

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-84-534

С.В.Михайлов, А.В.Радюшкин

ЯДРА ЭВОЛЮЦИИ В КХД:
ДВУХПЕТЛЕВОЙ РАСЧЕТ
В ФЕЙНМАНОВСКОЙ КАЛИБРОВКЕ

Направлено в журнал "Nuclear Physics B"

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения эволюции играют важную роль при анализе как инклюзивных ^{/1,2/}, так и эксклюзивных ^{/3/} жестких процессов. Они описывают зависимость функций распределения партонов $f(x, \mu^2)$ и партоновых волновых функций $\Phi(x, \mu^2)$ от ренормировочного параметра μ . Хорошо известно, что для последовательного учета радиационных поправок необходимо знать ядра уравнений эволюции по крайней мере в двухпетлевом приближении. Для инклюзивных процессов двухпетлевые расчеты были выполнены несколько лет тому назад ^{/4,5/}. Вычисление ядер эволюции для эксклюзивных процессов является значительно более сложной задачей, и первые результаты - двухпетлевое ядро эволюции для волновой функции пиона - были получены совсем недавно ^{/6-8/}. Первые два расчета ^{/6/} и ^{/7/} выполнены в светоподобной аксиальной калибровке с использованием техники, аналогичной развитой в ^{/5/} для инклюзивных процессов. Известно, однако, что светоподобная калибровка весьма сингулярна, в частности, в ней появляются "лишние" ультрафиолетовые расходимости, которые устраняются фактически "руками" /подробности см. в ^{/5/}/. Кроме того, как подчеркивалось в ^{/7/}, в процессе расчетов эволюционного ядра для волновой функции пиона вскрылись новые особенности этой калибровки, не проявившие себя при расчете ядер для инклюзивных процессов. Все это ставит задачу разработки более регулярного метода расчета ядер эволюции для эксклюзивных процессов.

В настоящей работе дается описание нового метода, позволяющего проводить вычисления ядер эволюции в ковариантных калибровках /например, в фейнмановской/ весьма экономичным образом. Метод применим к вычислению любых диаграмм, включающих составные операторы с производными типа $\bar{\psi}(x) \Gamma(n, D^N) \psi(x)$. На его основе нами получено ядро эволюции для волновой функции пиона $V(x, y)$ и воспроизведено ядро эволюции $P(z)$ Алтарелли-Паризи для процессов ГНР-лептонов в двухпетлевом приближении ^{/4,5/}. Наш результат для $V(x, y)$ совпал с результатом работы ^{/7/}, что подтверждает отсутствие систематических ошибок, обусловленных самим фактом использования светоподобной аксиальной калибровки.

Изложение построено следующим образом. В разделе 2 приводятся основные положения, используемые при анализе эволюции волновой функции пиона. Разделы 3 и 4 посвящены общему описанию метода. В разделах 5 и 6 устанавливается общая форма результата для некоторых классов диаграмм, справедливая при любом числе

петель. В разделе 7 в качестве простой иллюстрации развитых методов вычисляются однопетлевые ядра эволюции $V_0(x, y)$ для эксклюзивных и $P_0(z)$ - для инклюзивных процессов соответственно. В разделе 8 обсуждается связь между ядрами V-типа и P-типа. Наконец, в разделе 9 анализируется структура двухпетлевого ядра эволюции. В заключении сформулированы основные выводы. Результаты расчетов для отдельных диаграмм вынесены в приложение А. В приложениях Б и В даны основные формулы двухпетлевого интегрирования. В приложении Г - формулы перехода от ядер $V(x, y)$ к ядрам $P(z)$.

2. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ПИОНА И ЕЕ ЭВОЛЮЦИЯ

Волновую функцию пиона $\Phi(x, \mu^2)$ можно определить следующим образом /9/:

$$a_N(\mu^2) = \int_0^1 \Phi(x, \mu^2) x^N dx = \frac{i^N}{2(Pn)^{N+1}} \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \hat{n}(nD)^N u | P \rangle, \quad /2.1/$$

где p_ν - некоторый светоподобный вектор ($n^2=0$), обеспечивающий выделение симметричной бесследовой части калибровочно-инвариантного локального оператора $\bar{d} \gamma_5 \gamma_\mu D_{\mu 1} \dots D_{\mu N} u$ с квантовыми числами π^+ -мезона; $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a \lambda_a$ - ковариантная производная, действующая на поле u -кварка; $|P\rangle$ - однопионное состояние с импульсом P , а μ - параметр ренормировки для составных операторов, g - константа связи. Переменная x имеет смысл доли продольного импульса пиона, приходящегося в системе бесконечного импульса на кварк u . Зависимость моментов $a_N(\mu^2)$ от μ^2 описывается уравнением ренормгруппы /9/

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} a_N(\mu^2) = \sum_{K=0}^N Z_{NK} a_K(\mu^2), \quad /2.2/$$

где Z_{NK} - матрица аномальных размерностей.

Формула /2.2/ отражает тот факт, что матричные элементы операторов, соответствующие обкладкам с разными импульсами, например $\langle 0 | O^{(N)} | P \rangle$, при перенормировке смешиваются с матричными элементами операторов, являющихся полными производными $\partial^{N-K} O^{(K)}$ операторов $\bar{d} \gamma_5 \hat{n}(n_\nu D^\nu)^K u$ /9/. Объединяя выражения /2.1/ и /2.2/, можно получить уравнения эволюции для волновой функции пиона /3/

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \Phi(x, \mu^2) = \int_0^1 V(x, y; g) \Phi(y, \mu^2) dy. \quad /2.3/$$

Ядро эволюции $V(x, y; g)$ связано с матрицей Z_{NK} соотношением

$$\int_0^1 V(x, y; g) x^N dx = \sum_{K=0}^N Z_{NK}(g) y^K. \quad /2.4/$$

Более простыми объектами с вычислительной точки зрения являются ядра Липатова-Алтарелли-Паризи /1,2/, описывающие эволюцию функций $f(x, \mu^2)$, связанных с матричными элементами, соответствующими рассеянию вперед. Функция $f(x, \mu^2)$ определяется соотношением, аналогичным /2.1/:

$$M_N(\mu^2) = \int_0^1 f(x, \mu^2) x^N dx = \frac{i^N}{2(Pn)^{N+1}} \langle P | \bar{\psi} \hat{n}(n_\nu D^\nu)^N \psi | P \rangle. \quad /2.5/$$

Уравнение ренормгруппы для M_N имеет вид

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} M_N(\mu^2) = \gamma_N(g) M_N(\mu^2), \quad /2.6/$$

а эволюционное уравнение, вытекающее из /2.5/ и /2.6/, можно записать как

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f(x, \mu^2) = \int_x^1 P\left(\frac{x}{y}\right) f(y, \mu^2) \frac{dy}{y}, \quad /2.7/$$

где ядро $P(z)$ связано с γ_N соотношением

$$\int_0^1 P(z) z^N dz = \gamma_N. \quad /2.8/$$

Используя тот факт, что $Z_{NN} = \gamma_N$, и формулы /2.4/ и /2.8/, получим "редукционную формулу" /7,8/

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} dN z^{-N-1} \left\{ \frac{1}{N!} \left(-\frac{d}{dy} \right)^N \Big|_{y=0} \int_0^1 V(x, y) x^N dx \right\}_{\text{АП}}, \quad /2.9/$$

связывающую два типа ядер. Символом /АП/ в /2.9/ обозначена процедура аналитического продолжения в комплексную N -плоскость. Формула /2.9/ дает возможность проверки результатов расчета для ядер $V(x, y)$, которые гораздо труднее вычислить, чем $P(z)$. Эта формула будет использована нами в разделе 8. Для подобной проверки необходимо одновременно вычислять $V(x, y)$ и $P(z)$. Наш же метод сформулирован так, что он применим к расчету обоих ядер.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МНОГЧАСТИЧНЫМ ФУНКЦИЯМ

Как видно из /2.4/, знание $V(x, y; g)$ в принципе эквивалентно знанию матрицы аномальных размерностей $Z_{NK}(g)$. Стандартный метод вычисления аномальных размерностей составных операторов основан на разложении величин $(n_\nu D^\nu)^N$ по формуле бинома так, чтобы зависимость операторной вершины от кварковых и глюонных полей стала явной:

$$\bar{d}y_5 \hat{n}(n_\nu D^\nu)^N u = \bar{d}y_5 \hat{n} u^{(N)} + \sum_{m=0}^{N-1} C_N^{m+1} \bar{d}y_5 \hat{n} \hat{A}^{(m)} u^{(N-1-m)} + \dots, \quad /3.1/$$

где $\phi^{(k)} \equiv (n_\nu \partial^\nu)^k \phi$; $\hat{A} = n^\nu A_\nu^a \lambda_a g$.

Дальнейший расчет проводится обычным образом. Для инклюзивных процессов детальное описание вычислений дано, например, в работе /10/. Обобщение на эксклюзивный случай дается незначительной модификацией /см. работу /11/, в которой подробно обсуждается однопетлевой расчет/.

Однако восстановление $V(x, y; g)$ из известного $Z_{NK}(g)$ является сложной проблемой.

Из имеющегося опыта расчетов ядер для инклюзивных процессов известно, что прямое вычисление ядра $P(z)$ представляет значительно более простую задачу, чем вычисление аномальных размерностей γ_N . А однопетлевые расчеты величин Z_{NK} и $V(x, y)$ свидетельствуют о том, что для эксклюзивных процессов это справедливо в еще большей мере. Исходя из этого, будем придерживаться стратегии прямого вычисления ядра $V(x, y; g)$, минуя расчет матрицы Z_{NK} . Для этого сопоставим матричному элементу каждого оператора, входящего в разложение /3.1/, многочастичную волновую функцию ϕ_ℓ /12/:

$$\frac{1^N}{2(Pn)^{N+1}} \langle 0 | \bar{d}y_5 \hat{n} \hat{A}^{(k_{\ell-1})} \dots \Lambda_1 u^{(N-k_1-\dots-k_{\ell-1}-\ell+1)} | P \rangle =$$

$$= \int_0^1 z_{\ell-1}^{k_{\ell-1}} \lambda_{a_{\ell-1}} \dots z_1^{k_1} \lambda_{a_1} z_0^{N-k_1-\dots-k_{\ell-1}-\ell+1} \phi_{\ell-1}^{(a)}(z_\ell, \dots, z_0) [dz]_{\ell+1}, \quad /3.2/$$

зависящую, вообще говоря, от калибровки. В /3.2/ введены обозначения $[dz]_{\ell+1} = \delta(1 - \sum_{i=0}^{\ell} z_i) dz_0 \dots dz_\ell$; $|a|$ - набор групповых индексов. В дальнейшем групповые индексы у ϕ_ℓ будем опускать. Все импульсы на диаграммах, соответствующих матричному элементу в левой части /3.2/, предполагаются входящими в составную вершину /см. рис. 1а/. δ -функция в $[dz]$ в правой части /3.2/ выражает закон сохранения импульса, при этом z_0 и z_ℓ соответствуют импульсам на кварковых линиях, остальные z относятся к глюонным линиям. Выполнение спектрального условия $0 \leq z_i \leq 1$ и $\sum_{i=0}^{\ell} z_i = 1$ для многочастичных функций $\phi_{\ell-1}(z_\ell, \dots, z_0)$ было доказано в работе /12/.

В инклюзивном случае удобно принять один из кварковых импульсов в вершине выходящим, тогда аргумент у δ -функции изменится на $x_0 + x_1 + \dots - x_\ell$ /рис. 1б/. Дальнейшее рассмотрение будем проводить для ядра V-типа. Переход к инклюзивному случаю осуществляется незначительной модификацией основных формул. Подста-

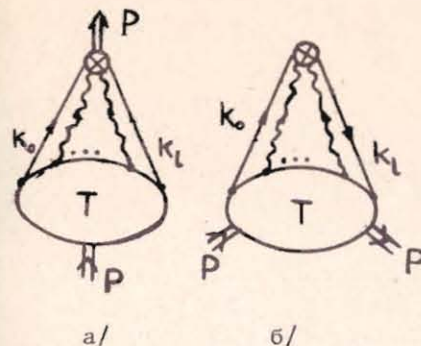


Рис. 1. Структура многочастичных волновых функций: а/ эксклюзивный случай, $k_0 + \dots + k_\ell = P$. б/ инклюзивный случай $k_0 + \dots + k_{\ell-1} = k_\ell$.

вив /3.2/ в /3.1/ и воспользовавшись /2.1/, $\Phi(x)$ можно представить в виде суммы по функциям ϕ_k , взятым с весами, которые дают формулой /3.1/:

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \rho_{k-1}(x | z_0, \dots, z_k) \phi_{k-1}(z_k, \dots, z_0) [dz]_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(x) \otimes \phi_k. \quad /3.3/$$

Значком \otimes будем обозначать интегральную свертку. Весовые функции $\rho_k(x | \{z\}_{k+1})$ являются обратными меллиновскими образами от полиномов $\bar{\rho}_k(N | \{z\}_{k+1})$, получающихся при суммировании в /3.1/ степеней z из /3.2/. Функции $\bar{\rho}_k(N | \{z\}_{k+1})$ концентрируют в себе всю N -зависимость и информацию о структуре эффективной k -глюонной вершины в составном операторе. Построим такую процедуру вычисления $\bar{\rho}_k(N)$, при которой они получались бы в виде линейной комбинации степеней $H^N(z)$, что делает их меллиновское обращение тривиальным.

По определению,

$$\rho_k(x | \{z\}_{k+1}) = \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} x^{-(N+1)-\nu} \bar{\rho}_k(N | \{z\}_{k+1}) \frac{dN}{2\pi i} \bar{\rho}_k(N | \{z\}_{k+1}) = \int_0^1 x^N \rho_k(x | \{z\}_{k+1}) dx. \quad /3.4/$$

Для первого слагаемого в /3.3/ или /3.1/ $\rho_0(N) = z_0^N$, и тогда, как следует из /3.4/,

$$\rho_0(x | z_0) = \delta(z_0 - x). \quad /3.5/$$

Для второго слагаемого в /3.3/ с учетом закона сохранения:

$$\bar{\rho}_1(N | \{z\}_2) = \lambda_{a_1} \sum_{m=1}^{N-1} C_N^{m+1} z_0^{N-1-m} z_1^m = \lambda_{a_1} \frac{(z_1 + z_0)^N - (z_0)^N}{z_1} = \lambda_{a_1} \frac{(\bar{z}_2)^N - (z_0)^N}{\bar{z}_2 - z_0}. \quad /3.6a/$$

Здесь введено обозначение $\bar{z} = 1 - z$.

К результату для $\bar{\rho}_1(N | \{z\}_2)$ можно прийти и другим путем, исходя из вида составного оператора в левой части /3.1/ и выделяя в нем оператор с одним глюонным полем. Тогда,

$$\bar{\rho}_1(N) \otimes \phi_1 = \frac{i^N}{2(Pn)^{N+1}} \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \hat{n} \sum_{m=0}^{N-1} (\hat{n} \partial)^m (\hat{A}_1 u^{(N-1-m)}) | P \rangle. \quad /3.66/$$

Воспользовавшись формулой для производной от произведения и представлением /3.2/, получим выражение для $\bar{\rho}_1(N)$

$$\bar{\rho}_1(N) = \lambda_{a_1} \sum_{m=0}^{N-1} (z_1 + z_0)^m z_0^{N-1-m} = \lambda_{a_1} \frac{(\bar{z}_2)^N - (z_0)^N}{\bar{z}_2 - z_0}. \quad /3.6в/$$

Моменты по x от следующих слагаемых в /3.3/ получают наращиванием в правой части /3.66/ стандартных блоков из глюонного поля и некоторого числа производных. Так, для $\bar{\rho}_2(N) \otimes \phi_2$ имеем

$$\bar{\rho}_2(N) \otimes \phi_2 = \frac{i^N}{2(Pn)^{N+1}} \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \hat{n} S\{2,1\} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} (\hat{n} \partial)^k \hat{A}_2 \sum_{m=0}^{N-2-k} (\hat{n} \partial)^m \hat{A}_1 u^{(N-2-k-m)} \right\} | P \rangle.$$

Здесь $S\{2,1\}$ - оператор симметризации по индексам 1 и 2, относящимся к глюонным полям.

Действуя аналогичным образом, с учетом результата /3.6в/ получим следующую цепочку равенств для $\bar{\rho}_2(N)$:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_2(N) &= S\{2,1\} \sum_{k=0}^{N-2} \lambda_{a_2} (z_0 + z_1 + z_2)^k \bar{\rho}_1(N-1-k) = \\ &= S\{2,1\} (\lambda_{a_2} \lambda_{a_1} \left[\frac{(z_0 + z_1 + z_2)^N - (z_0 + z_1)^N}{z_1 \cdot z_2} - \frac{(z_0 + z_1 + z_2)^N - (z_0)^N}{z_1(z_1 + z_2)} \right]). \end{aligned} \quad /3.7а/$$

Проводя симметризацию выражения в скобках и учитывая закон сохранения /т.е. снимая δ -функцию в /3.2/ интегрированием по z_1 / приходим к окончательному выражению для $\bar{\rho}_2(N)$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_2(N) &= \frac{1}{z_2(z_3 - z_2 - z_0)} \left[\lambda_{a_1} \lambda_{a_2} \left[(\bar{z}_3)^N - (z_2 + z_0)^N \right] + \right. \\ &+ \left. \lambda_{a_2} \lambda_{a_1} \left[(z_0)^N - (z_3 - z_2)^N \right] + \left[\lambda_{a_1} \lambda_{a_2} \right] \cdot \left[\frac{(\bar{z}_3)^N - (z_0)^N}{z_2 \cdot (\bar{z}_2 - z_0)} \right] \right]. \end{aligned} \quad /3.7б/$$

Отметим важный для дальнейшего факт: $\bar{\rho}_1(0) = 0$, $\bar{\rho}_2(0) = \bar{\rho}_2(1) = 0$. Теперь, для получения $\rho_k(x|z|_{k+1})$, как это следует из определения /3.4/ и формулы /3.5/, достаточно все выражения типа (H) в $\bar{\rho}_k(N|z|_{k+1})$ заменить на $\delta(x-H)\theta(H)$.

Переход к весу $\bar{\rho}_k(N)$ для функции распределения партонов $f(x, \mu^2)$ осуществляется заменой $\bar{x}_{k+1} \rightarrow x_{k+1}$, что следует из закона сохранения импульса.

Процедура получения выражений /3.6в/ и /3.7/ легко обобщается. Из структуры составного оператора сразу следует рекуррентная формула, связывающая $\bar{\rho}_{k+1}(N|z|_{k+2})$ и $\bar{\rho}_k(N|z|_{k+1})$:

$$\bar{\rho}_{k+1}(N|z|_{k+2}) = S\{(k+1)(1,2,\dots,k)\} \sum_{\ell=0}^{N-1-k} (z_0 + \dots + z_{k+1})^\ell \lambda_{a_{k+1}} \bar{\rho}_k(N-\ell-1|z|_{k+1}) \quad /3.8/$$

/происхождение формулы /3.8/ легко проследить из вывода /3.6в/ и /3.7а//. Здесь $S\{(k+1)(1,2,\dots,k)\}$ - оператор симметризации переменных с индексом $k+1$ со всеми переменными с индексами в скобках. Вес $\bar{\rho}_{k+1}$ также имеет вид линейной комбинации степеней N . Покажем это. Для $\bar{\rho}_k(N)$ равны нулю первые k значений: $\bar{\rho}_k(0) = \dots = \bar{\rho}_k(k-1) = 0$ /см. замечание после формулы /3.7б//. Это свойство практически очевидно, так как $\bar{\rho}_k(N)$ выделяет в составном операторе эффективную вершину с k глюонными полями, а в составном операторе спина k есть лишь $k-1$ глюонных полей. Следовательно, суммирование в /3.8/ можно продолжить до $N-1$. Тогда, если $\bar{\rho}_k(N-\ell-1)$ имеет вид

$$\bar{\rho}_k(N-\ell-1) = \sum_{i=1}^M P_i(\lambda) \frac{(H_i)^{N-1-\ell}}{B_i},$$

где $P_i(\lambda)$ - произведение λ -матриц, H_i и B_i - некоторые комбинации переменных z , и переменная N входит лишь как показатель степени, то после суммирования в /3.8/ $\bar{\rho}_{k+1}(N|z|_{k+2})$ также принимает вид

$$\bar{\rho}_{k+1}(N|z|_{k+2}) = S\{(k+1)(1,2,\dots,k)\} \sum_{i=1}^M \lambda_{a_{(k+1)}} P_i(\lambda) \frac{(z_0 + \dots + z_k)^N - (H_i)^N}{B_i(z_0 + \dots + z_k - H_i)}.$$

4. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЯДРА В КОВАРИАНТНЫХ КАЛИБРОВКАХ

Многочастичные функции $\phi_{\ell-1}(z_\ell, \dots, z_0)$, введенные в /3.2/, допускают простую партонную интерпретацию /12,13/. Эти функции можно рассматривать как амплитуды вероятности найти начальный адрон в состоянии, когда $\ell+1$ партонов /2 кварка и $\ell-1$ глюонов/ переносят доли z_0, \dots, z_ℓ продольного импульса адрона P . Так, $\phi_1(z_0, z_1, z_2)$ описывает подпроцесс с двумя кварками с импульсами z_0^P и z_2^P и глюоном с импульсом z_1^P . Разложение /3.3/ для $\Phi(x)$ означает, что вклады от различных подпроцессов связаны между собой так, что функции ϕ_0, \dots, ϕ_ℓ входят лишь в определенных калибровочно-инвариантных комбинациях. Из определения /3.2/ следует представление для ϕ_ℓ /12/ в виде фейнмановского интеграла по импульсам

$$\begin{aligned} \phi_{\ell-1}(z_\ell, \dots, z_0) &= \frac{g^{\ell-1}}{2(Pn)^{\ell-1}} \int d^4 k_0 \dots d^4 k_\ell \delta^{(4)}(k_0 + \dots + k_\ell - P) \left\{ \prod_{i=0}^{\ell-1} \delta(z_i - \frac{k_i n}{Pn}) \right\} \times \\ &\times T(k_0, \dots, k_\ell; P). \quad /4.1/ \end{aligned}$$

графический образ которого дан на рис.1. При этом, эффективной вершине составного оператора сопоставляется произведение δ -функций, заключенное в /4.1/ в скобки.

При перенормировке функции ϕ_ℓ смешиваются друг с другом посредством некоторой матрицы $V_{\ell j}$:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \phi_\ell(\{z\}_{\ell+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 V_{\ell j}(\{z\}_{\ell+1} | \{y\}_{j+1}) \phi_j(\{y\}_{j+1}) [dy]_{j+1} \equiv /4.2/$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{\infty} V_{\ell j}(\{z\}_{\ell+1}) \otimes \phi_j.$$

Подставляя /3.3/ в /2.3/ и используя в левой части формулу /4.2/, приходим к соотношению

$$\sum_{\ell,j=0}^{\infty} \rho_\ell \otimes V_{\ell j} \otimes \phi_j = \sum_{k=0}^{\infty} V \otimes \rho_k \otimes \phi_k,$$

приравнявая в котором структуры при ϕ_k , получим связь между ядрами $V_{\ell j}$ и V :

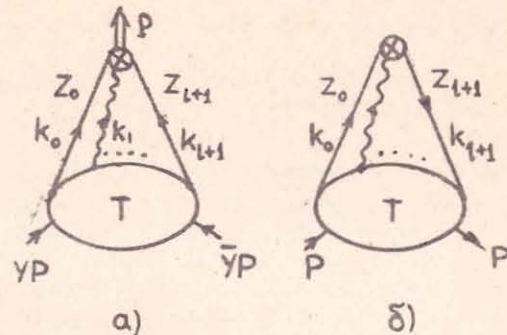
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \int_0^1 \rho_\ell(x | \{z\}_{\ell+1}) V_{\ell j}(\{z\}_{\ell+1} | \{y\}_{j+1}) [dz]_{j+1} = \int_0^1 V(x, z) \rho_j(z | \{y\}_{j+1}) dz. /4.3/$$

Возьмем теперь $j=0$ в формуле /4.3/ и воспользуемся тем, что $\rho_0(z, y) = \delta(y-z)$. В результате получим окончательное выражение для $V(x, y)$

$$V(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 \rho_j(x | \{z\}_{j+1}) V_{j0}(\{z\}_{j+1} | y) [dz]_{j+1}. /4.4/$$

сводящее вычисление $V(x, y)$ к расчету многочастичных ядер V_{j0} . Ядра $V_{j0}(\{z\}_{j+1} | y)$ являются, по сути, аномальными размерностями (А.р.) для ϕ_j . Поэтому процедура вычисления V_{j0} вполне аналогична вычислению А.р., подробно описанному в /4.10,14/. Отсылая за подробностями к цитируемым работам, приведем здесь лишь окончательный рецепт. В схеме минимальных вычитаний т'Хоофта, основанной на размерной регуляризации, $V_{j0} = -g^2 \frac{\partial}{\partial g^2} Z_{j0}$, где Z_{j0} - "константы" перенормировки для функций ϕ_j , учитывающие вклад в перенормировку ϕ_j от функции $\phi_0(y, \bar{y})$. Функция $\phi_0(y, \bar{y})$ описывает состояние пиона $|P\rangle$ как суперпозицию состояний $|u, P\rangle$ двух кварков с импульсами $p_1 = yP$ и $p_2 = \bar{y}P$ соответственно. Тогда, как это следует из представления /4.1/, вклад в Z_{j0} будут давать диаграммы G_a типа указанных на рис.2а с двумя входящими кварковыми полями.

Рис.2. Диаграммы, дающие вклад в Z_{j0} : а/ эксклюзивный случай, б/ инклюзивный случай.



Используя для Z_{j0} обычное представление через результат KR' -операции /14/, получим

$$V_{j0} = -g^2 \frac{\partial}{\partial g^2} Z_{j0} = g^2 \frac{\partial}{\partial g^2} \{K_1 R'(G_a)\} = \left(\begin{array}{l} \text{в двухпетловом} \\ \text{приближении} \end{array} \right) 2K_1 R'(G_a). /4.5/$$

Здесь K_1 - проекция на $1/\epsilon$ -член разложения, $N=4-2\epsilon$ - размерность пространства, R' - неполная R -операция ВРHZ. В инклюзивном случае соответствующее многочастичное ядро $P_{j0}(\{z\}_{j+1})$ извлекается по тому же рецепту /4.5/ из диаграмм на рис.2б.

Формулы /3.8/, /4.4/ и /4.5/ и образуют основу метода прямого вычисления ядер эволюции. Отметим, что его главной чертой является разделение операций меллиновского обращения и вычисления А.р. За счет разложения /3.3/ эти операции проводятся над различными объектами: меллиновскому обращению подвергаются веса $\bar{\rho}_j(N)$, а А.р. извлекаются из ϕ_j в виде ядер V_{j0} . Окончательный ответ /4.4/ представляет собой интегральную свертку результатов этих операций. В каждом фиксированном порядке теории возмущений достаточно знать лишь несколько первых ядер /каждая глюонная линия из эффективной вершины добавляет степень g^2 /: V_{00} и V_{10} - в однопетловом приближении, V_{00} , V_{10} , V_{20} - в двухпетловом и т.д.

Для вычисления ядра P -типа необходима минимальная модификация входящих в интеграл /3.4/ функций, сводящаяся к использованию "инклюзивного" веса ρ_j /см. замечание после формулы /3.7б// и ядра $P_{j0}(\{z\}_{j+1})$.

Рассмотрим подробнее важный для дальнейшего случай диаграмм с одноглюонным эффективным вертексом. В соответствии с /4.4/ вклад таких диаграмм равен $\int_0^1 \rho_1(x | \{z\}_2) V_{10}(z_0, z_1, z_2 | y) [dz]_2$.

Используя формулы /3.6а/ и /3.5/ и проводя интегрирование, получим для вклада в ядро $P(z)$ выражение

$$P(z) = \int_0^1 \frac{\theta(t > z) P_{10}(z, t) + \theta(z > t) P_{10}(t, z)}{z-t} dt, /4.6а/$$

для вклада в ядро $V(x, y)$ -

$$V(x, y) = \int_0^1 \frac{\theta(z > x) V_{10}(x, \bar{z}|y) + \theta(x > z) V_{10}(z, \bar{x}|y)}{x - z} dz \quad /4.66/$$

/мы всюду исключили переменную z_1 , в силу закона сохранения/. Если к данной диаграмме существует зеркально-симметричная /з.с./, то ее учет приводит к удвоению выражения /4.6а/, а /4.6б/ переходит при этом в выражение $V \rightarrow V_{tot}(x, y) = V(x, y) + V(\bar{x}, \bar{y})$. То есть, исходная диаграмма переходит в свою з.с. диаграмму при преобразовании параметров $y \rightarrow \bar{y}$, $x \rightarrow \bar{x}$. Это геометрическое свойство легко усмотреть, проводя подходящую замену переменных в интеграле, соответствующему з.с. диаграмме. Отметим, что фейнмановские интегралы для V_{j0} просты в вычислении /за счет δ -функций, входящих в V_{j0} / и тем проще, чем больше глюонных линий у эффективного вертекса. Однако "платой" за подобное упрощение является последующее интегрирование по $[dz]_{j+1}$.

5. ПРИМИТИВНЫЕ ДИАГРАММЫ

Рассмотрим класс диаграмм, у которых отсутствует усложнение одной из кварковых линий, входящих в эффективный вертекс /рис.3/

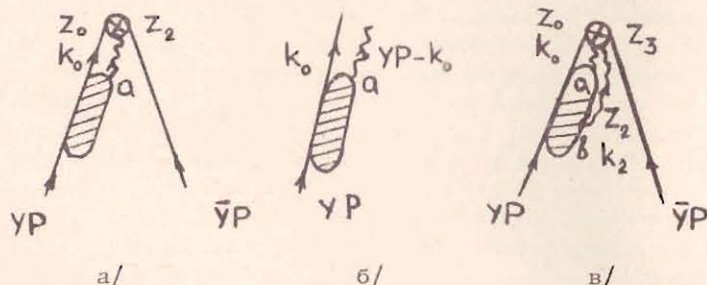


Рис.3. Прimitives диаграммы: а/ общая структура диаграмм с одноглюонным эффективным вертексом; б/ кварк-глюонный блок $t(k_0, yP - k_0, yP)$; в/ общая структура диаграмм с двухглюонным эффективным вертексом.

/см. приложение А, диаграммы з, и, к, л, м - с одной глюонной линией из вершины и р, с - с двумя линиями/. Такие диаграммы назовем примитивными. Мы применим здесь описанный в предыдущих разделах метод вычислений и получим ряд общих формул для диаграмм этого класса, справедливых в любом порядке теории возмущений.

В инклюзивном случае, когда кварковым линиям соответствует входящий и выходящий импульс P , функция $P_{10}(z_0, z_2)$ /см.рис.3а/,

в соответствии с /4.1/ и /4.5/, принимает вид

$$P_{10}(z_0, z_2) = \delta(1 - z_2) T^a F_1(z_2) = \delta(1 - z_2) \hat{A}P \int \delta(z_0 - \frac{k_0 n}{Pn}) \times T^a t(k_0, P - k_0, P) \cdot \frac{d^N k_0}{(2\pi)^N} \quad /5.1/$$

Здесь и в следующем случае $t(k_0, P - k_0, P)$ соответствует интегрированию в заштрихованном на рис.3а, б блоке; T^a выражает его групповую структуру; через $\hat{A}P$ обозначим совокупность операций, предписываемых формулой /4.5/, т.е. $\hat{A}P \equiv g^2 \frac{\partial}{\partial g^2} K_1 R'$. Подставляя /5.1/ в /4.6а/ и учитывая вклад з.с. диаграммы, получим

$$P(z) = -2 \left\{ \frac{T^a \lambda_a F_1(z)}{1 - z} - \delta(1 - z) \cdot \int_0^1 \frac{T^a \lambda_a F_1(x)}{1 - x} dx \right\} = -2 \left\{ \frac{T^a \lambda_a F_1(z)}{1 - z} \right\}_+ \quad /5.2/$$

Операция $[...]_+$ определяется своим действием на пробную функцию $\phi(x)$:

$$\int_0^1 dx [f(x)]_+ \phi(x) = \int_0^1 dx f(x) [\phi(x) - \phi(1)].$$

В эксклюзивном случае $V_{10}(z_0, z_2|y)$ зависит от параметра y ,

$$V_{10}(z_0, z_2|y) = \delta(z_2 - y) \hat{A}P \int_0^1 \delta(z_0 - \frac{k_0 n}{Pn}) T^a t(k_0, yP - k_0, yP) \frac{d^N k_0}{(2\pi)^N} \quad /5.3/$$

Проводя преобразование подобия со всеми импульсами интегрирования $k_j \rightarrow yk_j$, получим для V_{10} представление, аналогичное /5.1/,

$$V_{10}(z_0, z_2|y) = \delta(z_2 - y) (y)^{\alpha-1} T^a F_1(\frac{z_0}{y}); \quad /5.4/$$

здесь α - условная степень роста диаграммы. При преобразованиях подобия в каждом импульсном интеграле в /5.3/ появляется фактор $y^{-2\epsilon}$, возникающий из-за нецеломерности "пространства". Однако в схеме минимальных вычитаний эти факторы не дадут вклада в результат $\hat{A}P$ операции /15/, и поэтому α равно своему каноническому значению 1.

Подставляя /5.4/ в /4.6б/ и учитывая вклад з.с. диаграммы, получим формулу для $V(x, y)$

$$V(x, y) = - \left\{ \frac{T^a \lambda_a}{y} \theta(1 - \omega) \left[\frac{F_1(\omega)}{1 - \omega} \right]_+ + \frac{T^a \lambda_a}{\bar{y}} \theta(1 - \bar{\omega}) \left[\frac{F_1(\bar{\omega})}{1 - \bar{\omega}} \right]_+ \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \theta(y > x) \frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) + x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y} \right\}; \quad /5.5/$$

здесь $\omega = x/y$ и $\bar{\omega} = \bar{x}/\bar{y}$.

Перейдем теперь к диаграммам с двумя глюонными линиями из эффективного вертекса /см.рис.3в/. В соответствии с общим правилом /4.5/ получим для P_{20}

$$P_{20}(z_0, z_2, z_3) = \delta(1 - z_3) T^{ab} F_2(z_0, z_2) \equiv \\ \equiv \delta(1 - z_3) \hat{A}P \int \delta(z_0 - \frac{k_0 n}{P_n}) \delta(z_2 - \frac{k_2 n}{P_n}) T^{ab} t(k_0, P - k_0 - k_2, k_2, P) \frac{d^N k_0 d^N k_2}{(2\pi)^{2N}} \quad /5.6/$$

P_{20} для з.с. диаграммы дается заменой $z_3 \rightarrow z_1$ в /5.6/. Далее, используя $\bar{z}_3 \rightarrow z_3$ модификацию формулы /3.7б/ для ρ_2 и подставляя ее и /5.6/ в /4.4/, придем к выражению для $P(z)$:

$$P(z) = \left\{ \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{dx}{x} (\lambda_a \lambda_b T^{ab} F_2(z, x) + \lambda_a \lambda_b T^{ba} F_2(z, \bar{z} - x)) \right\}_+ - \\ - \left\{ \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{dx}{x} (\lambda_b \lambda_a T^{ab} F_2(z - x, \bar{z}) - \lambda_b \lambda_a T^{ba} F_2(z - x, x)) \right\}_+ \quad /5.7/$$

Учет з.с. диаграммы приводит к удвоению результата для $P(z)$. Переход к ядру V -типа рассматривается совершенно аналогично предыдущему. Не проводя громоздких, но тривиальных выкладок, выпишем конечный результат. Вклад данной диаграммы и ее з.с. диаграммы равен /ср. с /5.5// $V(x, y) = 1/2 \{ \theta(y > x) 1/y \cdot P(x/y) + x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y} \}$. На самом деле ясно, что формула связи /5.5/ будет справедлива не только в рассмотренных случаях, но и для примитивных диаграмм с любым числом глюонных линий из эффективного вертекса. Она обусловлена лишь возможностью перенести коэффициент растяжения внешнего импульса P в z -аргументы вершинных δ -функций, что видно из формулы /5.4/. А эта возможность следует из соображений размерности и свойств $\hat{A}P$ -операции и не зависит от структуры вертекса.

"Плюсовая" же структура формул /5.2/, /5.5/ и /5.7/ целиком обусловлена свойством эффективного вертекса $\tilde{\rho}_k(0) = \dots = \tilde{\rho}_k(k-1) = 0$ /см. обсуждение после формулы /3.8// и не связана с типом диаграммы. С помощью формул /5.2/ и /5.7/ нами были воспроизведены в инклюзивном случае результаты работы /4/. Вклад в V от примитивных двухпетлевых диаграмм определялся затем по формуле /5.5/.

6. ОБОБЩЕННО-ТРЕУГОЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ

Существует еще один класс диаграмм, для которых вклад в ядро $V(x, y)$ полностью выражается через вклад в $P(z)$ той же диаграммы. Это - "треугольники" на рис.4а, б, в, у которых усложняется либо одна из внутренних кварковых линий, либо глюонная перемычка. В двухпетлевом приближении к этому классу относятся диаг-

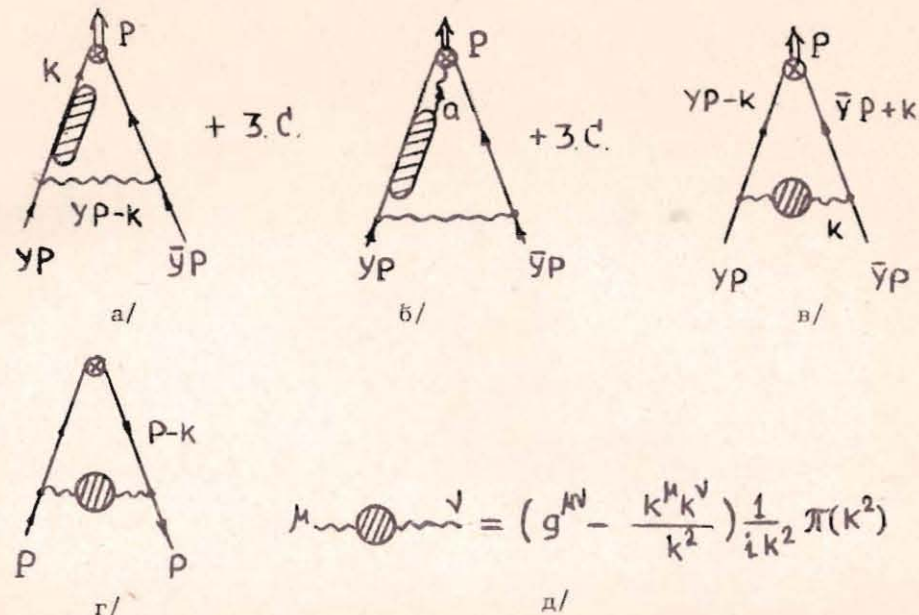


Рис.4

раммы б, в, г /см. приложение А/, вклады которых в V можно вычислять двумя существенно независимыми способами /прямым путем и через $P(z)$ / и тем самым контролировать правильность расчетов для каждой из таких диаграмм. Рассмотрим диаграммы типа в и г на рис.4. Расходящийся подблок таких диаграмм - поляризационный оператор. Его тензорная структура показана на рис.4д. В этих обозначениях фейнмановский интеграл, соответствующий диаграмме рис.4в, равен

$$P(k.c.) \int \frac{y_\mu (\hat{y}P + \hat{k}) \hat{n} (y\hat{P} - \hat{k}) y_\nu}{(yP - k)^2 (\bar{y}P + k)^2 k^2} (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) \pi(k^2) \delta(y - x - \frac{kn}{P_n}) d^N k \quad /6.1/$$

Выделим скалярную функцию при \hat{n} в /6.1/, взяв проекцию на $\hat{P}/4(P_n)$. Проводя затем упрощения в числителе, получим для $V(x, y)$ представление, явно инвариантное относительно замены $x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}$.

$$V(x, y) = \hat{A}P \{ P(k.c.) [(1 - \epsilon) 2x \int \frac{\delta(y - x - \frac{kn}{P_n})}{(yP - k)^2 k^2} \pi(k^2) d^N k + x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y} - \\ - \int \frac{\pi(k^2)}{(k^2)^2} \delta(y - x - \frac{kn}{P_n}) d^N k] \} \quad /6.2/$$

Здесь и ниже $P(k.c.)$ - произведение констант связи, групповых и схемных факторов. Третий член в выражении /6.2/ может быть пропорционален лишь $\delta(y - x)$,

$$\hat{A}P\{P(k, c.) \int d^N k \frac{\pi(k^2)}{(k^2)^2} \delta(y-x - \frac{kn}{Pn})\} = \delta(y-x) \cdot c, \quad /6.3/$$

где c - константа.

Аналогичные упрощения в случае ядра P -типа /см. рис.4г/ приводят к выражению

$$P(z) = \hat{A}P\{P(k, c.) (1-\epsilon) [2\bar{x} \int \frac{\delta(z - \frac{kn}{Pn})}{k^2(k-P)^2} \pi(k^2) d^N k +$$

$$+ 2x \int \frac{\delta(\bar{z} - \frac{kn}{Pn})}{[(k-P)^2]^2} \pi(k^2) d^N k] - P(k, c.) \int \delta(\bar{z} - \frac{kn}{Pn}) \frac{\pi(k^2)}{(k^2)^2} d^N k\}. \quad /6.4/$$

Из сравнения /6.2/, /6.3/, /6.4/ видно, что δ -образные части ответов для V и P связаны соотношением Г86 /см.приложение Г/. Рассмотрим теперь соотношение для оставшихся частей /6.2/ и /6.4/.

Для этого заметим, что у диаграмм G вида $G_1 \otimes G_2$, где G_1 - расходящаяся внешняя петля, G_2 - расходящийся внутренний подграф,

$$K_1 R^* G = K_1 (G_1 \otimes R G_2) \quad \text{и, следовательно,} \quad \hat{A}P(G) = g^2 \frac{\partial}{\partial g^2} K_1 (G_1 \otimes R G_2)$$

/здесь R - полная операция ВРНЗ/. В нашем случае G_2 представляет $\pi(k^2)$. Выделим в $R\pi(k^2)$ какой-либо контрчлен $\frac{A_{nj}}{\epsilon^j} (\frac{\mu^2}{k^2})^{n\epsilon}$

и подставим его в исследуемые части выражений /6.2/ и /6.4/.

/В дальнейшем будем для краткости опускать знаки $\hat{A}P$ -операции и общие для обоих выражений /6.2/ и /6.4/ факторы/. Тогда соответствующий вклад в V примет вид

$$V_{nj} \sim 2x \int \frac{\delta(y-x - \frac{kn}{Pn})}{(yP-k)^2 (k^2)^{1+\epsilon n}} d^N k + \left/ \frac{x \rightarrow \bar{x}}{y \rightarrow \bar{y}} \right/ =$$

$$= -i \frac{\Gamma(\epsilon(n+1))}{\Gamma(1+\epsilon n)} 2 \frac{x}{y} \int_0^1 \frac{(\bar{a})^{n\epsilon} \delta(1-x/y-a)}{(D)^{\epsilon(n+1)}} da + \left/ \frac{x \rightarrow \bar{x}}{y \rightarrow \bar{y}} \right/$$

Знаменатель $D = f(x, y) P^2$ пропорционален P^2 /или инфракрасно-регуляризующей массе m^2 , если $P^2=0$ /. Результат же KR^*G операции, дающей вклад в константу ренормировки Z_G , есть полином по внешним импульсам /и по массам, если они имеются в теории/ /14,16/. Для логарифмических диаграмм этот полином просто константа, и зависимость от P^2/μ^2 вообще отсутствует. Следовательно, степени $\ln(f(x, y) P^2/\mu^2)$, идущие из разложения $(D)^{-(n+1)\epsilon}$, сокращаются при учете всех контрчленов, и знаменатель вполне можно заменить единицей. Учитывая это, получим для V_{nj}

$$V_{nj} \sim \theta(y > x) 2 \left(\frac{x}{y} \right)^{1+n\epsilon} \left(-i \frac{\Gamma(\epsilon(n+1))}{\Gamma(1+\epsilon n)} \right) + \left/ \frac{x \rightarrow \bar{x}}{y \rightarrow \bar{y}} \right/. \quad /6.5/$$

Аналогичное рассмотрение для выражения /6.4/ дает

$$P_{nj} \sim \theta(1 > z) 2\bar{z}(1+n\epsilon)(z)^{n\epsilon} \left(-i \frac{\Gamma(\epsilon(n+1))}{\Gamma(1+\epsilon n)} \right). \quad /6.6/$$

Из сравнения /6.5/ и /6.6/ следует с учетом вклада δ -образных частей, что V и P связаны между собой соотношением

$$V(x, y) = \theta(y > x) \int_0^{x/y} dz \frac{p(z)}{1-z} + \left/ \frac{x \rightarrow \bar{x}}{y \rightarrow \bar{y}} \right/ + c \cdot \delta(y-x), \quad /6.7/$$

если $P(z) = p(z) + c\delta(1-z)$.

Соотношение /6.7/ может быть получено и иным путем. Рассуждения, аналогичные предшествующим формуле /6.5/, позволяют установить характер зависимости $V(x, y)$ от аргументов

$$V(x, y) = \theta(y > x) \frac{x}{y} v\left(\frac{x}{y}\right) + \left/ \frac{x \rightarrow \bar{x}}{y \rightarrow \bar{y}} \right/ + c\delta(y-x).$$

Используя затем редуцированную формулу /8.3/ или Г8 /см. раздел 8/, приходим к выражению для $P(z)$ через v :

$$P(z) = \bar{z}(z v(z))'_z + c\delta(1-z) \equiv p(z) + c\delta(1-z).$$

Разрешая последнее равенство относительно v , вновь получим соотношение /6.7/. Для диаграмм с собственно-энергетическими вставками в кварковый пропагатор рис.4а,б также существует соотношение между их вкладами в $V(x, y)$ и $P(z)$

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \theta(y > x) \left[\frac{1}{y} P(x) + \frac{1}{y} P(\bar{x}) - \frac{1}{\bar{y}} P\left(\frac{x}{\bar{y}}\right) \right] + x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}, \quad /6.8/$$

выполняющееся во всех порядках разложения по g . Его вывод аналогичен выводу формулы /6.7/.

Интересно отметить, что формулы связи /6.7/, /6.8/ оказываются справедливыми для обобщенно-треугольных диаграмм и в теории ϕ^3 в пространстве-времени 6 измерений /17/. Этот факт указывает на то, что они отражают топологические свойства обобщенно-треугольных диаграмм.

7. ПРИМЕР: ЯДРА АЛТАРЕЛЛИ-ПАРИЗИ И БРОДСКОГО-ЛЕПАЖА

В этом разделе в качестве иллюстрации метода будут вычислены ядра Алтарелли-Паризи /2/ и Бродского-Лепаж /3/ в однопетлевом приближении /см.рис.5/.

Как это следует из /5.1/ и /5.2/, вклад примитивной диаграммы на рис.5б полностью определяется функцией $F_1(z)$, а $T^a = \lambda^a$. Операция $\hat{A}P$ в однопетлевом приближении сводится к выделению коэффициента при полюсе $1/\epsilon$. Наконец, чтобы из диаграммы вершин-

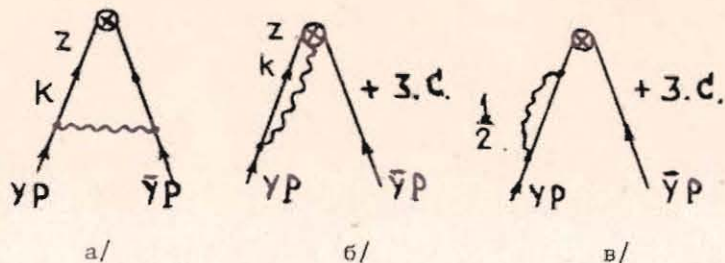


Рис.5. Диаграммы, дающие вклад в однопетлевое ядро V-типа.

ного типа выделить скалярную функцию F_1 при спинорной структуре \hat{n} , достаточно взять ее проекцию на $\hat{P}/4(Pn)$

$$F_1(z) = K_1(-ig^2) \frac{1}{(Pn)} \int \delta(z - \frac{kn}{Pn}) \frac{\text{Tr}(\hat{n}\hat{k}\hat{n}\frac{\hat{P}}{4(Pn)})}{k^2(P-k)^2} \frac{d^N k}{(2\pi)^N} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} 2z I(z),$$

/7.1/

$$I(z) = K_1 \int \delta(z - \frac{kn}{Pn}) \frac{d^N k}{k^2(k-P)^2}, \quad \alpha_s = \frac{g^2}{(4\pi)}$$

Для вычисления интеграла по k воспользуемся α -представлением

$$\frac{1}{k_j^2 + i\epsilon} = -i \int_0^\infty d\alpha_j \exp\{i\alpha_j(k_j^2 + i\epsilon)\}$$

для пропагаторов в /7.1/. Аналогичное представление запишем и для вершинной δ -функции

$$\delta(x - \frac{kn}{Pn}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty da \exp\{ia(x - \frac{kn}{Pn})\}.$$

Возникающие в результате интегралы по k имеют гауссов вид и берутся стандартным образом. Вычисляя затем интегралы по a и $\lambda = a_1 + a_2$ и выделяя коэффициент при $1/\epsilon$, окончательно получим $I(z) = \theta(z)\theta(1-z)$. Для всех последующих вычислений в однопетлевом приближении достаточно знать единственный интеграл $I(z)$. Общие формулы для двухпетлевых интегралов с вершинными δ -функциями представлены в приложении Б /см. также работу /17/. Используя /5.2/, /5.5/ и /5.7/, получим

$$P_6(z) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[\frac{4z}{1-z} \right]_+, \quad /7.2a/$$

$$V_6(x, y) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F 2 \left\{ \theta(y > x) \frac{x}{y(y-x)} + \theta(x > y) \frac{\bar{x}}{y(\bar{y}-\bar{x})} \right\}_+, \quad /7.2b/$$

здесь $\{F(x, y)\}_+ = F(x, y) - \delta(y-x) \int_0^1 F(t, x) dt$. Вклад диаграммы рис.5а в $P(z)$ дается выражением

$$P_a(z) = -ig^2 C_F K_1 \int \delta(z - \frac{kn}{Pn}) \frac{\text{Tr}(\hat{y}\hat{\mu}\hat{k}\hat{n}\hat{k}\hat{y}\frac{\hat{P}}{4(Pn)})}{(k^2)^2 (k-P)^2} \frac{d^N k}{(2\pi)^N}. \quad /7.3/$$

Упрощая числитель и используя /7.1/, получим $P_a(z) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F 2z \bar{I}(z)$.

Формулы связи для обобщенно-треугольных диаграмм /6.7/ и /6.8/ справедливы и в однопетлевом приближении. Используя любую из них для диаграммы рис.5а, получим для $V(x, y)$

$$V_a(x, y) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F 2 \left\{ \theta(y > x) \frac{x}{y} + \theta(x > y) \frac{\bar{x}}{y} \right\}.$$

Для получения полных ядер нужно еще учесть диаграмму на рис.5в, дающую δ -образный вклад. Окончательный ответ имеет вид

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot P_0(z) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot C_F \left\{ \left(\frac{4z}{1-z} \right)_+ + 2z - \delta(1-z) \right\} = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F 2 \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+,$$

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot V_0(x, y) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F 2 \left\{ \theta(y > x) \frac{x}{y} \left(1 + \frac{1}{y-x} \right) + x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y} \right\}_+.$$

Как видно, полные выражения для P и V имеют "плюсовую" форму, что на самом деле следует из закона сохранения тока в киральном пределе и должно выполняться в любом приближении. Большинство результатов для двухпетлевых диаграмм, дающих вклад в V , восстанавливалось из инклюзивного случая по формулам /5.5/, /6.7/, /6.8/. Однако остается еще 6 диаграмм /т.е. столько же, сколько всего диаграмм в светоподобной калибровке/, которые вычисляются лишь прямым способом. Часть этих диаграмм а, д, е, ж /приложение А/ вычислялись на ЭВМ с использованием программы аналитических вычислений SCHOONSCHIP /18/. Первым шагом в расчетах для всех диаграмм было приведение к скалярной форме /см. формулы /7.1/ и /7.3// умножением на $\hat{P}/4(Pn)$ и взятием шпура. При этом в числителе необходимо удерживать члены $-\epsilon$, дающие вклад в первый полюс. Затем, возникающие в числителе скалярные произведения выражаются через структуры знаменателя и частично сокращаются с ними. Таким образом, выражение, соответствующее данной диаграмме, представляется в виде линейной комбинации двухпетлевых интегралов некоторой скалярной теории. Учитывая ряд свойств симметрии таких интегралов к преобразованиям параметров x, y /например, $x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}$ /, получим, что все возникающие в разложении интегралы можно получить из 40 базисных, приведенных в приложении В. Еще две диаграммы о и п вычислялись непосредственно по формулам /4.6а/, /4.6б/.

8. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДВУМЯ ТИПАМИ ЯДЕР,
КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Явные вычисления, как правило, все же довольно громоздки. /См. результаты для диаграмм о,п в приложении А/. Здесь будут рассмотрены проверки, позволяющие убедиться в правильности конечного результата. Прежде всего отметим, что наш результат для суммы всех диаграмм приложения А совпадает с результатом, полученным в работах /6.7/. "Плюсовая" форма ответа у ряда диаграмм и симметрия относительно зеркального отражения $x \rightarrow \bar{x}$, $y \rightarrow \bar{y}$ выполняются автоматически для тех диаграмм, вклад которых воспроизводится по формулам /5.5/, /6.7/, /6.8/. Эти свойства, однако, приводят к содержательной проверке для диаграмм а, д, е, ж, на промежуточных этапах счета которых симметрию $x \rightarrow \bar{x}$, $y \rightarrow \bar{y}$ трудно контролировать, и для диаграмм о, п, у которых "плюсовая" форма ответа не выражена явно. Одна из основных проверок основана на формуле /2.9/, по которой из ядра $V(x, y)$ можно вычислить ядро $P(z)$. Последнее можно найти независимым способом /они также вычислялись другими авторами /4,10/ / и сравнить результаты, полученные двумя путями. Редукционная формула /2.9/ использовалась нами не только для полных ответов, но и для поддиаграммного сравнения /кроме диаграммы п/. При этом во многих случаях удается избежать проведения всей совокупности фигурирующих в /2.9/ операций. Пусть, например, V имеет вид $v = \mathcal{C}[\theta(y > x) \frac{1}{y} f(\frac{x}{y})]$, где \mathcal{C} обозначает операцию $\mathcal{I} + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y})$, а $f(z)$ - некоторая функция. Представляя N -й момент по x функции $v(x, y)$ в виде

$$\int_0^1 v(x, y) x^N dx = \frac{1}{y} \int_0^y f(\frac{x}{y}) x^N dx + \frac{1}{y} \int_y^1 f(\frac{x}{y}) x^N dx,$$

нетрудно установить, что первый член в правой части последней формулы не дает вклада в коэффициент при y^N , а вклад второго содержит член $-y^N \int_0^1 f(z) z^N dz$, откуда следует, что вкладу $\mathcal{C}[\theta(y > x) \frac{1}{y} f(\frac{x}{y})]$ в $V(x, y)$ соответствует вклад $-f(z)$ в $P(z)$. Совершенно аналогичным образом можно получить редукционные формулы для примитивных диаграмм

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{C}[\theta(y > x) \frac{1}{y} P(\frac{x}{y})] \rightarrow P(z) \quad /8.1/$$

и обобщенно-треугольных диаграмм /формулы /6.7/, /6.8//: с собственно-энергетическими вставками в кварковые линии -

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{C}[\frac{1}{y} P(\bar{x}) - \theta(x > y) \frac{1}{y} P(\frac{x}{y})] \rightarrow P(z), \quad /8.2/$$

с собственно-энергетическими вставками в глюонную "перемычку" -

$$V(x, y) = \mathcal{C}[\theta(y > x) f(\frac{x}{y})] \rightarrow \bar{z} f'(z). \quad /8.3/$$

Это соотношение и Г8 приводят к редукции /6.7/ в $P(z)$. В случаях более сложной зависимости $V(x, y)$ от аргументов необходимо проводить меллиновское обращение в /2.9/, используя, в частности, ряд формул, полученных в /20/. Таблица формул перехода $V \rightarrow P$, достаточная для проверки большинства диаграмм, а также структур полного ответа /см. раздел 9/ представлена в приложении Г. Отметим здесь, что формула /2.9/ применима, строго говоря, лишь к полному ядру V . Разложение /2.4/ для результата V_i каждой диаграммы в отдельности, а тем более для части такого результата, может содержать в правой части члены типа $1/y^k$, и в таких случаях нельзя полагать $y=0$ в /2.9/. Конечно, в общей сумме все такие члены сокращаются. Поэтому ряд соотношений в приложении Г получен просто выделением коэффициента при y^N в /2.4/. Все редуцированные $P_i^R(z)$ совпали с $P_i(z)$, которые были независимо вычислены как нами, так и авторами работы /4/. Проведем теперь в качестве одной из проверок результата переход от функций V_N и суммы функций V_G и V_F , которые фигурируют при групповых структурах $\frac{1}{2} N_i C_F$, $\frac{1}{2} C_F C_A$ и C_F^2 соответственно в полном ответе для V /см. формулу /9.1//, к их инклюзивным аналогам в P .

Подставляя в $V_N = \mathcal{C}[\theta(y > x) (-\frac{10}{9} F - \frac{2}{3} \frac{x}{y} - \frac{2}{3} \ln(\frac{x}{y}) F)]$ формулы /8.3/ и Г1,2, получим

$$V_N \rightarrow P_N = -\frac{2}{3} (2\bar{z} + P_0(z) (\frac{5}{3} + \ln z)). \quad /8.4/$$

Аналогично, для

$$V_G + V_F = \mathcal{C}[\theta(y > x) [(\frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3}) F + \frac{20}{3} \frac{x}{y} + \ln(\frac{x}{y}) (\frac{13}{6} + \frac{x}{2y}) F - \ln(\frac{x}{y}) \ln(1 - \frac{x}{y}) (F - \bar{F}) + \ln^2(\frac{x}{y}) (F + \frac{x}{2y})] - \frac{1}{2} \ln x (1 + \ln x - 2 \ln \bar{x}) \frac{x}{y}],$$

используя формулы Г1,2,6, получим

$$V_G + V_F \rightarrow P_G + P_F = P_0 (\frac{67}{9} + \frac{13}{6} \ln z + \ln^2(z) - \frac{\pi^2}{3} - 2 \ln z \ln \bar{z}) + \frac{25}{3} \bar{z} + \ln z (\frac{1}{2} - \frac{3}{2} z) - \frac{1}{2} \ln^2(z) (1 + z). \quad /8.5/$$

Выражения /8.4/, /8.5/ согласуются с результатами работ /4,5,20/. В /8.5/ сумма $V_F + V_G$ взята для того, чтобы исключить функцию $G(x, y)$ /см. 9.5/, содержащую "нестандартные" θ -функции $\theta(\bar{y} > x)$

и $\theta(x > \bar{y})^{17/}$. Присутствие подобных вкладов приводит к появлению в Z_{NN} членов, пропорциональных $(-)^N$, для которых не существует меллиновского обращения, и поэтому $G(x, y)$ формально не подпадает под редукционную формулу /2.9/.

Появление $(-)^N$ можно понять непосредственно из /2.4/, если сделать там надлежащую замену переменных. Пусть ядру V отвечает матрица $Z_{NK} / V \rightarrow Z_{NK}$ в соответствии с /2.4//. $V(x, y) = \int \mathcal{C}[\theta(\bar{y} > x)] v(x, y) \rightarrow Z_{NK} \cdot$ Определим $\bar{v}(x, \bar{y}) = v(x, y)$. Тогда, если справедливо соответствие

$$\mathcal{C}[\theta(y > x)] \bar{v}(x, y) \rightarrow \bar{Z}_{NK} \quad /8.6/$$

то справедливо и разложение по \bar{y} для $V(x, y)$

$$\int_0^1 \mathcal{C}[\theta(\bar{y} > x)] \bar{v}(x, \bar{y}) x^N dx = \sum_{K=0}^N \bar{Z}_{NK}(\bar{y}),$$

и $Z_{NN} = (-)^N \bar{Z}_{NN}$.

С другой стороны, появление множителя $(-)^N$ в А.р. связано с тем, что вклады диаграмм p, j /формирующих "нестандартные" θ -функции в V / в $P(z)$ отличны от нуля как при положительных, так и при отрицательных z . Во втором порядке по α только диаграммы p и j обладают таким свойством, что, как показывает анализ в α -представлении^{12/}, связано с их непланарностью. Физически кварк с отрицательным импульсом можно трактовать как антикварк, поэтому "отрицательно-частотную" часть $P_{-}^{qq}(z)$ вклада $P(z) = P_{qq}(z) \theta(z > 0) + P_{\bar{q}q}(|z|) \theta(z < 0)$ естественно интерпретировать как вероятность нахождения антикварка \bar{q} в кварке q того же типа. Таким образом, вклады со "стандартными" θ -функциями редуцируются к ядру $P_{qq}(z)$, а с "нестандартными" - к ядру $P_{\bar{q}q}(z)$. Из соотношения /8.6/ следует, что редукция от $V(x, y)$ к $P_{\bar{q}q}(z)$ задается редукционными формулами для ядра $\mathcal{C}[\theta(y > x)] \bar{v}(x, y)$, содержащего стандартные θ -функции.

9. СТРУКТУРА ЯДРА ЭВОЛЮЦИИ

Суммируя вклады всех диаграмм приложения А, получим полный результат

$$V(x, y) = \frac{\alpha_s}{4\pi} [V_0(x, y)]_+ + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{N_f}{2} C_F V_N(x, y) + \frac{1}{2} C_F C_A V_G(x, y) + C_F^2 V_F(x, y) \right]_+ \quad /9.1/$$

$$V_0(x, y) = C_F \mathcal{C}[\theta(y > x)] F(x, y), \quad /9.2/$$

$$V_N(x, y) = \mathcal{C}[\theta(y > x)] \left[-\frac{10}{9} F - \frac{2}{3} \frac{x}{y} - \frac{2}{3} F \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad /9.3/$$

$$V_G(x, y) = \mathcal{C}[\theta(y > x)] \left(\frac{67}{9} F + \frac{17}{3} \frac{x}{y} + \frac{11}{3} F \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2\bar{F} \ln y \ln \bar{x} \right) + G(x, y), \quad /9.4/$$

$$V_F(x, y) = \mathcal{C}[\theta(y > x)] \left[-\frac{\pi^2}{3} F + \frac{x}{y} - \left(\frac{3}{2} F - \frac{x}{2\bar{y}}\right) \ln\left(\frac{x}{y}\right) - (F - \bar{F}) \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \right. \\ \left. + \left(F + \frac{x}{2\bar{y}}\right) \ln^2\left(\frac{x}{y}\right) - 2\bar{F} \ln y \ln \bar{x} \right] - \frac{x}{2\bar{y}} \ln x (1 + \ln x - 2 \ln \bar{x}) - G(x, y), \quad /9.5/$$

где $F = F(x, y) = \frac{x}{y} \left(1 + \frac{1}{y-x}\right)$, $\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y})$, а функция $G(x, y)$ дается выражением

$$G(x, y) = \theta(x > \bar{y}) \left[2(F - \bar{F}) \text{Li}_2\left(i - \frac{x}{y}\right) - 2F \ln x \ln y + (F - \bar{F}) \ln^2 y \right] + \\ + 2F \cdot \text{Li}_2(\bar{y}) [\theta(x > \bar{y}) - \theta(y > x)] - 2F \cdot \text{Li}_2(x) [\theta(x > \bar{y}) - \theta(x > y)].$$

где $\text{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{dt}{t} \ln(1-t)$ - функция Спенса.

Для последующих приложений необходимо знать также явный вид решений уравнения эволюции /2.3/. Известно, что в низшем приближении эта задача сводится к нахождению собственных функций ядра $V(x, y; g)$, которыми, как оказалось, являются полиномы Гегенбауэра $\bar{x} x C_n^{3/2}(x - \bar{x})^{3,9/}$. Однопетлевое ядро эволюции V_0 /см. 9.2/ становится симметричной функцией своих аргументов после умножения на $y\bar{y}$: $V_0(x, y) y\bar{y} = V_0(y, x) x\bar{x}$. Это свойство и определяет функции $\phi_n = \bar{x} x C_n^{3/2}(x - \bar{x})$ как собственные функции $V_0(x, y)$, т.е. решение уравнения есть $\int_0^1 dy V_0(x, y) \phi_n(y) = \lambda_n \phi_n(x)$.

На двухпетлевом уровне, однако, комбинация $y\bar{y} V(x, y)$ содержит члены, нарушающие $x \rightarrow y$ симметрию. В V_G и V_N /см. /8.3/, /9.4// такими членами являются $\frac{11}{3} F \ln(x/y)$ и $-\frac{2}{3} F \ln(x/y)$ соответственно. В сумме, с учетом групповых факторов эти члены пропорциональны первому коэффициенту β_0 в β -функции Гелл-Манна-Лоу:

$$C_F \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{11}{3} C_A - \frac{2}{3} N_f\right) \mathcal{C}[\theta(y > x)] F \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -C_F \beta \mathcal{C}[\theta(y > x)] F \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Подобный результат на самом деле был предсказан^{21/} до того, как были выполнены расчеты^{6-8/}. Предсказание основано на тесной связи между собственными функциями ядра $V(x, y)$, т.е. мультипликативно-перенормируемыми операторами и конформными операторами^{9/}. Поскольку конформная инвариантность нарушается процедурой перенормировки /константы связи, например/, нет никаких оснований ожидать, что являющиеся конформно-инвариантными для свободных полей операторы окажутся мультипликативно-перенормируемыми на двухпетлевом уровне^{17/}. Выясним источники возникновения β -функции в полном ответе. В функцию $F \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \ln\left(\frac{x}{y}\right) +$

$+\frac{x}{y} \frac{1}{y-x} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ в /9.3/ и /9.4/, а также в член $\frac{3}{2} F \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ в V_F вносят вклады два различных класса диаграмм. Коэффициент β_0 при структуре $\mathcal{C}\theta(y>x) \frac{x}{y} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ формируется диаграммами б, в, г, д, е.

Учет этих диаграмм приводит фактически к перенормировке заряда в вершинах однопетлевой диаграммы рис.5а. Причем, диаграммы в, г вносят вклад, пропорциональный $\Delta.p.$ u_C глюонной линии; диаграммы д, е вносят вклад в перенормировку вершины; диаграмма б перенормирует выходящую из вершины кварковую линию. Соответственно, диаграммы з, и, к, л, м формируют коэффициент β_0 при структуре $\mathcal{C}\theta(y>x) \frac{x}{y} \frac{1}{y-x} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, что можно непосредственно усмотреть и из общих формул /5.5/ и /5.7/ для примитивных диаграмм. Этот класс диаграмм осуществляет перенормировку заряда в вершине однопетлевой диаграммы рис.5б. Однако в полном ответе в $\bar{y}u V_F(x, y)$ имеются вклады /например, пропорциональные $\ln^2(x/y)$ /, нарушающие $x \rightarrow y$ симметрию более нетривиальным образом. Дальнейшей проблемой является выяснение природы этих вкладов и их влияние на решение уравнения эволюции.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе описан новый метод расчета ядер эволюции $V(x, y)$ и $P(z)$ в КХД в фейнмановской калибровке. Для некоторых классов диаграмм установлена общая форма ответа, при этом "эксклюзивное" ядро $V(x, y)$ полностью выражается через "инклюзивное" $P(z)$.












Предложен способ проверки ядра посредством редукционной формулы, сводящей $V(x, y)$ к $P(z)$.

В качестве приложения метода нами вычислен двухпетлевой вклад в $V(x, y)$ /и в $P(z)$ /. Отметим, что для этого требуется собственно вычислять всего лишь 6 диаграмм, т.е. столько же, сколько в аксиальной калибровке. Результаты для остальных диаграмм можно воспроизвести по общим формулам, зная $P(z)$. В полученном выражении проанализированы структуры, нарушающие $x \rightarrow y$ симметрию комбинации $\bar{y}u V(x, y)$, что связано с важной задачей на будущее - построением решения уравнения эволюции в двухпетлевом приближении.

Мы благодарны Ф.-М.Диттесу за многочисленные стимулирующие обсуждения и советы. Один из нас /А.Р./ признателен С.Бродскому, Н.Крэйги и В.Добреву за полезные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом приложении дана сводка результатов для вкладов отдельных диаграмм в $V(x, y)$ /"з.с." означает: "зеркально-симметричная" диаграмма/.

a		$-8 c_F^2 \cdot \theta(y>x) \left[2 \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2} \frac{x}{y} \ln^2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \ln x \ln y + \frac{x}{y} \ln y - \frac{1}{2} \frac{x}{y} \ln^2 y \right] + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
б		$+3c \cdot \left\{ \frac{x}{y} (2 + \ln x) - \theta(y>x) \frac{x}{y} (1 - \frac{x}{y}) (2 + \ln(1 - \frac{x}{y})) \right\} + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
в		$-2 \left\{ \theta(y>x) \frac{x}{y} \left(\frac{46}{9} + \frac{15}{3} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right) + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x} \right\} + \frac{16}{3} \delta(y-x)$
г		$2 \left\{ \theta(y>x) \frac{x}{y} \left(3 \frac{x}{y} + \frac{4}{3} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right) + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x} \right\} - \frac{8}{9} \delta(y-x)$
д		$+3c \cdot \left\{ 2x \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \right) \ln x \ln y + \frac{x}{y} \ln^2 x + 5x \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \right) \ln y + x \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \right) \ln^2 y + \left(\frac{1+x}{y} - \frac{x}{y} \right) \ln(1 - \frac{x}{y}) \right\} + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
е		$+3c \cdot \left\{ 2x \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \right) \ln y + 2 \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \right) \ln(1 - \frac{x}{y}) + \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \right) \ln^2(1 - \frac{x}{y}) - \frac{x}{y} \ln^2 y \right\} + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
ж		$+2 c_F (c_F - \frac{c_A}{2}) \cdot \left(\frac{x}{y} + 2 \frac{x}{y} \ln x + \frac{x}{y} \ln^2 x + \theta(y>x) \left[\frac{1+x}{y} + \frac{1-3x}{y} + \frac{2x}{y} \ln x + \frac{x}{y} \ln^2 x \right] \right) + 2 \frac{x}{y} \ln x \ln y - \frac{x}{y} \ln^2 y + \theta(y>x) \left[\frac{1+2x}{y} + \frac{2x-1}{y} - 2 \frac{x}{y} \ln^2\left(\frac{x}{y}\right) - 4 \frac{x}{y} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right] + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
з		$+3c \cdot \left\{ \theta(y>x) \left[(F(x, y) - \frac{x}{y}) (1 + \ln(1 - \frac{x}{y})) \right] \right\} + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
и		$+3c \cdot \left\{ \theta(y>x) \left[(F(x, y) - \frac{x}{y}) \left(\frac{20}{9} + \frac{4}{3} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right) \right] \right\} + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
к		$+3c \cdot \left\{ \theta(y>x) \left[(F(x, y) - \frac{x}{y}) \left(\frac{62}{9} + \frac{10}{3} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \right) \right] \right\} + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$
л		$+3c \cdot \left\{ \theta(y>x) \left[(F(x, y) - \frac{x}{y}) \left(-1 + 3 \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln^2\left(\frac{x}{y}\right) - \ln(1 - \frac{x}{y}) \right) - \frac{3}{y} \ln(1 - \frac{x}{y}) \right] \right\} + \frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x}$

В этом приложении приведем основные формулы для импульсного интегрирования с δ -функциями из эффективного вертекса, достаточные для вычисления V_{j0} (P_{j0})-ядер в двухпетлевом приближении. Эти формулы можно получить, переходя в импульсных интегралах к a -представлению. Чтобы предотвратить появление константы Эйлера γ_E и $\ln(4\pi)$ в промежуточных выкладках, будем домножать размерно-регуляризованные интегралы /начиная с /Б2// на схемный фактор $M(\epsilon) = (4\pi)^{-\epsilon} \Gamma(1-\epsilon) / \overline{MS}$ -схема /19/, не выписывая его явно. Ниже $N = 4 - 2\epsilon$ - размерность пространства-времени

$$\int d^N k \frac{\delta(z_0 - \frac{kn}{P_n}) \delta(z_1 - \frac{kn}{P_n}) F(k, p)}{(k^2 - m_1^2)^{n_1} [(k-q)^2 - m_2^2]^{n_2} [(k-l)^2 - m_3^2]^{n_3}} =$$

$$= i(-\pi)^{N/2} \frac{\Gamma(n_1+n_2+n_3-N/2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(n_3)} \int_0^1 |d\beta_2 d\beta_3| (1-\beta_2-\beta_3)^{n_1-1} \beta_2^{n_2-1} \beta_3^{n_3-1} \times$$

$$\times (F(P) + (\xi n) F_1(P)) \delta(z_0 - \frac{\xi n}{P_n}) \delta(z_1 - \frac{\xi n}{P_n}) A^{\frac{N}{2} - n_1 - n_2 - n_3},$$


где

$$F(k, P) = F(P) + (kn) F_1(P); \quad \xi = \beta_2 q + \beta_3 l;$$


$$|d\beta_2 d\beta_3| = \theta(1 - \beta_2 - \beta_3) d\beta_2 d\beta_3; \quad A = \beta_2 \cdot q^2 + \beta_3 l^2 - \xi^2 - \beta_3 m_3^2 - \beta_2 m_2^2 - (1 - \beta_2 - \beta_3) m_1^2.$$

Массы m_1, m_2, m_3 осуществляют инфракрасную регуляризацию интеграла в случаях, когда это необходимо. На основе формулы /Б.1/ нами получены общие формулы для двухпетлевых скалярных интегралов. Эти интегралы возникают при разложении исходных фейнмановских интегралов в ходе процедуры, описанной в конце раздела 7. Существует четыре основных типа скалярных интегралов /формулы Г.2-Г.6/. Соответствующие им диаграммы даны на рис.6-9. Всюду ниже принято $P^2=0$, а во внутренние линии вставлена масса m . Знаменатели типа $(m^2)^{2\epsilon}$ нигде не выписаны, так как они все равно сокращаются с учетом контрчленов /см. обсуждение в разделе 6/. Параметры a, b, c, d в интегралах упорядочены $c > d, a > b$.


М



$$4 C_F C_A \cdot \left\{ \theta(y>x) \left[(F(x,y) - \frac{x}{y}) (-3 + \ln(\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} \ln^2(1-\frac{x}{y})) - \frac{1}{2} y \ln^2(1-\frac{x}{y}) \right] + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}}{y \leftrightarrow \bar{y}} \right\}$$

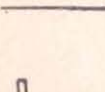


$$4 C_F^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} y (-6\bar{x} - 2x \ln x - 4\bar{x} \ln \bar{x} + x \ln^2 x - \bar{x} \ln^2 \bar{x}) - \theta(y>x) \left[\frac{1}{2} (-6(1-\frac{x}{y}) - 2\frac{x}{y} \ln(\frac{x}{y}) - 4(1-\frac{x}{y}) \ln(1-\frac{x}{y}) + \frac{x}{y} \ln^2(\frac{x}{y}) - (1-\frac{x}{y}) \ln^2(1-\frac{x}{y}) - 4(1-\frac{x}{y}) S(1-\frac{x}{y})) \right] + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}} \right\}$$




$$2 C_F C_A \cdot \theta(y>x) \left\{ -\frac{x}{y} \ln(\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} (F(x,y) - \frac{x}{y}) \frac{1}{y} \ln^2(\frac{x}{y}) + (\frac{x}{y} + \frac{1+x}{y}) \ln(1-\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} y \ln^2(1-\frac{x}{y}) + 2 (\frac{x}{y} - \frac{x}{y}) (S(\frac{x}{y}) - S(1-\frac{x}{y})) + (F(x,y) - \frac{x}{y}) \frac{1}{y} 2 S(\frac{x}{y}) - \frac{1}{2} y \left[\frac{1}{2} \frac{x}{y-x} \ln^2(\frac{x}{y}) + 2 \ln(1-\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} \ln^2(1-\frac{x}{y}) + 2 S(1-\frac{x}{y}) + 2 \frac{S(\frac{x}{y})}{1-\frac{x}{y}} \right] \right\} + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}}{y \leftrightarrow \bar{y}}$$

$$+ 2 C_F C_A \cdot \frac{1}{y} (2(S+x) S(x) + x \ln x) + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}}{y \leftrightarrow \bar{y}}$$



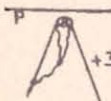
$$-4 C_F (C_F - \frac{C_A}{2}) \theta(y>x) \left\{ \frac{1}{2} [-2(1-\frac{x}{y})(S(\frac{x}{y}) - S(1-\frac{x}{y})) - 2 \frac{x}{y} \ln(1-\frac{x}{y}) + (1-\frac{x}{y}) \ln^2(1-\frac{x}{y}) - 2(1-\frac{x}{y}) \ln(\frac{x}{y}) - 2(1+x) + 2(1-\frac{x}{y}) S(1-\frac{x}{y})] + \frac{1}{y} [2 S(\frac{x}{y}) +$$



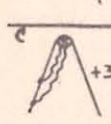
$$2 \ln(1-\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} (y-x) \ln^2(\frac{x}{y}) + \bar{x} \ln(\frac{x}{y}) - x \ln(\frac{x}{y}) + 4x] + (F+F) [\frac{1}{2} \ln^2(\frac{x}{y}) - \frac{1}{2} \ln^2(\frac{x}{y}) + \ln \bar{x} \ln x - \ln y \ln \bar{y} + \ln(\frac{x}{y}) - \ln(\frac{x}{y}) + 2(Li_2(y) - Li_2(\bar{x}))] + (F-F) [2 S(\frac{x}{y}) + \ln(\frac{x}{y}) \cdot (-\ln(\frac{x}{y}) - 2 \ln(1-\frac{x}{y}) + 2 \ln(\frac{x}{y}) + \frac{3}{2} \ln(\frac{x}{y}))] \right\} + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}}{y \leftrightarrow \bar{y}}$$

$$-4 C_F (C_F - \frac{C_A}{2}) \left\{ \frac{1}{y} (2(x+\bar{y}) S(x) + x \ln^2 x + y (\ln x + \ln y) + 1) + \frac{1}{2} (F \ln^2(\frac{x}{y}) + F \ln(\frac{x}{y})) \right\} + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}}$$

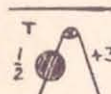
$$-4 C_F (C_F - \frac{C_A}{2}) \theta(y>x) \left\{ (F+F) (2 Li_2(\bar{x}) - 2 Li_2(y) + \ln \bar{x} \ln \bar{y} - \ln x \ln y) + (F-F) (2 Li_2(1-\frac{x}{y}) - 2 Li_2(1-\frac{\bar{y}}{y}) + \ln(\frac{x}{y}) \ln(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y} (x-\bar{y}) - 2 \frac{x}{y} \ln^2(\frac{x}{y}) + 2 \frac{\bar{y}}{y} \ln(\frac{\bar{y}}{y}) - 2 \frac{x}{y} \ln(x/\bar{y})) \right\} + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}}$$



$$4 C_F C_A \cdot \left\{ \theta(y>x) \left[(F(x,y) - \frac{x}{y}) (-2 - 2 \ln(\frac{x}{y}) - \frac{1}{2} \ln^2(\frac{x}{y}) - 2 S(\frac{x}{y}) + \ln(1-\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} \ln^2(1-\frac{x}{y})) + \frac{1}{y} (\ln^2(1-\frac{x}{y}) + 2 \ln(1-\frac{x}{y})) \right] + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}}{y \leftrightarrow \bar{y}} \right\} +$$



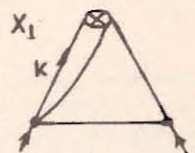
$$4 C_F (C_F - \frac{C_A}{2}) \left\{ \frac{x}{y} \ln(1-\frac{x}{y}) - 2 (F(x,y) - \frac{x}{y}) (\ln^2(\frac{x}{y}) + 2 S(\frac{x}{y})) \right\} - \frac{1}{2} C_F C_A \cdot \left[(F(x,y) - \frac{x}{y}) (4 + 4 S(1-\frac{x}{y}) + \ln^2(\frac{x}{y}) + 2 \ln(1-\frac{x}{y}) + \ln^2(1-\frac{x}{y})) \right] + \frac{x \leftrightarrow \bar{x}}{y \leftrightarrow \bar{y}}$$



$$\frac{1}{2} \delta(y-x) \cdot \left\{ \frac{3}{2} C_F C_A - 3 C_F (C_F - \frac{C_A}{2}) - 4 C_F T_2 \right\}$$

Во вкладках диаграмм н, о, п, р, с нами использовано обозначение $S(z) = Li_2(z) - Li_2(1)$.

Рис. 6. Скалярные диаграмма для V-интегралов.



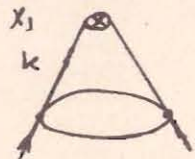
$$\begin{aligned}
 & -(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn})}{(k - bP)^2 (k - l)^2 (\ell - cP)^2 (\ell - dP)^2} \frac{d^N \ell d^N k}{(2\pi)^{2N}} \equiv V(b|c, d|1) = \\
 & = \frac{1}{2\epsilon} \frac{1}{y_2} \left\{ \theta(x_1) \theta(y_1 + y_2 > x_1) \cdot J\left(\frac{x_1}{y_1 + y_2}\right) - \theta(x_1) \theta(y_1 > x_1) \cdot J\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + \theta(-x_1) \theta(x_1 > y_1 + y_2) \cdot J\left(\frac{x_1}{y_1 + y_2}\right) - \theta(-x_1) \theta(x_1 > y_1) \cdot J\left(\frac{x_1}{y_1}\right) \right\}. \quad /Б2/
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $x_1 = x - b$; $y_1 = d - b$; $y_2 = c - d > 0$;

$$J(v) = -\frac{1}{\epsilon} \ln v + \frac{1}{2} \ln v; \quad S(v) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1-v}{v} - 2 \frac{1-v}{v} + \frac{1+v}{v} \ln v.$$

$$\begin{aligned}
 & -(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn}) \frac{\ell n}{Pn}}{(k - bP)^2 (k - l)^2 (\ell - cP)^2 (\ell - dP)^2} \frac{d^N \ell d^N k}{(2\pi)^{2N}} \equiv V(b|c, d| \frac{\ell n}{Pn}) = \\
 & = \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \theta(x_1) \theta(y_1 + y_2 > x_1) \left[\frac{b}{y_2} J\left(\frac{x_1}{y_1 + y_2}\right) + \frac{x_1}{y_2} S\left(\frac{x_1}{y_1 + y_2}\right) \right] - \right. \\
 & \quad - \theta(x_1) \theta(y_1 > x_1) \left[\frac{b}{y_2} J\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{x_1}{y_2} S\left(\frac{x_1}{y_1}\right) \right] + \theta(-x_1) \theta(x_1 > y_1 + y_2) \left[\frac{b}{y_2} J\left(\frac{x_1}{y_1 + y_2}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{x_1}{y_2} S\left(\frac{x_1}{y_1 + y_2}\right) \right] - \theta(-x_1) \theta(x_1 > y_1) \left[\frac{b}{y_2} J\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{x_1}{y_2} S\left(\frac{x_1}{y_1}\right) \right] \right\}. \quad /Б3/
 \end{aligned}$$

Рис. 7. Скалярная диаграмма для W-интегралов.



$$\begin{aligned}
 & -(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn})}{(k - aP)^2 (k - bP)^2 (k - l)^2 (\ell - cP)^2} \frac{1}{\frac{\ell n}{Pn}} \frac{d^N k d^N \ell}{(2\pi)^{2N}} \equiv \\
 & \equiv W(a, b|c| \left\{ \frac{1}{\frac{\ell n}{Pn}} \right\}) \stackrel{a \neq b}{=} \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \frac{1}{\frac{x_1 + y_1}{2} + b} \right\} \frac{1}{y_1 + y_2} \left\{ \theta(y_1 + y_2 > x_1) \theta(x_1) \left(\frac{1}{\epsilon} + 2 \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \theta(x_1) \theta(y_1 > x_1) \ln\left(\frac{x_1}{y_1}\right) - \theta(x_1) \theta(x_1 > y_1 + y_2) \ln\left(\frac{[y_1 + y_2] - x_1}{[y_1 + y_2] - y_1}\right) + \\
 & + \theta(x_1 > y_1) \theta(y_1 + y_2 > x_1) \ln\left(\frac{[y_1 + y_2] - x_1}{[y_1 + y_2] - y_1}\right) - \theta(-x_1) \theta(x_1 > y_1) \ln\left(\frac{x_1}{y_1}\right) \Big\} = \quad /Б4/
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{a=b \neq c}{=} \frac{1}{2\epsilon} \frac{1}{\frac{x_1 + y_1}{2} + b} \left(\theta(-x_1) \theta(x_1 > y_1) + \theta(x_1) \theta(y_1 > x_1) \right) \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{x_1} \right).$$

Здесь $x_1 = x - b$; $y_1 = c - b$; $y_2 = a - c$; $y_1 + y_2 = a - b \geq 0$; $x > 0$.

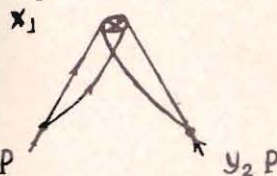


Рис. 8. Скалярная диаграмма для X-интегралов.

$$\begin{aligned}
 & -(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn})}{(k - l)^2 (k - l - y_1 P)^2 \ell^2 (\ell - y_2 P)^2} \frac{d^N \ell d^N k}{(2\pi)^{2N}} \equiv X(y_1, y_2 | 1) = \\
 & = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{y_1 y_2} \left\{ \theta(y_1 + y_2 > x) \theta(y_1) \theta(y_2) [\theta(x > y_1) y_1 + \theta(x > y_2) y_2] + \right. \\
 & \quad + [\theta(y_2 > x) \theta(y_1 > x) - \theta(y_1 + y_2 > x) \theta(x > y_1) \theta(x > y_2)] \cdot x + \\
 & \quad + \theta(y_1 + y_2 > x) [\theta(-y_2) \theta(y_1 > x) y_2 + \theta(-y_1) \theta(y_2 > x) y_1] + \\
 & \quad \left. + \theta(x > y_1 + y_2) [\theta(-y_2) \theta(y_1 > x) \cdot (x - y_1) + \theta(-y_1) \theta(y_2 > x) \cdot (x - y_2)] \right\}. \quad /Б5/
 \end{aligned}$$



Рис. 9. Скалярная диаграмма для Phi-интегралов.

$$\begin{aligned}
 & -(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn})}{(k - aP)^2 (k - bP)^2 \ell^2 (\ell - cP)^2} \left\{ \frac{1}{\frac{\ell n}{Pn}} \right\} \frac{d^N \ell d^N k}{(2\pi)^{2N}} \equiv \\
 & \equiv \Phi(a, b|c| \left\{ \frac{1}{\frac{\ell n}{Pn}} \right\}) = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\theta(a > x > b)}{a - b} \cdot \left\{ \frac{1}{\frac{c}{2}} \right\}, \quad /Б6/
 \end{aligned}$$

$$-(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn}) (\frac{\ell P}{Pn})}{k^2(k-P)^2(k-yP)^2(k-\ell)^2(\ell-yP)^2} \frac{d^N \ell d^N k}{(2\pi)^{2N}} =$$

$$= \frac{1}{8\epsilon^2} \{E(x, y) + \epsilon \cdot [2E(x, y) + \theta(x > y) \frac{1}{y} \ln(\frac{\bar{x}}{y}) - \theta(y > x) \frac{1}{y} \ln(\frac{x}{y})]\}. \quad /Б7/$$

$$-(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn}) (\frac{\ell P}{Pn})}{k^2(k-P)^2(k-yP)^2(k-\ell)^2(\ell-P)^2} \frac{d^N \ell d^N k}{(2\pi)^{2N}} =$$

$$= \frac{1}{8\epsilon^2} \{E(x, y) + \epsilon \cdot [2E(x, y) + \theta(x > y) \frac{1}{y\bar{y}} \ln(1 - \frac{\bar{x}}{y}) - \frac{1}{y} \ln x]\}. \quad /Б8/$$

$$\text{Здесь } E(x, y) = \theta(x > y) \frac{1}{y} - \theta(y > x) \frac{1}{y}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В этом приложении будут приведены базисные двухпетлевые интегралы, полученные по формулам /Б2/-/Б6/ приложения Б. Все прочие интегралы этих типов получаются сдвигом переменных интегрирования: $k \rightarrow P - k$, $\ell \rightarrow P - \ell$; $k \rightarrow P - k$, $\ell \rightarrow \ell - k + yP$, и отражением аргументов $x \rightarrow \bar{x}$ /или/, $y \rightarrow \bar{y}$ в базисных интегралах. Такими преобразованиями, например, связаны первые 6 интегралов в таблице. Используя эти преобразования для таблицы базисных интегралов, а также формулы /Б1/, /Б7/, /Б8/, можно получить все интегралы, необходимые при вычислении вкладов диаграмм а, б, в, г, д, е, ж в ядра V- и P-типов.

Ниже: V, W, X, Ф - обозначения интегралов, а J и S - функций из приложения Б. Функция $\omega(z) = \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon} (2 + \ln z)$.

Таблица базисных интегралов

$$V(1|1, y | \frac{\ell n}{Pn}) = \theta(x > y) \frac{1}{y} (J(\frac{\bar{x}}{y}) - \bar{x}S(\frac{\bar{x}}{y})),$$

$$V(1|1, y | 1) = \theta(x > y) \frac{1}{y} J(\frac{\bar{x}}{y}),$$

$$V(0|y, 0 | \frac{\ell n}{Pn}) = \theta(y > x) \frac{x}{y} S(\frac{y}{y}),$$

$$V(0|y, 0 | 1) = \theta(y > x) \frac{1}{y} J(\frac{x}{y}),$$

$$-(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn}) \frac{\ell n}{Pn}}{(k-P)^2(k-\ell)^2(k-\ell-yP)^2(\ell-yP)^2} \frac{d^N k d^N \ell}{(2\pi)^{2N}} =$$

$$= \theta(x > y) \{ \frac{\bar{x}}{y} S(\frac{\bar{x}}{y}) - (1 - \frac{x}{y}) J(\frac{\bar{x}}{y}) \},$$

$$-(4\pi)^4 \iint \frac{\delta(x - \frac{kn}{Pn})}{(k-P)^2(k-\ell)^2(k-\ell-yP)^2(\ell-yP)^2} \frac{d^N k d^N \ell}{(2\pi)^{2N}} = \theta(x > y) \frac{1}{y} J(\frac{\bar{x}}{y}),$$

$$V(1|\bar{y}, 0 | x - \frac{\ell n}{Pn}) = \frac{\bar{x}}{y} (S(\bar{x}) - J(\bar{x})) - \theta(y > \bar{x}) \frac{\bar{x}}{y} (S(\frac{\bar{x}}{y}) - J(\frac{\bar{x}}{y})),$$

$$V(1|\bar{y}, 0 | 1) = \frac{1}{y} (J(\bar{x}) - \theta(y > \bar{x}) J(\frac{\bar{x}}{y})),$$

$$V(y|1, 0 | \frac{\ell n}{Pn}) = \theta(y > x) [yJ(1 - \frac{x}{y}) - (y-x)S(1 - \frac{x}{y})] +$$

$$+ \theta(x > y) [yJ(1 - \frac{\bar{x}}{y}) - (y-x)S(1 - \frac{\bar{x}}{y})],$$

$$V(y|1, 0 | 1) = \theta(y > x) J(1 - \frac{x}{y}) + \theta(x > y) J(1 - \frac{\bar{x}}{y}),$$

$$V(y|y, 0 | \frac{\ell n}{Pn}) = \theta(y > x) [J(1 - \frac{x}{y}) - (1 - \frac{x}{y})S(1 - \frac{x}{y})],$$

$$V(y|y, 0 | 1) = \theta(y > x) \frac{1}{y} J(1 - \frac{x}{y}),$$

$$V(0|1, y | \frac{\ell n}{Pn}) = \theta(y > x) \frac{x}{y} (S(x) - S(\frac{x}{y})) + \theta(x > y) \frac{x}{y} S(x),$$

$$V(0|1, y | 1) = \theta(y > x) \frac{1}{y} (J(x) - J(\frac{x}{y})) + \theta(x > y) \frac{1}{y} J(x),$$

$$V(0|1, 0 | \frac{\ell n}{Pn}) = xS(x),$$

$$V(0|1, 0 | 1) = J(x),$$

$$V(0|\bar{y}, 0 | x - \frac{\ell n}{Pn}) = \theta(\bar{y} > x) \frac{x}{y} (J(\frac{x}{y}) - S(\frac{x}{y})),$$

$$V(0|\bar{y}, 0 | 1) = \theta(\bar{y} > x) \frac{1}{y} J(\frac{x}{y}),$$

$$W(1, y | 1 | \frac{\ell n}{Pn}) = \theta(x > y) \frac{1+x}{2y} \omega(1 - \frac{x}{y}),$$

$$W(1, y | 1 | 1) = \theta(x > y) \frac{1}{y} \omega(1 - \frac{\bar{x}}{y}),$$

$$W(1, 0|1| \frac{f_n}{P_n}) = \frac{1}{2}(1+x)\omega(x),$$

$$W(1, 0|1|1) = \omega(x),$$

$$W(1, 0|y| \frac{f_n}{P_n}) = \frac{x+y}{2}[\theta(y>x)\omega(\frac{x}{y}) + \theta(x>y)\omega(\frac{\bar{x}}{y})],$$

$$W(1, 0|y|1) = \theta(y>x)\omega(\frac{x}{y}) + \theta(x>y)\omega(\frac{\bar{x}}{y}),$$

$$W(1, 0|\bar{y}| \frac{f_n}{P_n} - \bar{y}) = \frac{x-\bar{y}}{2}[\theta(\bar{y}>x)\omega(\frac{x}{\bar{y}}) + \theta(x>\bar{y})\omega(\frac{\bar{x}}{\bar{y}})],$$

$$W(1, 0|\bar{y}|1) = \theta(\bar{y}>x)\omega(\frac{x}{\bar{y}}) + \theta(x>\bar{y})\omega(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}),$$

$$W(y, 0|1| \frac{f_n}{P_n}) = \frac{1+x}{2}[\theta(y>x)\frac{1}{y}\omega(x) + \theta(x>y)\frac{1}{2\epsilon}\frac{1}{y}\ln(\frac{x\bar{y}}{x-y})],$$

$$W(y, 0|1|1) = \theta(y>x)\frac{1}{y}\omega(x) + \theta(x>y)\frac{1}{2\epsilon}\frac{1}{y}\ln(\frac{x\bar{y}}{x-y}),$$

$$W(y, 0|y| \frac{f_n}{P_n}) = \theta(y>x)\frac{1}{2}(1+\frac{x}{y})\omega(\frac{x}{y}),$$

$$W(y, 0|y|1) = \theta(y>x)\frac{1}{y}\omega(\frac{x}{y}),$$

$$X(\bar{y}, y| \frac{f_n}{P_n}) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{y\bar{y}}\{\theta(x>\bar{y})\cdot[\theta(x>y)\bar{x}(y-\frac{\bar{x}}{2}) + \theta(y>x)\bar{y}(x-\frac{\bar{y}}{2}) + \theta(\bar{y}>x)\cdot[\theta(x>y)\frac{y^2}{2} + \theta(y>x)\frac{x^2}{2}]]\},$$

$$X(\bar{y}, y|1) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{y\bar{y}}\{\theta(x>\bar{y})[\theta(y>x)\bar{y} + \theta(x>y)\bar{x}] + \theta(\bar{y}>x)[\theta(y>x)\cdot x + \theta(x>y)\cdot y]\},$$

$$X(-1, 1| \left\{ \begin{array}{c} \frac{f_n}{P_n} \\ 1 \end{array} \right\}) = \frac{1}{\epsilon^2}\bar{x}\left\{ \begin{array}{c} 1+x \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\},$$

$$\Phi(1, y|y| \frac{f_n}{P_n}) = \theta(x>y)\frac{1}{2\epsilon^2}\frac{y}{\bar{y}}; \quad \Phi(1, y|y|1) = \theta(x>y)\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\bar{y}};$$

$$\Phi(1, 0|y| \frac{f_n}{P_n}) = \frac{1}{2\epsilon^2}y; \quad \Phi(1, 0|y|1) = \frac{1}{\epsilon^2};$$

$$\Phi(y, 0|1| \frac{f_n}{P_n}) = \theta(y>x)\frac{1}{2\epsilon^2}\frac{1}{y}; \quad \Phi(y, 0|1|1) = \theta(y>x)\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{y};$$

$$\Phi(y, 0|y| \frac{f_n}{P_n}) = \theta(y>x)\frac{1}{2\epsilon^2}; \quad \Phi(y, 0|y|1) = \theta(y>x)\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{y}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Ниже приведены редукционные формулы для перехода $V(x, y) \rightarrow P(z)$ и введены обозначения

$$F = F(x, y) = \frac{x}{y}(1 + \frac{1}{y-x}), \quad P_0 = \frac{1+z^2}{1-z}, \quad V'(z) = \frac{d}{dz}V(z),$$

$\mathcal{C}(\theta(y>x)v(x/y)) \rightarrow p(z)$, где v аналитична в области $(0, 1)$; $f(z)$ - конечный полином по z , ζ - функция Римана.

$$\Gamma 1 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)F(x, y)) \rightarrow P_0'(z);$$

$$\Gamma 2 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)F(x, y) \cdot v(\frac{x}{y})) \rightarrow P_0(z)v(z) + zp(z);$$

$$\Gamma 3 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)F(\bar{x}, \bar{y})v(\frac{x}{y})) \rightarrow zp(z) - \frac{1+z}{1-z}v(z);$$

$$\Gamma 4 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)v(\frac{x}{y})f(\frac{x}{y})) \rightarrow f(z)p(z);$$

$$\Gamma 5 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)v(\frac{x}{y})\frac{\bar{x}}{y\bar{y}}) \rightarrow v(z) \cdot (1+z);$$

$$\Gamma 6 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)F(\bar{x}, \bar{y})\ln y \ln \bar{x}) \rightarrow 1 - z + \frac{1}{2}\frac{z}{1-z}\ln^2 z + z \ln z;$$

$$\Gamma 7 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)(F(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\bar{x}}{y})\ln y \ln \bar{x}) \rightarrow \frac{1}{2}\frac{z}{1-z}\ln^2 z - \zeta(3)\delta(1-z);$$

$$\Gamma 8 \quad \text{а) } \mathcal{C}(\theta(y>x)v(\frac{x}{y})) \rightarrow \bar{z}v'(z) = p(z); \quad \text{б) } \delta(y-x)C \rightarrow \delta(1-z)C;$$

$$\Gamma 9 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)\frac{y}{y}v(\frac{x}{y})) \rightarrow -v'(z)\bar{z} - v(z);$$

$$\Gamma 10 \quad \mathcal{C}(\frac{1}{y}P(x)) \rightarrow P(z); \quad \mathcal{C}(\frac{y}{y}P(x)) \rightarrow P(z);$$

$$\Gamma 11 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)\frac{x}{y}\ln x \ln y) \rightarrow \bar{z}(\ln(\bar{z}) - 1) - \int \frac{1}{t} \frac{dt}{t} \ln(1-t);$$

$$\Gamma 12 \quad \mathcal{C}(\theta(y>x)(-)\frac{x}{y}\ln y) \rightarrow \ln^2(z) + 2 \int \frac{1}{t} \frac{dt}{t} \ln(1-t) + 2\bar{z}(\ln z - \ln(\bar{z}) + 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Липатов Л.Н. ЯФ, 1974, 20, с.181.
2. Altarelli G., Parisi G. Nucl.Phys., 1977, B126, p.298.
3. Brodsky S.J., Lepage G.P. Phys.Lett., 1979, 87B, p.359.
4. Floratos E.G., Lacaze R., Kounnas C. Phys.Lett., 1981, 98B, p.89.
5. Curci G., Furmanski W., Petronzio R. Nucl.Phys., 1980, B175, p.27.
6. Sarmadi M.H. PITT-82-10, Pittsburgh, 1982.
7. Dittes F.-M., Radyushkin A.V. JINR, E2-83-666, Dubna, 1983.
8. Михайлов С.В., Радюшкин А.В. ОИЯИ, P2-83-721, Дубна, 1983.
9. Радюшкин А.В. ОИЯИ, P2-10717, Дубна, 1977; Efremov A.V., Radyushkin A.V. Phys.Lett., 1980, 94B, p.245.
10. Floratos E.G., Ross D.A., Sachrajda C.T. Nucl.Phys., 1977, B129, p.66(E), 1978, b139, p.545.
11. Craigie N.S., Stern J. Nucl.Phys., 1983, B216, p.209.
12. Radyushkin A.V. Phys.Lett.B, 1983, 181, p.179.
13. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. ТМФ, 1980, 44, с.327.
14. Владимиров А.А. ТМФ, 36, с.271; ТМФ, 1980, 43, с.210.
15. Braaten E., Leveille J. Phys.Rev., 1981, D24, p.1369.
16. Speer E. J.Math.Phys., 1974, 15, p.1; Collins J.C. Nucl. Phys., 1974, B80, p.341.
17. Михайлов С.В., Радюшкин А.В. ОИЯИ, P2-84-329, Дубна, 1984.
18. Strubbe H. Comp.Phys.Comm., 1974, 8, p.1.
19. Bardeen W.A. et al. Phys.Rev.D, 1978, 18, p.3938.
20. Shimizu V., Yamamoto H., Kato K. UT-370, March, 1982.
21. Migdal A.A. Ann.of Phys., 1977, 109, p.363.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июля 1984 года.

Михайлов С.В., Радюшкин А.В.

P2-84-534

Ядра эволюции в КХД: двухпетлевой расчет
в фейнмановской калибровке

Предложен новый метод вычисления ядер эволюции для не-синглетного сектора в КХД. Метод применим к эксклюзивным и некоторым инклюзивным процессам. На его основе в фейнмановской калибровке вычисляется ядро эволюции для волновой функции пиона V в двухпетлевом приближении. Этим же методом воспроизведено ядро Алтарелли-Паризи P . Для некоторых классов диаграмм установлена общая форма ответа, справедливая в любом порядке по теории возмущений. Установлены редукционные формулы перехода от V к P . Анализируется структура ядра эволюции, проводится сравнение с результатами других авторов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Mikhailov S.V., Radyushkin A.V.

P2-84-534

Evolution Kernels in QCD: Two-Loop Calculation
in Feynman Gauge

A new method of calculating the nonsinglet evolution kernels in QCD is described. This method is applicable to exclusive and some inclusive ("space-like") processes. As an application of the method the two-loop contribution to the pion wave function evolution kernel V is calculated in the Feynman gauge. In the same way we reproduce also the two-loop kernel P of the non-singlet Lipatov-Altarelli-Parisi evolution equation. For some classes of diagrams we established general properties that hold in all orders of perturbation theory. The "reduction" formulas are found that enable one to calculate a P -kernel from the corresponding V kernel. We discuss also the general structure of the 2-loop evolution kernels and compare our results with those obtained by other authors.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.
Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1984