояний

$$|\phi_1(t)\rangle = \sum_{f=1}^{N} b_{1f}\,|\psi_f\rangle\, e^{-i(\mathcal{E}_f - \frac{i}{2}\Gamma_f)t/\hbar}. \qquad /17/$$

В ортогональном базисе $|\phi_k\rangle$ квазистационарные состояния имеют вид

$$|\psi_f\rangle = \sum_{k=1}^{N} L_{kf}\,|\phi_k\rangle, \qquad /18/$$

где $L_{kf} = \langle\phi_k|\psi_f\rangle$. При этом амплитуды распада квазистационарных состояний пропорциональны $L_{1f} = \langle\phi_1|\psi_f\rangle$:

$$A_f = \left(\sum_{f=1}^{N}\Gamma_f\right)^{1/2} L_{1f}. \qquad /19/$$

Легко видеть, что амплитуды b_{1f} в формуле /17/ представляют собой элементы матрицы, обратной $\hat{L}$:

$$b_{1f} = (\hat{L}^{-1})_{f1}. \qquad /20/$$

Отсюда амплитуда распада

$$A_1(t) = \left(\sum_{\ell=1}^{N}\Gamma_\ell\right)^{1/2}\sum_{f=1}^{N}(\hat{L}^{-1})_{f1}\, L_{1f}\, e^{-(i\mathcal{E}_f + \frac{\Gamma_f}{2})t/\hbar}, \qquad /21/$$

причем компонента Фурье имеет вид /см. формулу /15//:

$$A_1(E) = \left(\sum_{\ell=1}^{N}\Gamma_\ell\right)^{1/2}\sum_{f=1}^{N}\frac{(\hat{L}^{-1})_{f1}\, L_{1f}}{i(\mathcal{E}_f - \frac{i}{2}\Gamma_f - E)}. \qquad /22/$$

С другой стороны, аналогичную структуру имеет амплитуда одноканального резонансного рассеяния /см. например,[10, 11]/. Для S-функции мы можем написать выражение

$$S(E) = 1 + i\left(\sum_{f=1}^{N}\frac{(\hat{L}^{-1})_{f1}\, L_{1f}}{\mathcal{E}_f - \frac{i}{2}\Gamma_f - E}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{N}\Gamma_\ell\right). \qquad /23/$$

Сравнивая /22/ и /23/, получаем

$$A_1(E) = \left(\sum_{\ell=1}^{N}\Gamma_\ell\right)^{-1/2}(1 - S(E)). \qquad /24/$$

В то же время известно, что согласно условию унитарности $|S(E)| = 1$, причем функция $S(E)$ очень просто выражается через энергии и ширины квазистационарных состояний[10,12,13,14]:

$$S(E) = \prod_{f=1}^{N}\left(\frac{\mathcal{E}_f - E + \frac{i}{2}\Gamma_f}{\mathcal{E}_f - E - \frac{i}{2}\Gamma_f}\right). \qquad /25/$$

Отсюда находим для амплитуды $A_1(t)$ выражение

$$A_1(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{\ell=1}^{N}\Gamma_\ell\right)^{-1/2}\int\left[1 - \prod_{f=1}^{N}\left(\frac{\mathcal{E}_f + \frac{i}{2}\Gamma_f - E}{\mathcal{E}_f - \frac{i}{2}\Gamma_f - E}\right)\right] e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\, dE. \qquad /26/$$

Формула /26/ определяет закон одноканального распада при возбуждении произвольной многоуровневой нестабильной системы δ-образным пакетом в распадном канале.

4. Рассмотрим случай кратного вырождения уровней[6,9]. При N-кратном вырождении

$$S(E) = \left(1 + i\frac{\Gamma}{\mathcal{E} - \frac{i}{2}\Gamma - E}\right)^N. \qquad /27/$$

Согласно /24/ и /26/ амплитуда распада состояния $|\phi_1(t)\rangle$

$$A_1^{(N)}(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{N\Gamma}}\int_{-\infty}^{\infty}(1 - S(E))\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\, dE =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{N\Gamma}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - \left(1 + i\frac{\Gamma}{\mathcal{E} - i\frac{\Gamma}{2} - E}\right)^N\right] e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\, dE. \qquad /28/$$

Интеграл /28/ можно вычислить в явном виде с помощью теоремы вычетов. В результате находим

$$A_1^{(N)}(t) = \sqrt{N\Gamma}\left[\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(N-1)!\,(-1)^m}{m!\,(m+1)!\,(N-m-1)!}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^m\right] e^{-(i\mathcal{E} + \frac{\Gamma}{2})\frac{t}{\hbar}}. \qquad /29/$$

При этом для вероятности одноканального распада в единицу времени получается выражение

$$P_1^{(N)}(t) = |A_1^{(N)}(t)|^2/\hbar = \frac{\Gamma}{N\hbar}\left(L^1_{N-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)\right)^2 e^{-\Gamma t/\hbar}, \qquad /30/$$

где $L^1_{N-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)$ - обобщенный полином Лагерра[15]. Подчеркнем, что в силу /13/ вероятность $P_1^{(N)}(t)$ автоматически удовлетворяет условию нормировки $\int_0^\infty P_1^{(N)}(t)\,dt = 1$. Обозначим $\tilde{P}_1^{(N)}(y) = (\hbar/\Gamma)P_1^{(N)}(t)$, $y = \Gamma t/\hbar$. Согласно /29/-/30/

$$\tilde{P}_1^{(2)}(y) = 2\left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 e^{-y}, \qquad /31/$$

$$\tilde{P}_1^{(3)}(y) = 3\left(1 - y + \frac{1}{6}y^2\right)^2 e^{-y}, \qquad /32/$$

$$\tilde{P}_1^{(4)}(y) = 4\left(1 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{24}y^3\right)^2 e^{-y}, \qquad /33/$$

$$\tilde{P}_1^{(5)}(y) = 5\left(1 - 2y + y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^4\right)^2 e^{-y}, \qquad /34/$$

$$\tilde{P}_1^{(6)}(y) = 6\left(1 - \frac{5}{2}y + \frac{5}{3}y^2 - \frac{5}{12}y^3 + \frac{1}{24}y^4 - \frac{1}{720}y^5\right)^2 e^{-y}. \qquad /35/$$

Функции $\tilde{P}_1^{(N)}(y)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int_0^\infty P_1^{(N)}(y)\,dy = 1. \qquad /36/$$

Они равны N при $y = 0$, имеют /N -1/ нулей и /N -1/ максимумов, соответствующих нулям производных $d\tilde{P}^{(N)}(y)/dy$. Ниже указаны нули и максимумы выражений /31/-/33/.

$N = 2$	$y^{(0)} = 2$	$y^{(max)} = 4$	$\tilde{P}_1^{(2)}(4) = 0{,}0183$
$N = 3$	$y_1^{(0)} = 1{,}27$	$y_1^{(max)} = 2{,}35$	$\tilde{P}_1^{(3)}(2{,}35) = 0{,}0176$
	$y_2^{(0)} = 4{,}73$	$y_2^{(max)} = 7{,}65$	$\tilde{P}_1^{(3)}(7{,}65) = 4{,}6\cdot 10^{-3}$
$N = 4$	$y_1^{(0)} = 0{,}935$	$y_1^{(max)} = 1{,}71$	$\tilde{P}_1^{(4)}(1{,}71) = 0{,}0175$
	$y_2^{(0)} = 3{,}315$	$y_2^{(max)} = 4{,}95$	$\tilde{P}_1^{(4)}(4{,}95) = 4{,}22\cdot 10^{-3}$
	$y_3^{(0)} = 7{,}75$	$y_3^{(max)} = 11{,}34$	$\tilde{P}_1^{(4)}(11{,}34) = 1{,}85\cdot 10^{-3}$

Закон распада /29/-/30/ не согласуется с соответствующими формулами Гольдберга-Ватсона[16]. Некорректность подхода, ис-

пользуемого в[16], была ранее показана в статье Белла и Гебеля[17] на примере двойного полюса /N = 2/. Соотношения /29/-/30/, /32/-/36/ обобщают результат Белла и Гебеля для значений N > 2*.

Заметим, что среднее время жизни N-кратно вырожденной системы, находящейся при $t = 0$ в состоянии $|\phi_1\rangle$, с учетом /27/-/28/ составляет

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{\hbar}\int_0^\infty t\,|A_1^{(N)}(t)|^2\,dt = \frac{\hbar}{2\pi N\Gamma}\, i\int S(E)\frac{dS^*(E)}{dE}\,dE =$$

$$= \frac{\hbar}{2\pi\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma}{(\mathcal{E} - E)^2 + \Gamma^2/4}\,dE = \hbar/\Gamma \qquad /37/$$

и не зависит от кратности вырождения. Аналогичный расчет дает

$$\overline{t_1^2} = \frac{1}{\hbar}\int_0^\infty t^2\,|A_1^{(N)}(t)|^2\,dt = 2N(\hbar/\Gamma)^2. \qquad /38/$$

Если $N \gg 1$, то при малых временах $|A_1^{(N)}|^2 = N\Gamma \gg \Gamma$. Это обстоятельство вместе с соотношениями /37/-/38/ указывает на то, что в предельном случае $N \gg 1$ распад состояния $|\phi_1\rangle$ проходит, в основном, быстро, за время порядка $\hbar/N\Gamma \ll \hbar/\Gamma$, но за счет членов с высокой степенью t, входящих в /29/, распределение вероятности $P_1^{(N)}(t)$ имеет относительно малый "всплеск" /$\sim 1/N$ / при временах $t \sim \hbar N/\Gamma$. Подчеркнем, что результаты /37/-/38/ фактически относятся к случаю возбуждения N-кратно вырожденной системы пакетом частиц, образующихся при распаде, с разбросом энергии $\Delta E \gg N\Gamma$. При уменьшении ΔE вклад "всплеска" при временах $t \sim \hbar N/\Gamma$ возрастает, и среднее время жизни увеличивается**.

Заметим, что амплитуда $A_1^{(N)}(t)$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^\infty A_1^{(N)}(t)\,t^k e^{(i\mathcal{E} - \frac{\Gamma}{2})t/\hbar}\,dt = 0, \qquad /39/$$

где k - любое целое число в интервале $1 \le k \le (N-1)$. Действительно, с учетом /29/ мы можем написать

*Случай N-кратного вырождения нестабильных уровней рассматривался с общей точки зрения в[9,18]. Однако полученный здесь закон одноканального распада /29-/30/ в этих работах не содержится.

** Если выполняется условие $N\Gamma \gg \Delta E \gg \Gamma$, то среднее время жизни системы имеет величину $\bar{t} \sim \pi\hbar N/\Delta E$ /оно может быть вычислено как среднее время задержки волнового пакета при резонансном рассеянии /см.[19,20]/.

$$\int_0^\infty A_1^{(N)}(t)\, t^k\, e^{(i\mathcal{E} - \frac{\Gamma}{2})t/\hbar}\, dt = \sqrt{N\Gamma} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \frac{(N-1)!\,(m+k)!}{m!\,(m+1)!\,(N-m-1)!}\ . \qquad /40/$$

Легко показать, что сумма в правой части /40/ при целых $k \geq 1$, $k \leq N-1$ равна нулю. В самом деле, при $k = 1$

$$\sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \frac{(N-1)!}{m!\,(N-1-m)!} = \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m C_m^{N-1} = 0 \qquad /41/$$

/последнее равенство есть следствие формулы для бинома Ньютона в применении к тождеству $/1-1/^{N-1} = 0$/. Если $k \geq 2$, то правую часть /40/ можно представить в виде линейной комбинации сумм

$$\sum_{m=\ell-1}^{N-1} (-1)^m \frac{(N-1)!}{(m-\ell+1)\,(N-m+1)!} = \sum_{m'=0}^{N-\ell} (-1)^{m'} \frac{(N-1)!}{m'!\,(N-\ell-m')!}\ ,$$

где ℓ - целые числа, $1 \leq \ell \leq k$, $k \leq N-1$. Каждая из этих сумм пропорциональна $\sum_{m'} (-1)^{m'} C_{m'}^{N-\ell}$ и в силу /41/ равна нулю.

5. Совершенно иной характер имеет одноканальный распад, если в начальный момент времени вырожденная нестабильная система находится в одном из стабильных /при $t = 0$/ состояний $|\phi_\alpha\rangle$ /$\alpha = 2,3\ldots$/. Возьмем совокупность состояний $|\phi_\alpha\rangle$, ортогональных друг другу и $|\phi_1\rangle$. Унитарные преобразования в этом базисе не изменяют распадной матрицы $\hat{\Gamma}$. Мы можем выбрать /$N-1$/ ортогональных $|\phi_1\rangle$ и друг другу состояний таким образом, чтобы недиагональные элементы неэрмитова гамильтониана $\hat{H}$ удовлетворяли соотношениям

$$H_{1\alpha} = 0,\ \alpha \neq 2;\ H_{12} \neq 0;$$

$$(\hat{H}^2)_{1\alpha} = 0,\ \alpha \neq 2,\ \alpha \neq 3;\ (\hat{H}^2)_{12} \neq 0,\ (\hat{H}^2)_{13} \neq 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad /42/$$

$$(\hat{H}^{N-2})_{1N} = 0;\ (\hat{H}^{N-2})_{1i} \neq 0,\ 2 < i < (N-1)$$

$$(\hat{H}^{N-1})_{1i} \neq 0,\ 2 < i < N.$$

Легко убедиться в том, что тогда при $t \to 0$ амплитуды распада будут иметь следующее поведение:

$$A_2^{(N)} \sim t,\ A_3^{(N)} \sim t^2 \ldots\ldots A_N^{(N)} \sim t^{N-1}. \qquad /43/$$

В частности, временная амплитуда распада состояния $|\phi_N(t)\rangle$ должна содержать только один член, пропорциональный $t^{N-1} e^{-(i\mathcal{E}+\frac{\Gamma}{2})t/\hbar}$. С учетом условия нормировки в этом случае

$$A_N^{(N)}(t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{(2N-2)!}}\ \left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{N-1} e^{-(i\mathcal{E}+\frac{\Gamma}{2})t/\hbar}\ , \qquad /44/$$

$$P_N^{(N)}(t) = \frac{\Gamma}{\hbar}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{2N-2} e^{-\Gamma t/\hbar}\ \frac{1}{(2N-2)!}\ . \qquad /45/$$

При этом среднее время жизни

$$\bar{t}_N = (2N-1)\frac{\hbar}{\Gamma}\ , \qquad /46/$$

т.е. при $N \gg 1$ величина $\bar{t}_N \gg \hbar/\Gamma$.

Ясно, что в общем случае амплитуды распада состояний $|\phi_k(t)\rangle$ /$k = 1,2\ldots N$/ имеют структуру

$$A_k^{(N)}(t) = \sqrt{\Gamma}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{k-1} Q^{(N-k)}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right) e^{-(i\mathcal{E}+\frac{\Gamma}{2})\frac{t}{\hbar}}\ , \qquad /47/$$

где $Q^{(N-k)}$ - полином степени /$N-k$/. С учетом /39/ автоматически выполняются равенства

$$\int_0^\infty A_1^{(N)}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right) A_\alpha^{(N)*}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right) dt = 0,\ \alpha = 2,\ 3\ldots N. \qquad /48/$$

Полиномы $Q^{(N-k)}$ при $k = 2,3\ldots N-1$ можно определить, используя соотношение ортогональности /13/. Рассмотрим, например, амплитуду распада $A_{N-1}^{(N)}(t)$. В соответствии с /47/ будем искать функцию $A_{N-1}^{(N)}(t)$ в виде

$$A_{N-1}^{(N)}(t) = \beta e^{-(i\mathcal{E}+\frac{\Gamma}{2})\frac{t}{\hbar}} \sqrt{\Gamma}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{N-2} \left(1 - a\frac{\Gamma t}{\hbar}\right). \qquad /49/$$

Из соотношения $\int_0^\infty A_N^{(N)}(t) A_{N-1}^{(N)}(t) dt = 0$, где $A_N^{(N)}(t)$ определяется по формуле /44/, сразу следует, что $a = \frac{1}{2N-2}$. В соответствии с этим нормированная вероятность распада в единицу времени будет иметь вид

$$P_{N-1}^{(N)}(t) = \frac{2(N-1)}{(2N-4)!}\,\frac{\Gamma}{\hbar}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{2N-4} \left[1 - \frac{1}{2(N-1)}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)\right]^2 e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}. \qquad /50/$$

6. Формулы /30/, /45/ и /50/ полностью решают задачу в случае двукратно и трехкратно вырожденных нестабильных систем.

Как и выше, обозначим $\tilde{P}_k^{(N)}(y) = \frac{\hbar}{\Gamma} P_k^{(N)}(t)$, , $y = \frac{\Gamma t}{\hbar}$. При N = 2 согласно /30/ или /31/ $\tilde{P}_1^{(2)}(y) = 2(1 - \frac{y}{2})^2 e^{-y}$, и согласно /45/

$$\tilde{P}_2^{(2)}(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y}. \qquad /51/$$

Эти выражения совпадают с результатами Белла и Гебеля[17].

При N = 3, в соответствии с формулами /30/, /50/ и /45/

$$\tilde{P}_1^{(3)}(y) = 3(1 - y + \frac{1}{6}y^2)^2 e^{-y},$$

$$\tilde{P}_2^{(3)}(y) = 2y^2(1 - \frac{1}{4}y)^2 e^{-y}, \quad \tilde{P}_3^{(3)}(y) = \frac{1}{24} y^4 e^{-y}. \qquad /52/$$

При N = 4 формулы /30/, /50/ и /45/ дают соответственно

$$\tilde{P}_1^{(4)}(y) = 4(1 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{24}y^3)^2 e^{-y},$$

$$\tilde{P}_3^{(4)}(y) = \frac{1}{4}y^4(1 - \frac{1}{6}y)^2 e^{-y}, \quad \tilde{P}_4^{(4)}(y) = \frac{1}{720} y^6 e^{-y}. \qquad /53/$$

Остается вычислить $\tilde{P}_2^{(4)}(y)$. Будем искать $\tilde{A}_2^{(4)}(y)$ в виде*

$$A_2^{(4)}(y) = \beta y(1 + ay + by^2) e^{-y/2} e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\Gamma}y}. \qquad /54/$$

Из условия ортогональности $\int_0^\infty \tilde{A}_2^{(4)}(y)\tilde{A}_4^{*(4)}(y)dy = 0$ вытекает равенство $1 + 5a + 30b = 0$, а из соотношения $\int_0^\infty \tilde{A}_2^{(4)}(y)\tilde{A}_3^{*(4)}(y)dy = 0$ следует $2 + 4a = 0$. Отсюда $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{20}$. С учетом нормировки получаем

$$\tilde{P}_2^{(4)}(y) = 5y^2(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{20}y^2)^2 e^{-y}. \qquad /55/$$

Автор благодарен М.И.Подгорецкому за интерес к работе и полезные обсуждения.

---

*По определению, $\tilde{P}_k^{(N)}(y) = |\tilde{A}_k^{(N)}(y)|^2$, $\tilde{A}_k^{(N)}(y) = \Gamma^{-1/2} A_k^{(N)}(t)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Развитие произвольного начального состояния нестабильной системы с течением времени описывается формулой

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\phi(0)\rangle, \qquad /П.1/$$

где $\hat{H}$ - эффективный гамильтониан. При N-кратном вырождении уровней[9]

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i\mathcal{E}+\frac{\Gamma}{2})t/\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}(\hat{H} - \mathcal{E} + \frac{i}{2}\Gamma)^k (\frac{-it}{\hbar})^k |\phi(0)\rangle, \qquad /П.2/$$

т.е. выполняется соотношение

$$(\hat{H} - \mathcal{E} + \frac{i}{2}\Gamma)^N = 0, \qquad /П.3/$$

где $\mathcal{E}$ - энергия, Γ - ширина квазистационарного состояния.

Найдем эффективный гамильтониан трехкратно вырожденной системы с одним каналом распада в представлении состояний $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ и $|\phi_3\rangle$, для которых при $t \to 0$ $P_1^{(3)} = 3\Gamma/\hbar$, $P_2^{(3)} \sim t^2$, $P_3^{(3)} \sim t^4$. При одноканальном распаде трехкратно вырожденной нестабильной системы распадная матрица в указанном представлении имеет вид

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 3\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad /П.4/$$

и эффективный гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}$ имеет структуру

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} - \frac{3}{2}i\Gamma & a & 0 \\ a & \mathcal{E} & b \\ 0 & b & \mathcal{E} \end{pmatrix}. \qquad /П.5/$$

В случае трехкратного вырождения

$$\det\hat{H} = (\mathcal{E} - \frac{i}{2}\Gamma)^3. \qquad /П.6/$$

С другой стороны, раскрывая определитель матрицы /П.5/, получаем

$$\det\hat{H} = \mathcal{E}^3 - \frac{3}{2}i\Gamma\mathcal{E}^3 - (b^2 + a^2)\mathcal{E} + \frac{3}{2}i\Gamma b^2.$$

Приравнивая правые части /П.6/ и /П.7/, находим

$$b^2 = \frac{1}{12}\Gamma^2, \quad b = \Gamma/\sqrt{12}; \qquad /П.7/$$

$$a^2 + b^2 = \frac{3}{4}\Gamma^2, \quad a^2 = \frac{2}{3}\Gamma^2, \quad a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\Gamma. \qquad /П.8/$$

Таким образом,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} - \frac{3}{2}i\Gamma & \sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma & \mathcal{E} & \frac{1}{\sqrt{12}}\Gamma \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}}\Gamma & \mathcal{E} \end{pmatrix}. \qquad /П.9/^*$$

Обозначим

$$\hat{K} = \hat{H} - (\mathcal{E} - \frac{i}{2}\Gamma) = \begin{pmatrix} -i\Gamma & \sqrt{\frac{2}{3}}\,\Gamma & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma & i\frac{\Gamma}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}}\Gamma \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}}\Gamma & i\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix}. \qquad /П.10/$$

Согласно формуле /9/ в рассматриваемом случае вероятность распада в единицу времени

$$P_k^{(3)}(t) = \frac{3\Gamma}{\hbar}\,|\langle\phi_1|\,\phi_k(t)\rangle|^2. \qquad /П.11/$$

С учетом /П.2/

$$P_1^{(3)}(t) = 3\frac{\Gamma}{\hbar}\,(1 - \frac{1}{\hbar}K_{11}t - \frac{1}{2\hbar^2}(K_{11}^2 + K_{12}^2)t^2)^2\, e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}},$$

$$P_2^{(3)}(t) = \frac{3\Gamma}{\hbar}\,\left|-i\frac{K_{12}t}{\hbar} - \frac{1}{2\hbar^2}(K_{11}K_{21} + K_{22}K_{12})t^2\right|^2 e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}. \qquad /П.12/$$

$$P_3^{(3)}(t) = \frac{3\Gamma}{\hbar}\,(K_{12}K_{23}t^2\frac{1}{2\hbar^2})^2\, e^{-\Gamma t/\hbar}.$$

---

*В случае двукратно вырожденной нестабильной системы с одним каналом распада

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} - i\Gamma & \frac{1}{2}\Gamma \\ \frac{1}{2}\Gamma & \mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, если подставить в /П.12/ матричные элементы /П.10/, получаются формулы, совпадающие соответственно с выражениями /52/, умноженными на $\Gamma/\hbar$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weiskopf V., Wigner E., Zeitschr. f. Phys., 1930, Bd. 63, p. 54.
2. Weiskopf V., Wigner E. Zeitschr. f. Phys., 1930, Bd. 65, p. p. 16.
3. Lee T.D., Oehme R., Yang C.N. Phys.Rev., 1957, vol. 106, p. 340.
4. Bernstein J., Feinberg G. Nuovo Cimento, 1962, vol. 25, p. 1348.
5. Bell J.S., Steinberger J. Proc. of Internat. Conference on Elementary Particles, Oxford, 1965.
6. Барышевский В.Г., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 157; ОИЯИ, Р2-4086, Дубна, 1968.
7. Wick C.C. Phys.Lett., 1969, vol.30B, p. 126.
8. Stodolsky L. Phys.Rev., 1970, vol.D1, p. 2683.
9. Кобзарев И.Ю., Николаев Н.М., Окунь Л.Б. Ядерная физика, 1969, т. 10, с. 864.
10. Любошиц В.Л. ОИЯИ, Р2-5328, Дубна, 1970.
11. Weidenmüller H.A. Phys.Rev., 1974, vol.C9, p. 1202.
12. Шапиро И.О. В сб.: "Проблемы современной ядерной физики", "Наука", М., 1971, с. 273-285.
13. Simonius M. Nucl.Phys., 1974, vol.A218, p. 53.
14. Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. Ядерная физика, 1976, т.24, с. 214.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963, с. 1051.
16. Goldberger M., Watson K. Phys.Rev., 1964, vol.136B, p.1472.
17. Bell J.S., Goebel G.J. Phys.Rev., 1965, vol.138B, p.1198.
18. Locajicek M. JINR, E2-4093; E2-4094, Dubna, 1968.
19. Любошиц В.Л. Ядерная физика, 1978, т.27, с. 948.
20. Любошиц В.Л. Письма в ЖЭТФ, 1978, т.28, с. 32.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 августа 1984 года.

Любошиц В.Л. P2-84-591

Одноканальный распад при кратном вырождении нестабильных уровней

Обсуждаются свойства системы перекрывающихся нестабильных уровней с одним каналом распада. Найден в явном виде закон одноканального распада N-кратно вырожденной нестабильной системы при ее возбуждении δ-образным волновым пакетом частиц, образующихся при распаде. Начальное состояние системы в этом случае является собственным состоянием распадной матрицы $\hat{\Gamma} = i(\hat{H} - \hat{H}^{+})$ с ненулевым собственным значением, равным $N\Gamma$ /$\hat{H}$ - неэрмитов гамильтониан, Γ - ширина квазистационарного состояния/. Исследуется временная зависимость вероятности распада остальных собственных состояний матрицы Γ, соответствующих нулевому собственному значению. Дано полное решение задачи при кратности вырождения уровней $N = 2, 3, 4$.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Lyuboshitz V.L. P2-84-591

The One-Channel Decay at Multiple Degeneracy of Unstable Levels

The properties of a system of overlapping unstable levels with a single decay channel are discussed. The law of the one-channel decay of an N-fold degenerated unstable system at its excitation by an δ-like wave packet of particles produced under a decay is derived in an explicit form. In this case the initial state of the system is an eigenstate of the decay-matrix $\hat{\Gamma} = i(\hat{H} - \hat{H}^{+})$ with the nonzero eigenvalue which is equal to $N\Gamma$ ($\hat{H}$ is the non-Hermitian Hamiltonian, Γ is the width of a quasistationary state). The time dependence of the decay probability of the other eigenstates of the matrix Γ corresponding to the zero eigenvalue is investigated. A complete solution of the problem under the multiplicities of the quasistationary state degeneracy equal to 2, 3 and 4 is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984