

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-84-557

В.А.Бейлин\*, А.В.Радюшкин

КВАНТОВО-ХРОМОДИНАМИЧЕСКИЕ  
ПРАВИЛА СУММ И  $J/\psi \longrightarrow \eta_c \gamma$  РАСПАД

Направлено в журнал "Nuclear Physics"

---

\* Московский государственный университет

1984

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод квантовохромодинических правил сумм /КХД ПС/ <sup>/1,2/</sup> является в настоящее время одним из наиболее популярных подходов к анализу низкоэнергетических адронных характеристик. Среди приложений метода можно назвать вычисление уровней чармония и боттония <sup>/2-4/</sup>, расчет электромагнитных формфакторов мезонов и нуклонов <sup>/6-8/</sup>, а также ширины распада мезонов <sup>/5,9-17/</sup>.

В настоящей работе нашей целью является анализ методом КХД ПС распада  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  с учетом как непертурбативных  $O(\langle GG \rangle)$ , так и пертурбативных  $O(\alpha_s)$  поправок. Следует отметить, что попытки расчета ширины этого распада методом ПС предпринимались и ранее <sup>/10,11,14,15,17/</sup>. В частности, в пионерской работе <sup>/10/</sup> расчет  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$  был проведен в рамках гипотезы о локальной дуальности /в идейном плане восходящей к конечно-энергетическим правилам сумм для адронного рассеяния <sup>/18//</sup>. В <sup>/14,15/</sup> найдено соотношение,

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma) = \frac{2\alpha}{9} \frac{\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)} \frac{M_{J/\psi}^4}{M_{\eta_c}^3} \left(1 - \frac{M_{\eta_c}^2}{M_{J/\psi}^2}\right)^3 (1 + O(\alpha_s)),$$

связывающее ширину распада  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  с ширинами распадов  $\eta_c \rightarrow 2\gamma$  и  $J/\psi \rightarrow e^+e^-$ , экспериментальные значения которых более или менее согласуются с расчетами, основанными на рецепте Appelqvista-Политцера <sup>/21/</sup>. Исходя из экспериментального значения  $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma) \approx 4-5$  кэВ в <sup>/14,15/</sup> была получена оценка  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma) = 2-3$  кэВ, противоречащая экспериментальному результату  $\Gamma^{\text{эксп}}(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma) = 0,76 \pm 0,22$  кэВ <sup>/19,20/</sup>. Расчет по локальной дуальности <sup>/10/</sup> также дал значение  $1,51 \pm 0,57$  кэВ/, существенно превышающее экспериментальное. Необходимо отдавать себе отчет в том, что локальная дуальность для низшего состояния не является следствием одних лишь общих принципов, а должна быть доказана исходя из конкретной динамики процесса. С этой целью в <sup>/11,17/</sup> был произведен анализ распада  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  методом КХД ПС с учетом непертурбативных  $O(\langle GG \rangle)$  поправок. Однако учет этих поправок не привел к существенному уменьшению предсказываемого для  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$  значения. Последняя надежда на объяснение экспериментального значения  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$  в рамках стандартной версии метода КХД ПС связана с учетом пертурбативных  $O(\alpha_s)$  поправок, расчет которых и составляет основной результат данной работы. Кроме того, мы ставим перед собой и методическую цель описания специфики нового класса КХД ПС, связанной с анализом трехточечных функций Грина для тяжелых кварков.

Изложение строится следующим образом. В разделе 2 рассматривается вывод ПС с учетом  $O(\alpha_s)$  и  $O(\langle GG \rangle)$  вкладов, а также проводится качественный анализ структуры спектральной плотности для непертурбативного  $O(\langle GG \rangle)$  вклада. Количественному анализу ПС посвящен раздел 3. В заключении обсуждаются полученные результаты. В Приложении А дается описание метода расчета спектральной плотности, а в Приложении Б дана оценка вклада высших состояний /континуума/.

## 2. ВЫВОД ПРАВИЛ СУММ

Рассмотрим трехточечную функцию

$$T_{5\mu\nu}(q, q_1, q_2) = \int d^4x d^4y \exp\{-iq_1x - iq_2y\} \times$$

$$\langle 0 | T \{ j_\mu(0) j_\nu(y) J_5(x) \} | 0 \rangle = 3eQ \cdot \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_1^\alpha q_2^\beta A(q^2, q_1^2, q_2^2), \quad /1/$$

где  $Q = 2/3$  - электрический заряд с-кварка,  $q^2 \neq 0$ ,  $q_1^2 \neq 0$ ,  $q_2^2 = 0$ , а  $j_\mu$  и  $J_5$  - векторный и псевдоскалярный токи, соответственно:

$$j_\mu(x) = :c(x) \gamma_\mu \bar{c}(x): \quad J_5(x) = i : \bar{c}(x) \gamma_5 c(x) : \quad /2/$$

Амплитуда  $A(q^2, q_1^2, q_2^2)$  описывает переходы между состояниями чармония, которые в нерелятивистском пределе соответствуют дипольному  $M1$  типу.

Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в  $A$ , изображены на рис.1-3. Рассмотрим их поочередно, в порядке возрастающей сложности.

### 2.1. Низшее приближение

Простейшую треугольную диаграмму /рис.1/ нетрудно вычислить, воспользовавшись фейнмановской параметризацией

$$A^{(0)}(q^2, q_1^2, 0) = \frac{1}{2\pi^2 m_c} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \frac{x}{1 - \frac{q^2}{m_c^2} x \bar{x} z - \frac{q_1^2}{m_c^2} x \bar{x} \bar{z}}, \quad /3/$$

где  $x, z$  - переменные, простым образом связанные с фейнмановскими параметрами  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , сопоставляемыми линиям 1,2,3:  $\beta_1 = \bar{x}z$ ,  $\beta_2 = \bar{x}\bar{z}$ ,  $\beta_3 = 1 - \beta_1 - \beta_2$ . Кроме того, в /3/ используется обозначение  $\bar{x} = 1 - x$ ,  $\bar{z} = 1 - z$ , которое будет широко применяться и в дальнейшем. Из формулы /3/ вытекает, что в низшем приближении спектральная плотность /двойного/ дисперсионного представления для амплитуды

$$A(q^2, q_1^2, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \frac{\rho(s, t)}{(s - q^2)(t - q^2)} \quad /4/$$

имеет вид:

$$\rho_0(s, t) = \frac{m_c}{2\pi} \delta(s - t) \ln \frac{1 + v}{1 - v} \theta(s - 4m_c^2) \theta(t - 4m_c^2), \quad /5/$$

где  $v = \sqrt{1 - 4m_c^2/s}$ .

Простой метод нахождения спектральной плотности  $\rho(s, t)$  из представления типа /3/ приведен в Приложении А.

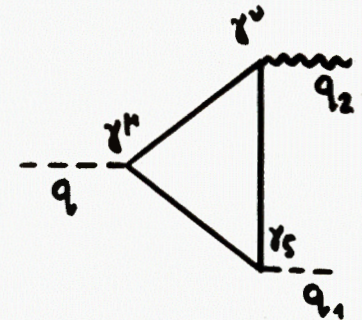


Рис.1. Вклад в амплитуду  $T_{5\mu\nu}(q, q_1, q_2)$ . Низшее приближение. Импульсы  $q, q_1$  и  $q_2$  соответствуют  $J/\psi, \eta_c$  и  $\gamma$ .

### 2.2. Качественная картина для физической спектральной плотности

Отметим, что поскольку  $\rho_0 \delta(s - t)$ , в приближении невзаимодействующих кварков разрешены переходы лишь между состояниями с равными массами ( $s = t$ ), причем последние должны подчиняться очевидному ограничению  $s, t \geq 4m_c^2$ .

В реальной ситуации, однако, взаимодействие между кварками приводит к формированию резонансов:  $J/\psi, \psi', \dots$  в векторном канале и  $\eta_c, \eta_c', \dots$  - в псевдоскалярном. Возможные переходы между этими состояниями можно охарактеризовать точками в плоскости переменных  $(s, t)$ , а соответствующие вклады в  $\rho(s, t)$  можно /по крайней мере, для низших резонансов/ аппроксимировать  $\delta$ -функциями типа

$$g_\psi h_{\eta_c} F_{\psi\eta_c} \delta(s - m_\psi^2) \delta(t - m_{\eta_c}^2), \quad /6/$$

где константа  $F_{\psi\eta_c}$  характеризует амплитуду перехода  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$ , а константы  $g_\psi, h_{\eta_c}$  - величину матричных элементов  $\langle 0 | \bar{c} \gamma_\mu c | \psi \rangle, \langle 0 | \bar{c} i \gamma_5 c | \eta_c \rangle$  соответственно.

Формирование физической спектральной плотности  $\rho(s, t)$  из исходной  $\rho_0(s, t)$  удобно представить себе происходящим в три этапа. Вначале происходит формирование узких низших резонансов ( $\psi, \eta_c$ ), ( $\psi', \eta_c'$ ), вырожденных по массе, т.е. спектральная плот-

ность, оставаясь на диагонали  $s=t$ , из плавной функции превращается в функцию с острыми пиками при  $s, t \sim m_\psi^2, m_{\psi'}^2$ , аналогично тому, как в двухточечных функциях  $\rho_0(s)$  превращается в  $\rho^{\text{Физ}}(s)$ . Характерным энергетическим масштабом здесь является разность масс радиальных возбуждений  $m_{\psi'} - m_\psi - m_{\eta_c'} - m_{\eta_c} \sim 0,5$  ГэВ. Затем происходит снятие вырождения между векторным и псевдоскалярным каналами: спектральная плотность "уходит" с диагонали  $s=t$ , сохраняя при этом свою форму. Характерный энергетический масштаб в этом случае задается разностью масс  $m_\psi - m_{\eta_c} \sim 0,1$  ГэВ. И, наконец, за счет более тонких механизмов /например, появления глюонной примеси<sup>/14/</sup> появляются переходы между состояниями, отличающимися по радиальному квантовому числу, такие, как  $\psi' \rightarrow \eta_c \gamma, \eta_c' \rightarrow J/\psi \gamma$  и т.п., которые в низшем приближении запрещены. В правильности такой картины можно убедиться на примере низших пертурбативных  $O(\alpha_s)$  и непертурбативных  $O(GG)$  поправок к низшему приближению.

### 2.3. Поправки на глюонный конденсат

По аналогии с двухточечными корреляторами следует ожидать, что учет непертурбативной  $O(GG)$  поправки численно более важен, чем учет  $O(\alpha_s)$ -поправок. Расчеты проводились в рамках подхода, развитого в<sup>/22/</sup>, эквивалентного методу<sup>/23/</sup>, основанному на использовании калибровки Фока-Швингера<sup>/24, 25/</sup>

$$(x^\mu - z_0^\mu) A_\mu(x) = 0 \quad /7/$$

для вакуумного глюонного поля  $A_\mu(x)$ . Параметр  $z_0$  удобно выбрать так, чтобы он совпадал с координатой одного из токов в /1/. Мы брали  $z_0 = 0$ .

Вычисления облегчаются тем, что вклады всех диаграмм рис.2 являются ультрафиолетово- и инфракрасно-конечными. После интегрирования по виртуальному импульсу с использованием фейнмановской параметризации и суммирования вкладов всех диаграмм

рис.2 мы получили следующее

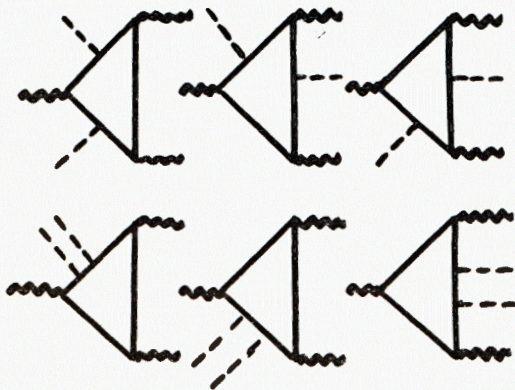


Рис.2. Вклады в амплитуду  $T_{5\mu\nu}(q, q_1, q_2)$ . Непертурбативные поправки. - - - - внешнее глюонное поле.

выражение:

$$A^{(GG)} = -\frac{3}{2\pi^2 m_c} \phi \{ 6I(3, 0, 4) + 8I(2, 1, 3) - 8I(3, 2, 3) - 8I(2, 0, 3) + 2I(3, 0, 3) \}, \quad /8/$$

где

$$\phi = \frac{4\pi^2}{9(4m_c^2)^2} < 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 >, \quad /9/$$

а  $I(a, b, c)$ - базисные интегралы

$$I(a, b, c) = \int_0^1 dx \int_0^1 dz x^a z^b (1 - \frac{xx}{m_c^2} (zq^2 + \bar{z}q_1^2))^{-c}. \quad /10/$$

Используя технику, изложенную в Приложении А, можно получить из /8/  $O(GG)$ -вклад в спектральную плотность  $\rho(s, t)$ :

$$\begin{aligned} \rho^{(GG)}(s, t) = & m^2 \frac{d}{dm^2} \left\{ \left[ -\frac{1}{m^4 v} + \frac{2}{m^2 tv} + \frac{2}{t^2 v^3} \right] \theta(t - 4m^2) - \right. \\ & - \left( \frac{4}{m^2 v} - \frac{12}{tv} \right) \delta(t - 4m^2) \delta(s - t) - \frac{2t^2 v}{m^4} \delta''(s - t) \theta(t - 4m^2) + \\ & + \frac{4(t - 2m^2)}{m^4 v} \delta'(s - t) \theta(t - 4m^2) + \left[ \left( -\frac{3}{m^4 v} + \frac{6}{m^2 tv} + \frac{14}{t^2 v^2} \right) \theta(t - 4m^2) - \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{12v}{m^2} + \frac{26}{tv} \right) \delta(t - 4m^2) \right] \delta(s - t) \right\}, \quad /11/ \end{aligned}$$

где  $v = \sqrt{1 - 4m^2/t}$ .

Кроме членов, пропорциональных  $\delta(s-t)$ , вклад  $\rho^{(GG)}(s, t)$  содержит также и члены  $\delta'(s-t)$  и  $\delta''(s-t)$ , генерирующие "сход" полной плотности  $\rho(s, t)$  с диагонали  $s=t$ . Количественную оценку роли упомянутых двух типов вкладов можно получить, переходя к моментам

$$M_{nk}^A = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{k+1}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{n+1}} \rho(s, t), \quad /12/$$

связанным с соответствующим вкладом в амплитуду  $A$  соотношением

$$M_{nk}^A = \frac{1}{n! k!} \left[ \left( \frac{d}{dq^2} \right)^k \left( \frac{d}{dq_1^2} \right)^n A(q^2, q_1^2, 0) \right]_{q^2=0, q_1^2=0}. \quad /13/$$

После довольно громоздких вычислений получаем из /3/, /8/ следующее выражение для вклада в  $M_{nk}^A$ , обусловленного диаграммами рис.1 и 2:

$$M_{nk}^A = \frac{1}{2\pi^2 m_c^{2n+2k+1}} \cdot \frac{[(n+k)!]^2}{[2(n+k+1)!]} \{1 + \phi \frac{n+k+1}{2(n+k)+3} [(n+k)^3 + 4(n+k)^2 + 4(n+k) - 2(n+k+1)(n-k) - (n-k)^2]\} \quad /14/$$

Множитель перед фигурной скобкой соответствует вкладу простейшей диаграммы /рис.1/. Зависимость от  $n, k$  в нем выражается только через сумму  $n+k$ . Если бы в  $O(GG)$ -вкладе не было  $\delta'(s-t)$  и  $\delta''(s-t)$  членов, то этот вклад также зависел бы только от суммы  $n+k$ , и задача на самом деле сводилась бы к одномерной. Однако наличие в  $O(GG)$ -вкладе производных от  $\delta(s-t)$  привело к появлению в /14/ членов, пропорциональных  $(n-k)$  и сигнализирующих о необходимости проведения двумерного анализа задачи. Нетрудно установить, что, как и ожидалось,  $(n-k)$ -члены, ответственные за "отход"  $\rho(s, t)$  от диагонали  $s=t$ , численно оказываются меньшими, чем члены, зависящие только от  $n+k$  и ответственные за формирование резонансной структуры.

Отметим, что из /14/ нетрудно получить результат работы /9/ для моментов  $M_n$ , описывающих процесс  $\eta_c \rightarrow 2\gamma$ : для этого нужно положить  $k=0$  и заменить  $eQ \rightarrow e^2 Q^2$  в /1/.

Из формулы /14/ видно также, что непертурбативные поправки быстро /как  $(n+k)^3$ / растут с увеличением  $n$  и  $k$ . Поэтому, чтобы ограничиться низшими степенными поправками, сохраняя их на уровне  $\leq 20 \div 25\%$ , нужно выбирать не слишком большие  $n$  и  $k$ .

#### 2.4. Пертурбативные $O(\alpha_s)$ -поправки

Диаграммы, ответственные за  $O(\alpha_s)$ -поправки к амплитуде  $A(q^2, q_1^2, 0)$ , изображены на рис.3. Отметим сразу, что получение точного аналитического ответа для  $\Lambda(\alpha_s)$  или  $\rho(\alpha_s)$  представляет собой весьма сложную вычислительную задачу. В настоящей работе мы ограничимся вычислением коэффициентов при  $\alpha_s$  в /14/ для низших моментов, подчиняющихся условию  $n+k \leq 6$ . Это вполне достаточно для наших целей, поскольку при  $n+k > 6$  непертурбативная  $O(GG)$ -поправка становится слишком большой.

Диаграммы рис.3 содержат ультрафиолетовые расходимости, поэтому необходимо выбрать рецепт перенормировки. Мы проводили расчеты в  $\overline{MS}$ -схеме, а для ренормировочного параметра  $\mu$  брали значение  $\mu = m_c$  /в недавней работе /9/, в которой вычислялись  $O(\alpha_s)$  поправки к процессу  $\eta_c \rightarrow 2\gamma$ ,  $\mu = 2m_c$ , но и  $\Lambda_{\text{МOM}} \approx 2\Lambda_{\overline{MS}}$  /.

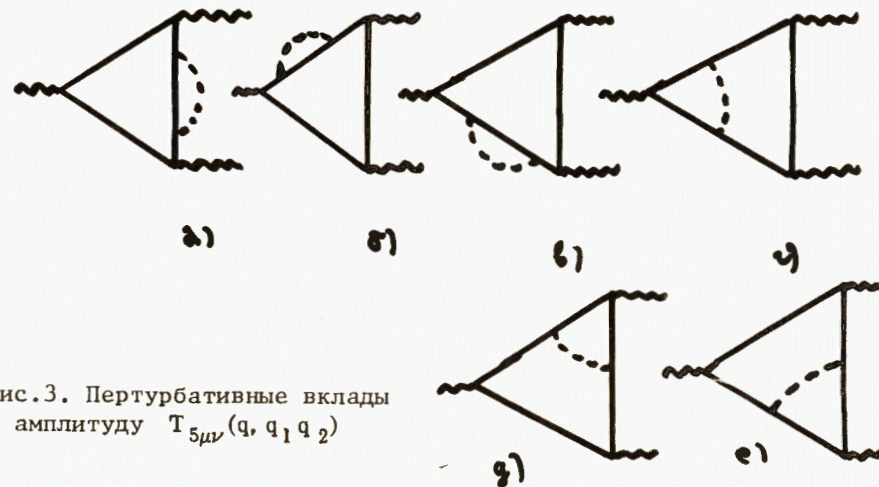


Рис.3. Пертурбативные вклады в амплитуду  $T_{5\mu\nu}(q, q_1, q_2)$

Заметим, что применение  $\overline{MS}$ -схемы для расчета амплитуд, содержащих ток  $J_5 = : \bar{c} i \gamma_5 c :$ , в идейном плане основано на работе /26/, т.е. фактически удаление ультрафиолетовых полюсов проводилось из размерно редуцированных скалярных интегралов, а численные результаты /см.табл.1/ свидетельствуют о том, что в данном случае разложение по  $\alpha_s(\mu_{\overline{MS}})/\pi$  является вполне корректным.

Таблица 1

Коэффициенты при  $\alpha_s/\pi$  в ПС /20/

$n-k$	$n+k$	1	2	3	4	5	6
4					1,16		-0,09
3				2,14		0,86	
2			2,76		1,23		-0,24
1	2,97			2,42		0,57	
0		3,63			1,64		-0,71
-1	3,92			2,67		0,37	
-2		2,76			1,49		-0,24
-3			2,04			0,55	
-4					1,33		-0,31

После вычисления шпуров и двух импульсных интегралов мы получили довольно большой набор многократных интегралов по фейнмановским параметрам. Типичная структура интегралов

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 da_1 \dots da_\ell \phi_1(a_i, q^2, q_1^2) \left[ 1 - \frac{q^2}{m_c^2} \phi_2(a_i) - \frac{q_1^2}{m_c^2} \phi_3(a_i) \right]^{-a}, /15/$$

где  $\phi_i$  - некоторые функции фейнмановских параметров  $a_i$ ,  $\ell = 2 \div 5$ ,  $a = 1 \div 3$ . Иногда возникают также интегралы, содержащие логарифмы импульсных переменных  $q^2$ ,  $q_1^2$ . В этих случаях использовалось соотношение

$$\ln a = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} (a^y - 1), /16/$$

после чего соответствующие интегралы приводились к виду /15/.

Для перехода к моментам  $M_{nk}$  необходимо применить оператор дифференцирования по  $q^2$  и  $q_1^2$  при  $q^2 = q_1^2 = 0$  к интегралам типа /15/. Большая часть возникающих при этом интегралов выражается через В-функцию:

$$B(a, b) \equiv \int_0^1 dx \cdot x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. /17/$$

В частности, таким образом вычисляются все интегралы, возникающие в диаграммах 3а/-в/.\*

Во вкладах диаграмм 3г/-е/ можно выделить класс интегралов вида

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 da_1 \dots da_\ell \phi(a_i, q^2, q_1^2) (1 - a_1 \cdot a_2)^{-a-p-k}, /18/$$

содержащих интегрируемую особенность. Эти интегралы при интересующих нас значениях  $p, k$  были найдены численно и затабулированы. После суммирования вкладов всех диаграмм рис.3, получаем набор коэффициентов для различных  $p$  и  $k$ , сведенный в табл.1. Видно, что начиная с  $p+k=6$ , коэффициент при  $a_s/\pi$  становится отрицательным. Вследствие смены знака поправки, при  $p+k=5 \div 6$ , она мала по абсолютной величине. Из табл.1 следует также, что зависимость  $O(a_s)$  поправки от  $p+k$  выражена значительно сильнее, чем от  $p-k$ , как это имело место и для  $O(GG)$  - поправки.

### 3. АНАЛИЗ ПРАВИЛ СУММ

Имея полное /с учетом членов  $O(a_s)$  и  $O(GG)$ / теоретическое выражение для амплитуды процесса  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$ , представим теперь мнимую часть той же амплитуды в приближении узких резонансов,

\* Заметим, что выражения для  $\Sigma(p)$ -собственно-энергетической вставки в кварковый пропагатор, можно извлечь также из формул, приведенных в /27/.

т.е. в виде /феноменологическая часть ПС/:

$$\text{Im}A = \pi^2 \sum_{i,j} g_i h_j F_{ij} M_i^a M_j^b \delta(s - M_i^2) \delta(t - M_j^2), /19/$$

где  $g_i(h_j)$  - константы, связи, характеризующие проекции соответствующих токов на  $i(j)$ -й резонанс,  $F_{ij}$  - безразмерные матричные элементы перехода, а константы  $a_i, b_j$  определяются квантовыми числами резонансов. Теперь, используя двойное дисперсионное соотношение /4/, перейдя к моментам /13/ и приравнявая полученный результат /14/, получаем ПС в форме

$$F_{\psi \eta_c} + \frac{h_{\eta_c'}}{h_{\eta_c}} \left( \frac{M_{\eta_c}}{M_{\psi'}} \right)^{2n+1} F_{\eta_c' \psi} + \frac{g_{\psi'} M_{\psi}^{2k}}{g_{\psi} M_{\psi'}} F_{\psi' \eta_c} + \frac{h_{\eta_c'} g_{\psi'}}{h_{\eta_c} g_{\psi}} \left( \frac{M_{\psi}}{M_{\psi'}} \right)^{2k} \left( \frac{M_{\eta_c}}{M_{\eta_c'}} \right)^{2n+1} F_{\psi' \eta_c} + \text{continuum} = \frac{1}{g_{\psi} h_{\eta_c}} \left( \frac{M_{\psi}}{m_c} \right)^{2k} \left( \frac{M_{\eta_c}}{m_c} \right)^{2n+1} M_{nk}^A. /20/$$

Мы оставили в /20/ только низшие состояния, т.е.  $F_{ij}$  соответствуют переходам, изображенным на рис.4. Заметим сразу же, что из /20/ очевидно подавление вкладов всех переходов, кроме  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$ , с ростом  $n$  и  $k$ , так что уже при  $n, k = 2 \div 3$  ведущий переход выделен достаточно надежно.

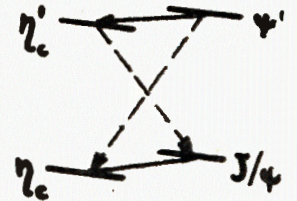


Рис.4. Схема радиационных переходов в чармонии. Сплошные линии соответствуют диагональным переходам  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  и  $\psi' \rightarrow \eta_c' \gamma$ , штриховые - недиагональным переходам  $\eta_c' \rightarrow J/\psi \gamma$  и  $\psi' \rightarrow \eta_c \gamma$ .

Зафиксируем теперь параметры наших ПС. Для масс резонансов используем значения:

$$M_{\psi} = 3,095 \text{ ГэВ}, \quad M_{\eta_c} = 2,981 \text{ ГэВ}, \quad M_{\psi'} = 3,685 \text{ МэВ}, /21/ \\ M_{\eta_c'} = 3,592 \text{ ГэВ}.$$

Для массы  $c$ -кварка берем  $m_c = 1,28 \text{ ГэВ}$ . Пользуясь известными оценками констант  $g, h$  /см. /1,9-12,16/ /, полагаем, в хорошем согласии с экспериментальными данными:

$$g_{\psi} = 0,125; \quad g_{\psi'} = 0,076; \quad h_{\eta_c} = 0,120; \quad h_{\eta_c'} = 0,072. /22/$$

Стандартным значением величины  $\langle 0 | \frac{a_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$  считается  $0,012 \text{ /ГэВ}^4$ ; однако погрешность этой оценки  $\sim 50\%^{2/}$ ; анализ,

проведенный в /22,28/, также указывает на более высокие значения  $\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle = 0,017 / \text{ГэВ}^4$ . Заметим, что использование последней величины сужает область плато по  $n, k$  одновременно, конечно же, ухудшая выделение ведущего перехода. Соответствующие  $n, k$  ( $\sim 2$ ) не слишком хорошо "чувствуют" область формирования резонансов. Тем не менее, приведем результаты и для такого выбора параметра  $O(GG)$ .

Зафиксировав все параметры ПС /20/, попробуем извлечь из них информацию о величине  $F_{\psi\eta_c}$ . Первоначальный анализ этих ПС в /17/ содержал попытки независимым образом определить матричные элементы всех четырех  $M1$ -переходов, однако при исследовании оказалось, что такой анализ весьма неустойчив при варьировании параметров, и в дальнейшем /29/ мы использовали для переходов  $\eta_c' \rightarrow J/\psi \gamma$ ,  $\psi' \rightarrow \eta_c \gamma$ ,  $\psi' \rightarrow \eta_c' \gamma$  экспериментально известные матричные элементы /извлекая их из значений ширин распадов/, а также предполагая, по аналогии с потенциальной моделью, что, определяясь сходными /и малыми/ интегралами перекрытия,  $F_{\psi'\eta_c} \sim F_{\eta_c'\psi}$ . Такое предположение использовалось и в /10,11/.

Область изменения  $n$  и  $k$  выбиралась так, чтобы:

- а/ степенные поправки были  $\leq 20-25\%$ ,
- б/ надежно выделялся доминирующий переход,
- в/ вариации  $F_{\psi\eta_c}$  составляли  $\leq 10-15\%$ .

Для  $\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle = 0,012 / \text{ГэВ}^4$  значения  $N = n + k = 5 \div 6$  удовлетворяют всем этим требованиям и представляют собой достаточно широкое "плато". Если же брать  $\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle = 0,017 / \text{ГэВ}^4$ , то требования а/-в/ выполняются при  $N = 4 \div 5$ . Существенная деталь - в этой области  $\alpha_s$ -поправки как раз меняют знак /см. табл.1/, эффективно увеличивая диапазон возможных значений  $F_{\psi\eta_c}$ , однако переход к  $N > 6$  опасен - начинает нарушаться требование а/.

Ограничиваясь  $N \leq 6$  и используя формулу

$$\Gamma(v_j \rightarrow p_i \gamma) = \frac{\alpha Q^2}{24} |F_{ij}|^2 m_{v_j} \left(\frac{m_{v_j}}{m_{p_i}}\right)^2 \left(1 - \frac{m_{p_i}^2}{m_{v_j}^2}\right)^3, \quad /23/$$

получаем результаты, представленные в табл.2. Отметим, что вклад континуума в ПС /20/ при  $N = 5 \div 6$  мал:  $\sim 4 \div 5\%$  /см. Приложение Б/.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, ситуация с распадом  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  с точки зрения метода КХД правил сумм не является абсолютно ясной. Если до включения степенных поправок могло возникнуть желание отнести расхождение теоретических результатов /3,20/ с экспериментом за счет непертурбативных эффектов, то расчеты /11,17,29/ показали, что существен-

Таблица 2

Ширина распада  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  /кэВ/

Эксперимент /19/	Предсказание работ /13-15/	ПС без степенных вкладов /10/	ПС со степенными вкладами /11/ модель /30/	ПС с учетом $O(\alpha_s)$ и степенных вкладов	
				$\langle 0   \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a   0 \rangle$ (ГэВ) <sup>4</sup>	$N = 6$ $5 \leq N \leq 6$
0,76 <sup>+0,33</sup> <sub>-0,22</sub>	2,21 <sup>+0,54</sup>	1,51 <sup>+0,57</sup>	1,9 <sup>+0,1</sup> 1,64 <sup>+0,60</sup>	0,012	1,76 <sup>+0,16</sup> 1,88 <sup>+0,46</sup>
				0,017	1,73 <sup>+0,23</sup> 1,60 <sup>+0,35</sup>

ной модификации результатов не происходит. Вышеупомянутая переменная знака у  $\alpha_s$ -поправок также не приводит к заметному уменьшению  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$ , так как сдвиг в область  $n, k$ , где  $\alpha_s$ -члены /отрицательные/ становятся порядка  $G^2$ -членов, одновременно выводит нас из области применимости разложения по степенным поправкам, где мы ограничивались лишь ведущими  $O(GG)$ -вкладами. В этой области  $n, k$  члены  $\sim G^2$  дают вклады в амплитуду  $\geq 40\%$ , что, с одной стороны, означает уже необходимость учета следующих  $-O(G^3)$  и  $O(G^4)$  поправок.

Итак, из всего предыдущего ясно, что никакие поправки не дают четкого указания на возможность получения близкого к экспериментальному результата. Мы лишь несколько сдвигаемся вниз от оценок потенциальной модели /  $\Gamma \sim 4$  кэВ/, однако получить  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma) < 1,7$  кэВ практически невозможно, оставаясь в рамках непротиворечивой схемы вычислений. Трудно предположить, что идеи локальной дуальности, являющиеся основой ПС, здесь неприменимы или сходимость ряда по степенным поправкам нарушается. Вряд ли резко занижены также оценки вклада континуума в ПС /20/. Последним неиспользованным шансом остается пока только анализ ПС для 3-точечных амплитуд, описывающих  $\eta_c$ - и  $J/\psi$ -распады, при  $Q^2 - Q_1^2 \neq 0$ . Маловероятно и в этом случае получение более чем в два раза меньшей ширины, однако, возможно, такой анализ был бы интересен и сам по себе. Пока что можно сказать лишь, что вопрос о ширине  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$  не закрыт для дальнейших исследований, в особенности экспериментальных.

В заключение авторы выражают благодарность С.Н.Николаеву, В.А.Нестеренко, С.А.Жаринову и С.В.Михайлову за полезные обсуждения результатов и стимулирующие дискуссии.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Расчеты двойной спектральной плотности  $\rho(s, t)$  основаны на методе, впервые предложенном и кратко описанном в /8/. В нашем случае 1-й шаг также сводится к представлению вклада диаграмм рис.2 как комбинации фейнмановских интегралов вида:

$$T_{abc} = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{x^a y^b}{m^{2c} [1 + \frac{Q^2}{m^2} x\bar{x}y + \frac{Q_1^2}{m^2} x\bar{x}\bar{y}]^c} \quad /A1/$$

Дальнейший путь таков: представляем /A1/ так:

$$T_{abc} = \frac{(i)^c}{\Gamma(c)} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \int_0^\infty a^{c-1} da \cdot x^a y^b \exp\{-ia[m^2 + Q^2 x\bar{x}y + Q^2 x\bar{x}\bar{y}]\} \quad /A2/$$

и далее дважды применяем к /A2/ борелевский оператор

$$\hat{B}(Q^2, M^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-Q^2)^n}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dQ^2}\right)^n \Big|_{Q^2 = nM^2},$$

обладающий свойством

$$\hat{B}(Q^2, M^2) \exp(-AQ^2) = \delta(1 - AM^2). \quad /A3/$$

Ясно, что

$$\hat{B}(Q^2, M^2) \hat{B}_1(Q_1^2, M_1^2) \exp\{-Q^2 x\bar{x}y\alpha - Q_1^2 x\bar{x}\bar{y}\alpha\} = \delta(1 - x\bar{x}y\alpha M^2) \delta(1 - x\bar{x}\bar{y}\alpha M_1^2),$$

что позволяет снять интегрирование в /A2/ по  $y$  и  $\alpha$ . Далее находим:

$$\hat{B} \hat{B}_1 T_{abc} = \frac{\sigma \cdot \sigma_1}{\Gamma(c)} \int_0^1 dx \frac{x^a f(\sigma, \sigma_1)}{(x\bar{x})^c} e^{-\frac{m^2}{x\bar{x}}(\sigma + \sigma_1)}, \quad /A4/$$

где  $\sigma = 1/M^2$ , а вид функции  $f(\sigma, \sigma_1)$  зависит от степени  $b$  в /A1/. Получив /A4/, рассмотрим теперь выражение

$$\hat{B}\left(\frac{1}{\lambda}, \sigma\right) \hat{B}_1\left(\frac{1}{\lambda_1}, \sigma_1\right) \left[\frac{1}{\sigma \cdot \sigma_1} \hat{B}(Q^2, M^2) \hat{B}_1(Q_1^2, M_1^2) T_{abc}\right]. \quad /A5/$$

Легко видеть, что это и есть искомый вклад в спектральную плотность  $\rho(s, t)$  /с точностью до множителя  $\lambda \cdot \lambda_1$ /. Действительно, для интеграла вида

$$T(Q^2, Q_1^2) = \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \frac{\rho(s, t)}{(s + Q^2)(t + Q_1^2)} \quad /A6/$$

найдем, проводя переход в  $\alpha$ -представление и двойное преобразование Бореля:

$$\begin{aligned} & \hat{B}(Q^2, M^2) \hat{B}_1(Q_1^2, M_1^2) T(Q^2, Q_1^2) = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt d\alpha d\beta \rho(s, t) e^{-\alpha s - \beta t} \delta(1 - \alpha M^2) \delta(1 - \beta M_1^2) = \\ & = \frac{1}{M^2 M_1^2} \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \rho(s, t) e^{-\frac{s}{M} - \frac{t}{M_1}} = \sigma \cdot \sigma_1 \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \rho(s, t) e^{-s\sigma - t\sigma_1}. \end{aligned} \quad /A7/$$

Умножая /A7/ на  $(\sigma \cdot \sigma_1)^{-1}$  и проводя еще раз двойное преобразование Бореля по параметрам  $\sigma$  и  $\sigma_1$ , находим:

$$\begin{aligned} T(\lambda, \lambda_1) &= \hat{B} \hat{B}_1 [(\sigma \cdot \sigma_1)^{-1} \hat{B} \hat{B}_1 T(Q^2, Q_1^2)] = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty ds dt \rho(s, t) \delta(1 - s/\lambda) \delta(1 - t/\lambda_1) = \lambda \cdot \lambda_1 \rho(\lambda, \lambda_1). \end{aligned} \quad /A8/$$



Отметим, что в зависимости от вида функции  $f(\sigma, \sigma_1)$  возможно применение еще раз перехода в  $\alpha$ -представление.

Итак, нахождение  $\rho(s, t)$  вышеописанным методом представляет собой использование преобразования Бореля по двум параметрам "туда" и "обратно", с промежуточной процедурой перевода всех знаменателей в показатель экспоненты /для использования свойства АЗ/. Счет  $\rho(s)$  возможен тем же методом, причем удобно для интегралов типа /А1/ положить  $Q^2 = 0$  в конце вычислений.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Учет континуума в КХД ПС обычно проводится путем моделирования вкладов высших резонансов и собственно континуума "ступенкой"  $\theta(s - s_0) F_0$ , где  $F_0$  - амплитуда, соответствующая борновским диаграммам /рис.1/ /1, 19/. В нашем случае легко записать вклад "ступеньки" в виде моментов:

$$\frac{1}{n! k!} \left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^k \left(-\frac{d}{dQ_1^2}\right)^n \int_{4m_c^2}^{\infty} \int_{4m_c^2}^{\infty} ds dt \frac{\rho_0(s, t)}{(s+Q^2)(t+Q_1^2)} \theta(s-s_0) \theta(s_0-4m_c^2) \Big|_{Q^2=Q_1^2=0} = \quad /Б1/$$

$$= \frac{1}{2(N+1) s_0^{N+1}} \cdot \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-4m^2/s_0}}{1-\sqrt{1-4m^2/s_0}} \right) - \frac{2\sqrt{1-4m^2/s_0}}{(2N+1)(2N+2)} \left[ \frac{1}{4m^2 s_0^N} + \frac{1}{(4m^2)^{N+1}} F(s_0, N) \right],$$

где

$$F(s_0, N) = \sum_{i=0}^N \frac{2^i \cdot N \dots (N+1-i)}{(2N-1) \dots (2N+1-2i)} \left(\frac{4m^2}{s_0}\right)^{N-i}, \quad /Б2/$$

т.е. можно представить

$$\int_{4m_c^2}^{\infty} \int_{4m_c^2}^{\infty} ds dt \frac{\rho(s, t)}{(s+Q^2)(t+Q_1^2)} = \int_{4m_c^2}^{s_0} + \int_{s_0}^{\infty} \quad /Б3/$$

и оценить из /Б3/ вклад континуума при различных  $s_0$ . При  $s_0 \rightarrow 4m^2/Б1/$  стремится к 0. Численные оценки показывают, что при выборе  $m_c = 1,28$  ГэВ,  $\sqrt{s_0} = 3,7$  ГэВ, вклад континуума в ПС, начиная с  $N = 4$ , становится меньше 7%, а при  $\sqrt{s_0} = 3,9$  ГэВ и  $N = 4$  - менее 4%. Мы брали в расчетах для ширины  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$   $\sqrt{s_0} = 3,7$  ГэВ и вклад континуума  $\leq 4 \div 5\%$  при  $N = 5 \div 6$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Novikov V.A. et al. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, p.626; Phys.Rev.Lett., 1977, 67B, p.409; Phys.Rep., 1978, 41, p.1.
2. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl.Phys., 1979, B147, p.385-448.

3. Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S. Nucl.Phys., 1981, B186, p.109; 1982, B196, p.125.
4. Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S. Phys.Lett., 1980, B95, p.103, B97, p.257.
5. Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S. Nucl.Phys., 1983, B213, p.109.
6. Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с.131; ОИЯИ, P2-82-691, Дубна, 1982; P2-83-251, Дубна, 1983.
7. Ioffe B.L., Smilga A.V. Nucl.Phys.B, 1983, 216, p.373; Phys.Lett.B, 1982, 114, p.353.
8. Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. ЯФ, 1984, 39, с.1287.
9. Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S. Phys.Lett.B, 1982, 113, p.411.
10. Khodjamirian A.Yu. Phys.Lett.B, 1980, 90, p.460.
11. Ходжамирян А.Ю. ЯФ, 1984, 39, с.970.
12. Алиев Т.М. ЯФ, 1983, 37, с.403.
13. Шифман М.А. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, с.546.
14. Shifman M.A., Vysotsky M.I. Z.Phys.C, 1981, 10, p.131.
15. Shirman M.A. Z.Phys.C, 1980, 4, p.345.
16. Kirschner R., Schiller A. Z.Phys.C, 1982, 16, p.141.
17. Beilin V.A., Radyushkin A.V. JINR, E2-83-559, Dubna, 1983.
18. Logunov A.A., Soloviev L.D., Tavkhelidze A.N. Phys.Lett., 1967, 24, p.181.
19. Gaisser J. Preprint SLAC-PUB-2887, Stanford, 1982.
20. Shifman M.A. Preprint ITEP-143, М., 1981.
21. Appelquist T., Politzer H.D. Phys.Rev.Lett., 1973, 34, p.43.
22. Nikolaev S.N., Radyushkin A.V. Nucl.Phys.B, 1983, 213, p.285; Phys.Lett.B, 1983, 124, p.243.
23. Смилга А.В. ЯФ, 1982, 35, с.473.
24. Fock V.A. Soviet Phys., 1937, 12, p.404.
25. Швингер Ю. Частицы, источники, поля. "Мир", М., 1976, т.1.
26. Siegel W. Phys.Lett.B, 1980, 84, p.193.
27. Celmaster W., Sivers D. Phys.Rev.D, 1981, 23, p.227.
28. Voloshin M.B. Preprint ITEP-21, М., 1980.
29. Бейлин В.А., Радюшкин А.В. ЯФ, 1984, 39, с.1270.
30. Eichten E. et al. Phys.Rev.D, 1980, 21, p.203.

Рукопись поступила в издательский отдел  
31 июля 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник "Краткие сообщения ОИЯИ". В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют /в отличие от препринтов/ статус официальных публикаций ОИЯИ.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.  
Theoretical physics.  
Experimental techniques and methods.  
Accelerators.  
Cryogenics.  
Computing mathematics and methods.  
Solid state physics. Liquids.  
Theory of condensed matter.  
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of this new collection, in contrast to the JINR Preprints, have the status of official publications of the JINR.

*JINR Rapid Communications* will be issued regularly.



Бейлин В.А., Радюшкин А.В.  
Квантово-хромодинамические правила сумм  
и  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  распад

P2-84-557

Проведен анализ радиационного распада  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  методом КХД правил сумм с учетом как непертурбативных  $O(GG)$ , так и пертурбативных  $O(\alpha_s)$  поправок. Для ширины  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$  при стандартных предположениях о величине  $\langle GG \rangle$  и  $\alpha_s$  получено значение  $\sim 1,7$  кэВ.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Beilin V.A., Radyushkin A.V.  
Quantum Chromodynamics Sum Rules  
and  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  Decay

P2-84-557

Within QCD sum rule approach we analyze the radiative decay  $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$  taking into account both nonperturbative  $O(G^2)$  and perturbative  $O(\alpha_s)$  corrections. Under standard assumptions on the magnitudes of  $\langle GG \rangle$  and  $\alpha_s$  we get  $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma) = 1.7$  keV.

The Investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984