объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-531

В.К.Мельников

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЛИННОЙ ВОЛНЫ С ПАКЕТОМ КОРОТКИХ ВОЛН

Направлено на III Международный симпозиум
по избранным проблемам статистической
механики /Дубна, 1984/

1984

Процессы с участием волн разных типов имеют широкое распространение. Простейшим примером такого процесса является взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн. Мы рассмотрим это взаимодействие в рамках предложенной ранее /1/ системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_\ell \frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial x}|\phi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \phi}{\partial t} + ic_g\frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta u\phi + \gamma\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \delta|\phi|^2\phi,$$

где u - профиль длинной волны, ϕ - комплексная огибающая пакета коротких волн, c_ℓ - фазовая скорость длинной волны, c_g - групповая скорость пакета коротких волн. Постоянные a, β, γ, δ определяются характером рассматриваемой физической задачи и являются параметрами системы. Существенно, что все величины c_ℓ, c_g, a, β, γ, δ могут принимать только вещественные значения. Кроме того, всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что параметры a, β, γ отличны от нуля. Тогда с помощью замены

$$u = v(x - c_\ell t, t), \quad \phi = \psi(x - c_\ell t, t)\exp[i\sigma(x - \tau t)],$$

где $\sigma = (c_g - c_\ell)/2\gamma$, $\tau = (c_g + c_\ell)/2$, рассматриваемая система приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta v\psi + \gamma\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \delta|\psi|^2\psi.$$

Далее, совершив масштабное преобразование

$$v = \beta^{-1}\gamma\lambda^2 v', \quad \psi = \gamma\lambda^2\psi', \quad x' = \lambda x, \quad t' = \gamma\lambda^2 t,$$

в результате получим систему /штрихи опущены/

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a\beta\lambda\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \epsilon|\psi|^2\psi, \quad \epsilon = \gamma\delta\lambda^2.$$

Подчиним теперь выбор параметра λ условию $a\beta\lambda = 2\kappa$, где $\kappa = 1$, если $a\beta\gamma > 0$, и $\kappa = -1$, если $a\beta\gamma < 0$. Этим требованием мы обеспечим сохранение ориентации плоскости x, t при указанном выше масштабном преобразовании. Таким образом, окончательно получаем следующую систему:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \epsilon|\psi|^2\psi, \quad \epsilon = \frac{4\gamma\delta}{a^2\beta^2}. \qquad /1/$$

В пространстве решений, убывающих достаточно быстро при $x\to\pm\infty$, система /1/ имеет гамильтонову форму

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\kappa\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta v}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\frac{\delta H}{\delta\psi^*}, \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = i\frac{\delta H}{\delta\psi}, \qquad /2/$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, а гамильтониан H имеет вид

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(v|\psi|^2 - \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2 + \frac{\epsilon}{2}|\psi|^4\right)dx .$$

Нетрудно убедиться, что система /2/ имеет четыре первых интеграла

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} v\,dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{v^2 + 2i\kappa\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\psi^*\right)\right\}dx, \quad I_4 = H .$$

Получающаяся из /1/ при $\epsilon = 0$ система уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial\psi}{\partial t} = v\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad /3/$$

обладает операторным представлением

$$\frac{\partial\hat{\mathfrak{L}}}{\partial t} = \mathfrak{A}^*\cdot(\hat{\mathfrak{L}} - \eta I) + (\hat{\mathfrak{L}} - \eta I)\cdot\mathfrak{A},$$

где операторы $\hat{\mathfrak{L}}$ и $\mathfrak{A}$ имеют соответственно вид

$$\hat{\mathfrak{L}} = \begin{vmatrix} \partial^2 + v & \psi \\ \psi^* & -i\kappa\partial \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} i\partial^2 + iv & 0 \\ \kappa\psi^*\partial - \kappa\frac{\partial\psi^*}{\partial x} & 0 \end{vmatrix},$$

$\mathfrak{A}^*$ - оператор, сопряженный к $\mathfrak{A}$, $I = \mathrm{diag}(1,0)$, а η - спектральный параметр. При этом символ ∂ означает, как и всюду в дальнейшем, дифференцирование по пространственной переменной x. Нетрудно видеть, что при $v = v^*$ имеем $\hat{\mathfrak{L}} = \hat{\mathfrak{L}}^*$, т.е. оператор $\hat{\mathfrak{L}}$ является самосопряженным, если функция v принимает только вещественные значения. Тем не менее, как уже отмечалось ранее [2], дискретный спектр оператора $\hat{\mathfrak{L}} - \eta I$ является комплексным. Применение метода обратной задачи позволило нам найти многосолитонное решение системы /3/. Далее указан алгоритм для получения бесконечной серии локальных законов сохранения вида

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \frac{\partial X_m}{\partial x} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где T_m и X_m являются полиномами от v, ψ, ψ^* и их производных по x соответствующего порядка. При этом определенные с помощью величин T_m первые интегралы $I_m = \int_{-\infty}^{\infty} T_m dx$ находятся в инволюции относительно скобки Пуассона

$$[I_m, I_n] = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\kappa\frac{\delta I_m}{\delta v}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta v} + i\frac{\delta I_m}{\delta\psi}\frac{\delta I_n}{\delta\psi^*} - i\frac{\delta I_m}{\delta\psi^*}\frac{\delta I_n}{\delta\psi}\right\}dx .$$

Попутно рассмотрены две системы уравнений, тесно связанные с системой /3/. Наконец, определены условия, при которых энергия длинной волны возрастает в результате взаимодействия с пакетом коротких волн.

§1. ФУНКЦИИ ЙОСТА, ЯДРО РЕЗОЛЬВЕНТЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Возьмем оператор $\mathfrak{L}$ вида

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} \partial^2 + u & v \\ w & \partial \end{vmatrix} \qquad /1.1/$$

и рассмотрим уравнение $(\mathfrak{L} - \eta I)\chi = 0$. Полагая $\chi = (f, g)$, получаем систему уравнений

$$f'' + uf + vg = \eta f, \quad g' + wf = 0 . \qquad /1.2/$$

Предположим теперь, что функции u, v, w абсолютно интегрируемы на оси x, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(|u(x)| + |v(x)| + |w(x)|)\,dx < \infty . \qquad /1.3/$$

Пусть $\eta = \zeta^2$. Тогда при любом $\eta < 0$ система /1.2/ имеет фундаментальную систему решений (f_a, g_a), $a = 1,2,3$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x,\zeta)\exp(-\zeta x) = \frac{1}{\zeta}\lim_{x\to-\infty}\frac{\partial f_1(x,\zeta)}{\partial x}\exp(-\zeta x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} g_1(x,\zeta) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x,\zeta)\exp(\zeta x) = -\frac{1}{\zeta}\lim_{x\to-\infty}\frac{\partial f_2(x,\zeta)}{\partial x}\exp(\zeta x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} g_2(x,\zeta) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_3(x,\zeta) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\partial f_3(x,\zeta)}{\partial x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} g_3(x,\zeta) = 1 . \qquad /1.4/$$

При этом решение (f_1, g_1) допускает аналитическое продолжение по ζ в полуплоскость $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$, а решение (f_2, g_2) допускает аналитическое продолжение по ζ в полуплоскость $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$. Кроме того, при $\eta \to -\infty$, т.е. когда ζ стремится к бесконечности вдоль мнимой оси, для любого $x \in (-\infty, \infty)$ справедливы соотношения

$$\lim_{\zeta\to\pm i\infty} f_1(x,\zeta)\exp(-\zeta x) = \lim_{\zeta\to\pm i\infty}\frac{1}{\zeta}\frac{\partial f_1(x,\zeta)}{\partial x}\exp(-\zeta x) = 1, \quad \lim_{\zeta\to\pm i\infty} g_1(x,\zeta) = 0,$$

$$\lim_{\zeta\to\pm i\infty} f_2(x,\zeta)\exp(\zeta x) = -\lim_{\zeta\to\pm i\infty}\frac{1}{\zeta}\frac{\partial f_2(x,\zeta)}{\partial x}\exp(\zeta x) = 1, \quad \lim_{\zeta\to\pm i\infty} g_2(x,\zeta) = 0, \qquad /1.5/$$

$$\lim_{\zeta\to\pm i\infty} f_3(x,\zeta) = \lim_{\zeta\to\pm i\infty}\frac{\partial f_3(x,\zeta)}{\partial x} = 0, \quad \lim_{\zeta\to\pm i\infty} g_3(x,\zeta) = 1.$$

Вместе с системой /1.2/ рассмотрим тесно с нею связанную систему

$$\hat f'' + u\hat f + w\hat g = \eta\hat f, \quad \hat g' - v\hat f = 0. \qquad /1.6/$$

В предположении, что по-прежнему выполнено неравенство /1.3/, определим при $\eta < 0$ фундаментальную систему решений $(\hat f_\alpha, \hat g_\alpha)$, $\alpha = 1,2,3$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\zeta\lim_{x\to-\infty}\hat f_1(x,\zeta)\exp(\zeta x) = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\partial\hat f_1(x,\zeta)}{\partial x}\exp(\zeta x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\hat g_1(x,\zeta) = 0,$$

$$\zeta\lim_{x\to-\infty}\hat f_2(x,\zeta)\exp(-\zeta x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\partial\hat f_2(x,\zeta)}{\partial x}\exp(-\zeta x) = -\frac{1}{2}, \lim_{x\to-\infty}\hat g_2(x,\zeta) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\hat f_3(x,\zeta) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\partial\hat f_3(x,\zeta)}{\partial x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty}\hat g_3(x,\zeta) = 1. \qquad /1.7/$$

При этом решение $(\hat f_1, \hat g_1)$ допускает аналитическое продолжение по ζ в полуплоскость $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$, а решение $(\hat f_2, \hat g_2)$ допускает аналитическое продолжение по ζ в полуплоскость $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$. Кроме того, при $\eta \to -\infty$, т.е. когда ζ стремится к бесконечности вдоль мнимой оси, для любого $x \in (-\infty, \infty)$ справедливы соотношения

$$\lim_{\zeta\to\pm i\infty}\zeta\hat f_1(x,\zeta)\exp(\zeta x) = -\lim_{\zeta\to\pm i\infty}\frac{\partial\hat f_1(x,\zeta)}{\partial x}\exp(\zeta x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\zeta\to\pm i\infty}\hat g_1(x,\zeta) = 0,$$

$$\lim_{\zeta\to\pm i\infty}\zeta\hat f_2(x,\zeta)\exp(-\zeta x) = \lim_{\zeta\to\pm i\infty}\frac{\partial\hat f_2(x,\zeta)}{\partial x}\exp(-\zeta x) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\zeta\to\pm i\infty}\hat g_2(x,\zeta) = 0,$$

$$\lim_{\zeta\to\pm i\infty}\hat f_3(x,\zeta) = \lim_{\zeta\to\pm i\infty}\frac{\partial\hat f_3(x,\zeta)}{\partial x} = 0, \quad \lim_{\zeta\to\pm i\infty}\hat g_3(x,\zeta) = 1. \qquad /1.8/$$

Определим теперь матрицы Вронского W и $\hat W$ систем /1.2/ и /1.6/ соответственно, положив

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}, \qquad \hat W = \begin{vmatrix} \hat f_1 & \hat f_2 & \hat f_3 \\ \hat f_1' & \hat f_2' & \hat f_3' \\ \hat g_1 & \hat g_2 & \hat g_3 \end{vmatrix}. \qquad /1.9/$$

Нетрудно видеть, что согласно /1.4/ и /1.7/ имеем $\det W = -2\zeta$, $\det\hat W = -1/2\zeta$. Далее, с помощью /1.2/ и /1.6/ получаем, что для любого решения (f, g) системы /1.2/ и любого решения $(\hat f, \hat g)$ системы /1.6/ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\hat f\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial\hat f}{\partial x}f + \hat g g\right) = 0.$$

На основании этого равенства находим, что если в определенных посредством /1.9/ матрицах W и $\hat W$ использовать решения (f_α, g_α) и $(\hat f_\alpha, \hat g_\beta)$, α, $\beta = 1,2,3$, удовлетворяющие соответственно условиям /1.4/ и /1.7/, то

$$W^{-1} = \begin{vmatrix} -\hat f_1' & \hat f_1 & \hat g_1 \\ -\hat f_2' & \hat f_2 & \hat g_2 \\ -\hat f_3' & \hat f_3 & \hat g_3 \end{vmatrix}, \qquad \hat W^{-1} = \begin{vmatrix} f_1' & -f_1 & g_1 \\ f_2' & -f_2 & g_2 \\ f_3' & -f_3 & g_3 \end{vmatrix}. \qquad /1.10/$$

Возьмем теперь матрицу F вида

$$F = WCW^{-1}, \qquad /1.11/$$

где матрицы W и W^{-1} определены посредством /1.9/ и /1.10/, а $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$, причем величины c_1, c_2, c_3 не зависят от x и параметра η. На основании /1.2/ матрица F удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F], \qquad /1.12/$$

где

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & v \\ w & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad /1.13/$$

Положим

$$F = \begin{vmatrix} F_{0,0} & F_{0,1} & F_{0,2} \\ F_{1,0} & F_{1,1} & F_{1,2} \\ F_{2,0} & F_{2,1} & F_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Величины $F_{0,1}$, $F_{0,2}$, $F_{2,1}$ и $F_{2,2}$ тесно связаны с ядром резольвенты оператора $\mathfrak{L} - \eta I$. Остальные элементы матрицы F согласно /1.12/ просто выражаются через них. Далее, положим

$$A = \begin{vmatrix} F_{0,0} + F_{0,1}\,\partial & F_{0,2} \\ F_{2,0} + F_{2,1}\,\partial & F_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{vmatrix} \partial\cdot F_{0,1} + F_{1,1} & \partial\cdot F_{0,2} + F_{1,2} \\ F_{2,1} & F_{2,2} \end{vmatrix}. \qquad /1.14/$$

С помощью /1.1/, /1.12/ и /1.13/ нетрудно убедиться, что определенные посредством /1.14/ операторы A и $\hat{A}$ удовлетворяют операторному соотношению

$$(\mathfrak{L} - \eta I)\cdot A = \hat{A}\cdot(\mathfrak{L} - \eta I). \qquad /1.15/$$

Пусть теперь Γ_0 равно значению при $\eta = 0$ определенной посредством /1.13/ матрицы Γ, а $\Gamma_1 = \partial\Gamma/\partial\eta$. С помощью /1.5/ и /1.8/ нетрудно убедиться, что при $\eta \to -\infty$ матрица F обладает асимптотикой

$$F \sim \zeta\,\frac{c_1 - c_2}{2}\,\Gamma_1 + \mathrm{diag}\Big(\frac{c_1 + c_2}{2},\ \frac{c_1 + c_2}{2},\ c_3\Big),$$

Отсюда следует, что матрица F обладает асимптотическим при $\eta \to -\infty$ разложением вида

$$F \sim \frac{c_1 - c_2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m-1}\,\zeta^{-2m+1} + \Big(c_3 - \frac{c_1 + c_2}{2}\Big) \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m}\,\zeta^{-2m} + \frac{c_1 + c_2}{2}E,$$

где E - единичная матрица, $F_{-1} = \Gamma_1$, $F_0 = \mathrm{diag}(0,0,1)$, а при $m > 0$ матрицы F_m удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\Gamma_1, F_m] + [\Gamma_0, F_{m-2}] = [U, F_{m-2}] + \frac{\partial}{\partial x} F_{m-2} \qquad /1.16/$$

и требованию, чтобы при $u = v = w \equiv 0$ имели место равенства $F_1 = \Gamma_0$, $F_m \equiv 0$, если $m > 1$. При этом оказывается, что этими требованиями матрицы F_m определяются однозначно, а их элементы являются полиномами от функций u, v, w и их производных по x соответствующего порядка /3/. Справедливы равенства

$$F_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u}{2} & 0 & -v \\ -w & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad F_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & v' \\ -w' & w & 0 \end{vmatrix},$$

$$F_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}vw - \frac{1}{4}u' & \frac{u}{2} & -v' \\ \frac{1}{4}(vw' - v'w) - \frac{1}{8}(u^2 + u'') & -\frac{1}{2}vw + \frac{1}{4}u' & -\frac{1}{2}uv - v'' \\ -\frac{1}{2}uw - w'' & w' & vw \end{vmatrix},$$

$$F_4 = \begin{vmatrix} -vw' & vw & uv + v'' \\ -v'w' & v'w & -v^2w + (uv)' + v''' \\ -vw^2 - (uw)' - w''' & uw + w'' & vw' - v'w \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь $F_{m,\mu,\nu}$ -элемент матрицы F_m, стоящий на пересечении $(\mu+1)$-й строки и $(\nu+1)$-го столбца, μ, $\nu = 0,1,2$. Определим операторы

$$A_m = \begin{vmatrix} F_{m,0,0} + F_{m,0,1}\,\partial & F_{m,0,2} \\ F_{m,2,0} + F_{m,2,1}\,\partial & F_{m,2,2} \end{vmatrix}, \qquad /1.17/$$

$$\hat{A}_m = \begin{vmatrix} \partial\cdot F_{m,0,1} + F_{m,1,1} & \partial\cdot F_{m,0,2} + F_{m,1,2} \\ F_{m,2,1} & F_{m,2,2} \end{vmatrix}. \qquad /1.18/$$

Справедливы равенства

$$A_{-1} = \hat{A}_{-1} = 0, \quad A_0 = \hat{A}_0 = \mathrm{diag}(0,1),$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} \partial & 0 \\ -w & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{vmatrix} \partial & -v \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & v \\ w\partial - w' & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{vmatrix} 0 & \partial\cdot v + v' \\ w & 0 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} \frac{u}{2}\partial - \frac{1}{4}u' - \frac{1}{2}vw - & -v' \\ w'\partial - w'' - \frac{1}{2}uw & vw \end{vmatrix}, \quad \hat{A}_3 = \begin{vmatrix} \partial\cdot\frac{u}{2} + \frac{1}{4}u' - \frac{1}{2}vw & -\partial\cdot v' - v'' - \frac{1}{2}uv \\ w' & vw \end{vmatrix},$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} -vw' + vw\partial & uv + v'' \\ -vw^2 - (uw)' - w''' + (uw + w'')\partial & vw' - v'w \end{vmatrix},$$

$$\hat{A}_4 = \begin{vmatrix} \partial\cdot(vw) + v'w & \partial\cdot(uv + v'') - v^2w + (uv)' + v''' \\ uw + w'' & vw' - v'w \end{vmatrix}.$$

Отсюда на основании /1.15/ следует, что операторы A_0, $\hat{A}_0$, A_1 и $\hat{A}_1$ удовлетворяют условиям

$$I\cdot A_0 = \hat{A}_0\cdot I, \quad I\cdot A_1 = \hat{A}_1\cdot I, \qquad /1.19/$$

а при $m > 1$ справедливо рекуррентное соотношение

$$I\cdot A_m - \mathfrak{L}\cdot A_{m-2} = \hat{A}_m\cdot I - \hat{A}_{m-2}\cdot\mathfrak{L}. \qquad /1.20/$$

Пусть μ равно либо нулю, либо единице. Положим

$$\mathfrak{A} = c\sum_{m=0}^{n} A_{\mu+2m}\eta^{n-m}, \quad \hat{\mathfrak{A}} = c\sum_{m=0}^{n}\hat{A}_{\mu+2m}\eta^{n-m}.$$

Тогда согласно /1.19/ и /1.20/ операторное соотношение

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + \hat{\mathfrak{A}}\cdot(\mathfrak{L} - \eta I) - (\mathfrak{L} - \eta I)\cdot\mathfrak{A} = 0$$

может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} = c(I\cdot A_{\mu+2n+2} - \hat{A}_{\mu+2n+2}\cdot I).$$

Отсюда с учетом /1.17/ и /1.18/ вытекает следующая система нелинейных уравнений:

$$\dot{u} = c(F_{\mu+2n+2,0,0} - F_{\mu+2n+2,1,1} - \frac{\partial}{\partial x}F_{\mu+2n+2,0,1}),$$

$$\dot{v} = cF_{\mu+2n+2,0,2}, \quad \dot{w} = -cF_{\mu+2n+2,2,1}. \qquad /1.21/$$

В силу /1.16/ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}F_{\mu+2n+2,0,1} = F_{\mu+2n+2,1,1} - F_{\mu+2n+2,0,0}.$$

На этом основании система /1.21/ принимает вид

$$\dot{u} = -2c\frac{\partial}{\partial x}F_{\mu+2n+2,0,1}, \quad \dot{v} = cF_{\mu+2n+2,0,2}, \quad \dot{w} = -cF_{\mu+2n+2,2,1}. \qquad /1.22/$$

В частном случае $\mu = 0$, $n = 1$ система /1.22/ имеет вид

$$\dot{u} = -2c\frac{\partial}{\partial x}(vw), \quad \dot{v} = c(uv + v''), \quad \dot{w} = -c(uw + w''). \qquad /1.23/$$

При $c = -i$ эта система обладает инвариантным многообразием $u = u^*$, $w = i\kappa v^*$, $\kappa = \pm 1$. Движение на этом многообразии описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial x}|v|^2 = 0, \quad i\frac{\partial v}{\partial t} = uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad /1.24/$$

которая с точностью до обозначений совпадает с системой /3/.

§2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Предположим, что фигурировавшие в предыдущем параграфе функции u, v, w бесконечно дифференцируемы и равны тождественно нулю при $x < x_0$ и при $x > x_1$, $x_0 < x_1$. Рассмотрим функционал

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{Sp}\{(\Gamma + \sigma U)F\}\,dx, \quad \sigma = \mathrm{diag}(0, 1, 0).$$

Согласно /1.12/ функционал J можно представить в следующем виде:

$$J = 2\eta\int_{x_0}^{x_1} F_{01}\,dx - F_{1,1}(x_1) + F_{1,1}(x_0).$$

На основании /1.9/-/1.11/ отсюда следует, что при $x_0 < x < x_1$ справедливы равенства

$$\frac{\delta J}{\delta u(x)} = 2\eta\sum_{\mu,\nu=1}^{3}(c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)f_\nu(x)\int_x^{x_1} f_\mu(z)\hat{f}_\nu(z)\,dz - \frac{\delta}{\delta u(x)}F_{1,1}(x_1),$$

$$\frac{\delta J}{\delta v(x)} = 2\eta\sum_{\mu,\nu=1}^{3}(c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)g_\nu(x)\int_x^{x_1} f_\mu(z)\hat{f}_\nu(z)\,dz - \frac{\delta}{\delta v(x)}F_{1,1}(x_1),$$

$$\frac{\delta J}{\delta w(x)} = 2\eta\sum_{\mu,\nu=1}^{3}(c_\mu - c_\nu)\hat{g}_\mu(x)f_\nu(x)\int_x^{x_1} f_\mu(z)\hat{f}_\nu(z)\,dz - \frac{\delta}{\delta w(x)}F_{1,1}(x_1).$$

Далее, нетрудно убедиться, что

$$\frac{\delta}{\delta u(x)}F_{1,1}(x_1) = \sum_{\mu,\nu=1}^{3}(c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)f_\nu(x)f'_\mu(x_1)\hat{f}_\nu(x_1),$$

$$\frac{\delta}{\delta v(x)} F_{1,1}(x_1) = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)\, g_\nu(x)\, f'_\mu(x_1)\hat{f}_\nu(x_1),$$

$$\frac{\delta}{\delta w(x)} F_{1,1}(x_1) = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{g}_\mu(x)\, f_\nu(x)\, f'_\mu(x_1)\hat{f}_\nu(x_1).$$

Наконец, с помощью /1.12/ имеем

$$\frac{\partial F_{0,1}}{\partial \eta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)\, f_\nu(x) \{ \int_{x_0}^{x} f_\mu(z)\hat{f}_\nu(z)\,dz + \frac{1}{2\eta} f'_\mu(x_0)\hat{f}_\nu(x_0)\};$$

$$\frac{\partial F_{0,2}}{\partial \eta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{g}_\mu(x)\, f_\nu(x) \{ \int_{x_0}^{x} f_\mu(z)\hat{f}_\nu(z)\,dz + \frac{1}{2\eta} f'_\mu(x_0)\hat{f}_\nu(x_0)\},$$

$$\frac{\partial F_{2,1}}{\partial \eta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)\, g_\nu(x) \{ \int_{x_0}^{x} f_\mu(z)\hat{f}_\nu(z)\,dz + \frac{1}{2\eta} f'_\mu(x_0)\hat{f}_\nu(x_0)\}.$$

Таким образом, окончательно получаем равенства

$$\frac{1}{2\eta}\frac{\delta J}{\delta u(x)} + \frac{\partial F_{0,1}}{\partial \eta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)\, f_\nu(x)\, J_{\mu,\nu},$$

$$\frac{1}{2\eta}\frac{\delta J}{\delta v(x)} + \frac{\partial F_{2,1}}{\partial \eta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{f}_\mu(x)\, g_\nu(x)\, J_{\mu,\nu}, \qquad /2.1/$$

$$\frac{1}{2\eta}\frac{\delta J}{\delta w(x)} + \frac{\partial F_{0,2}}{\partial \eta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (c_\mu - c_\nu)\hat{g}_\mu(x)\, f_\nu(x)\, J_{\mu,\nu},$$

где

$$J_{\mu,\nu} = \int_{x_0}^{x_1} f_\mu(z)\hat{f}_\nu(z)\,dz + \frac{1}{2\eta}\{f'_\mu(x_0)\hat{f}_\nu(x_0) - f'_\mu(x_1)\hat{f}_\nu(x_1)\}.$$

Левые части равенств /2.1/ обладают асимптотическим при $\eta \to -\infty$ разложением. Следовательно, правые части этих равенств также обладают асимптотическим при $\eta \to -\infty$ разложением. При $x = x_0$ коэффициенты асимптотического разложения левых частей равенств /2.1/ равны нулю. Отсюда в силу возможности выбирать произвольно константы c_1, c_2, c_3 следует, что при $\mu \neq \nu$ величины $J_{\mu,\nu}$ обладают асимптотическим при $\eta \to -\infty$ разложением, причем все коэффициенты этого разложения равны нулю. Таким образом, все коэффициенты асимптотического разложения левых частей равенств /2.1/ равны нулю при любом $x \in (x_0, x_1)$. Это значит, что при любом $x \in (x_0, x_1)$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\delta}{\delta u} F_{m+2,0,1} = \frac{m}{2} F_{m,0,1}, \quad \frac{\delta}{\delta v} F_{m+2,0,1} = \frac{m}{2} F_{m,2,1}, \quad \frac{\delta}{\delta w} F_{m+2,0,1} = \frac{m}{2} F_{m,0,2}, \qquad /2.2/$$

где

$$\frac{\delta}{\delta u} F_{m+2,0,1} = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\partial^q}{\partial x^q} \frac{\partial F_{m+2,0,1}}{\partial u^{(q)}}, \quad u^{(q)} = \frac{\partial^q u}{\partial x^q},$$

а вариационные производные по $v(x)$ и $w(x)$ определяются аналогичным образом. Устремляя теперь x_0 в минус бесконечность, а x_1 в плюс бесконечность, получаем, что равенства /2.2/ справедливы при любом $x \in (-\infty, \infty)$.

С учетом равенств /2.2/ уравнения /1.22/ могут быть записаны в следующей гамильтоновой форме:

$$\dot{u} = -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_{\mu+2n}}{\delta u}, \quad \dot{v} = \frac{\delta H_{\mu+2n}}{\delta w}, \quad \dot{w} = -\frac{\delta H_{\mu+2n}}{\delta v},$$

где гамильтониан $H_{\mu+2n}$ имеет вид

$$H_{\mu+2n} = \frac{2c}{\mu+2n+2}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\mu+2n+4,0,1}\,dx.$$

Положим теперь $T_m = \frac{2}{m} F_{m+2,0,1}$, $m > 0$, и посмотрим, как меняются со временем t величины T_m. Согласно /2.2/ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_m = \frac{\partial}{\partial x} Y_{\mu+2n+2,m} - c Z_{\mu+2n+2,m}, \qquad /2.3/$$

где

$$Y_{\mu+2n+2,m} = \frac{4c}{m}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^{q-r}\frac{\partial^{q-r-1}}{\partial x^{q-r-1}}\frac{\partial F_{m+2,0,1}}{\partial u^{(q)}}\frac{\partial^{r+1}}{\partial x^{r+1}} F_{\mu+2n+2,0,1} -$$

$$-\frac{2c}{m}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^{q-r}\frac{\partial^{q-r-1}}{\partial x^{q-r-1}}\frac{\partial F_{m+2,0,1}}{\partial v^{(q)}}\frac{\partial^{r}}{\partial x^{r}} F_{\mu+2n+2,0,2} +$$

$$+\frac{2c}{m}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^{q-r}\frac{\partial^{q-r-1}}{\partial x^{q-r-1}}\frac{\partial F_{m+2,0,1}}{\partial w^{(q)}}\frac{\partial^{r}}{\partial x^{r}} F_{\mu+2n+2,2,1},$$

$$Z_{\mu+2n+2,m} = 2F_{m,0,1}\frac{\partial}{\partial x} F_{\mu+2n+2,0,1} +$$

$$+ F_{m,0,2} F_{\mu+2n+2,2,1} - F_{m,2,1} F_{\mu+2n+2,0,2}.$$

Возьмем теперь соотношение /1.16/, заменим в нем индекс m на $m+2$ и умножим полученное соотношение слева на матрицу $F_{\mu+2n}$. Далее, заменим в соотношении /1.16/ индекс m на $\mu+2n+2$, умножим справа на матрицу F_m и прибавим к полученному ранее равенству. В результате получим

$$\mathrm{Sp}([\Gamma_1, F_{\mu+2n+2}]F_m) + \mathrm{Sp}(F_{\mu+2n}[\Gamma_1, F_{m+2}]) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}(F_{\mu+2n}F_m).$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Sp}([\Gamma_1, F_{\mu+2n+2}]F_m) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{\nu=0}^{n+1}\mathrm{Sp}(F_{\mu+2n-2\nu}F_{m+2\nu}).$$

С другой стороны, имеем

$$\mathrm{Sp}([\Gamma_1, F_{\mu+2n+2}]F_m) = F_{\mu+2n+2,0,1}(F_{m,1,1} - F_{m,0,0}) +$$

$$+ (F_{\mu+2n+2,0,0} - F_{\mu+2n+2,1,1})F_{m,0,1} +$$

$$+ F_{\mu+2n+2,0,2}\,F_{m,2,1} - F_{\mu+2n+2,2,1}\,F_{m,0,2}.$$

Далее, на основании /1.16/ справедливо равенство

$$Z_{\mu+2n+2,m} = \frac{\partial}{\partial x}(F_{m,0,1}F_{\mu+2n+2,0,1}) - \mathrm{Sp}([\Gamma_1, F_{\mu+2n+2}]F_m).$$

Таким образом, равенство /2.3/ можно записать в виде закона сохранения

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \frac{\partial X_m}{\partial x} = 0, \qquad /2.4/$$

где

$$X_m = cF_{m,0,1}F_{\mu+2n+2,0,1} - c\sum_{\nu=0}^{n+1}\mathrm{Sp}(F_{\mu+2n-2\nu}F_{m+2\nu}) - Y_{\mu+2n+2,m}.$$

Согласно /2.4/ величины $I_m = \frac{2}{m}\int_{-\infty}^{\infty} F_{m+2,0,1}dx$ будут первыми интегралами системы /1.22/. Повторив почти дословно приведенные выше рассуждения, получаем, что интегралы I_m находятся в инволюции относительно скобки Пуассона

$$[I_m, I_n] = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\frac{\delta I_m}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u} - \frac{\delta I_m}{\delta v}\frac{\delta I_n}{\delta w} + \frac{\delta I_m}{\delta w}\frac{\delta I_n}{\delta v}\right\}dx.$$

§3. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Для того чтобы найти солитонные решения системы /1.24/, нам потребуется оператор

$$X = \partial + \mathcal{P} - \zeta\Lambda, \qquad /3.1/$$

где ζ - спектральный параметр,

$$\mathcal{P} = \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & q \\ w & w & 0 \end{vmatrix}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(1, -1, 0). \qquad /3.2/$$

Если функции u, v, входящие в /2.1/, связаны с функциями p, q, w, входящими в /3.2/, соотношениями

$$u = p'_x - p^2 - 2qw, \quad v = 2q'_x - 2pq, \qquad /3.3/$$

то оператор X вида /3.1/ эквивалентен определенному с помощью /2.1/ оператору $\mathcal{L} - \eta I$, $\eta = \zeta^2$. Действительно, если $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ - решение уравнения $X\phi = 0$, то при выполнении условий /3.3/ функции $f = \phi_1 + \phi_2, g = \phi_3$ удовлетворяют системе /1.2/. Наоборот, если $\chi = (f, g)$ - решение системы /1.2/, то $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, где

$$\phi_1 = \frac{1}{2\zeta}(\zeta f + f' + pf + 2qg), \quad \phi_2 = \frac{1}{2\zeta}(\zeta f - f' - pf - 2qg), \quad \phi_3 = g,$$

удовлетворяет уравнению $X\phi = 0$.

Положим теперь $T = \frac{\partial}{\partial t} - A_0\zeta^2 - A_1\zeta - A_2$, где

$$A_0 = \mathrm{diag}(c, c, 0), \quad A_1 = c\begin{vmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & q \\ -w & w & 0 \end{vmatrix},$$

$$A_2 = c\begin{vmatrix} -qw & qw & pq - q'_x \\ qw & -qw & pq - q'_x \\ pw + w'_x & pw + w'_x & 2qw \end{vmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Тогда условие $[T, X] = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$\dot{p} = -2c(qw)'_x, \quad \dot{q} + c(p^2q + 2q^2w + p'_xq - q''_{xx}) = 0, \qquad /3.4/$$

$$\dot{w} + c(p'_xw - p^2w - 2qw^2 + w''_{xx}) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что при замене /3.3/ система /3.4/ принимает вид /1.23/. Поэтому для получения солитонных решений системы /1.24/ мы найдем сначала солитонные решения системы /3.4/. Затем с помощью преобразования /3.3/ получим солитонные решения системы /1.23/. Наконец, наложив на полученное решение требования $u = u^*$, $w = i\kappa v^*$, $\kappa = \pm 1$, мы получим солитонное решение системы /1.24/.

Для получения солитонных решений системы /3.4/ мы воспользуемся следующей системой линейных алгебраических уравнений

$$K_{0,m} + f_m \sum_n \left\{ \frac{\exp[(\omega_m + \omega_n)x]}{\omega_m + \omega_n} K_{1,n} + \frac{\exp[(\omega_m - r_n)x]}{\omega_m - r_n} \hat{K}_{1,n} \right\} = 0, \qquad /3.5/$$

$$K_{1,m} + f_m \exp(\omega_m x) + f_m \sum_n \left\{ \frac{\exp[(\omega_m + \omega_n)x]}{\omega_m + \omega_n} K_{0,n} + \frac{\exp[(\omega_m - r_n)x]}{\omega_m - r_n} \hat{K}_{0,n} \right\} = 0, \qquad /3.6/$$

$$\hat{K}_{0,m} + h_m \sum_n \left\{ \frac{M_n}{r_m - \sigma_n} - \frac{\hat{M}_n}{r_m + \sigma_n} \right\} = 0, \qquad /3.7/$$

$$\hat{K}_{1,m} - h_m \sum_n \left\{ \frac{M_n}{r_m + \sigma_n} - \frac{\hat{M}_n}{r_m - \sigma_n} \right\} = 0, \qquad /3.8/$$

$$M_m + g_m \exp(\sigma_m x) + g_m \sum_n \left\{ \frac{\exp[(\sigma_m + \omega_n)x]}{\sigma_m + \omega_n} K_{0,n} + \frac{\exp[(\sigma_m - r_n)x]}{\sigma_m - r_n} \hat{K}_{0,n} \right\} = 0, \qquad /3.9/$$

$$\hat{M}_m + g_m \sum_n \left\{ \frac{\exp[(\sigma_m + \omega_n)x]}{\sigma_m + \omega_n} K_{1,n} + \frac{\exp[(\sigma_m - r_n)x]}{\sigma_m - r_n} \hat{K}_{1,n} \right\} = 0, \qquad /3.10/$$

$$N_m + f_m \sum_n \left\{ \frac{\exp[(\omega_m + \omega_n)x]}{\omega_m + \omega_n} N_n + \frac{\exp[(\omega_m - r_n)x]}{\omega_m - r_n} \hat{N}_n \right\} = 0, \qquad /3.11/$$

$$\hat{N}_m + h_m + h_m \sum_n \left\{ \frac{R_n}{r_m - \sigma_n} - \frac{R_n}{r_m + \sigma_n} \right\} = 0, \qquad /3.12/$$

$$R_m + g_m \sum_n \left\{ \frac{\exp[(\sigma_m + \omega_n)x]}{\sigma_m + \omega_n} N_n + \frac{\exp[(\sigma_m - r_n)x]}{\sigma_m - r_n} \hat{N}_n \right\} = 0. \qquad /3.13/$$

Здесь $K_{0,m}$, $K_{1,m}$, $\hat{K}_{0,m}$, $\hat{K}_{1,m}$, M_m, $\hat{M}_m$, N_m, $\hat{N}_m$, R_m - искомые функции, с помощью которых потенциалы p, q, w выражаются следующим образом:

$$p = -2 \sum_m \{ K_{1,m}(x) \exp(\omega_m x) + \hat{K}_{1,m}(x) \exp(-r_m x) \},$$

$$q = \sum_m \{ M_m(x) - \hat{M}_m(x) \}, \qquad /3.14/$$

$$w = -\sum_m \{ N_m(x) \exp(\omega_m x) + \hat{N}_m(x) \exp(-r_m x) \},$$

f_m, g_m, h_m, ω_m, σ_m, r_m - параметры системы. При этом величины g_m и h_m зависят от времени t согласно уравнениям

$$\frac{\partial g_m}{\partial t} - c\sigma_m^2 g_m = 0, \quad \frac{\partial h_m}{\partial t} + c r_m^2 h_m = 0, \qquad /3.15/$$

а величины f_m, ω_m, σ_m, r_m от времени t не зависят. Кроме того, все параметры f_m, g_m, h_m, ω_m, σ_m, r_m удовлетворяют некоторым соотношениям, о которых будет сказано ниже.

Существует два типа солитонных решений. Решения первого типа получаются, если в системе /3.5/-/3.13/ все величины g_m и h_m положить равными нулю. Тогда согласно /3.7/-/3.10/, /3.12/ и /3.13/ получаем, что $\hat{K}_{0,m} = \hat{K}_{1,m} = M_m = \hat{M}_m = \hat{N}_m = R_m \equiv 0$. Далее, в силу /3.11/ имеем $N_m \equiv 0$. Наконец, уравнения /3.5/ и /3.6/ в этом случае принимают вид

$$K_{0,m} + f_m \sum_n \frac{\exp[(\omega_m + \omega_n)x]}{\omega_m + \omega_n} K_{1,n} = 0,$$

$$K_{1,m} + f_m \exp(\omega_m x) + f_m \sum_n \frac{\exp[(\omega_m + \omega_n)x]}{\omega_m + \omega_n} K_{0,n} = 0.$$

Решая эту систему уравнений, с учетом равенств /3.14/ получаем $p = 2\tilde{z}(1 - a^2)^{-1} z$, $q = w \equiv 0$. Здесь 1 - единичная матрица, a - квадратная матрица с элементами $a_{m,n} = \frac{(f_m f_n)^{1/2}}{\omega_m + \omega_n} \exp[(\omega_m + \omega_n)x]$, z - вектор-столбец с компонентами $z_m = f_m^{1/2} \exp(\omega_m x)$, а $\tilde{z}$ - вектор-строка с теми же самыми компонентами. Отсюда на основании /3.3/ следует равенство

$$u = 2\tilde{z}\omega(1 - a^2)^{-1} z + 2\tilde{z}(1 - a^2)^{-1}\left(a\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x}a\right)(1 - a^2)^{-1} z +$$

$$+ 2\tilde{z}(1 - a^2)^{-1}\omega z - 4\tilde{z}(1 - a^2)^{-1} z\tilde{z}(1 - a^2)^{-1} z,$$

где ω - диагональная матрица с диагональными элементами ω_m. С помощью равенства $\partial a / \partial x = z\tilde{z}$ выражение для u может быть записано в следующем виде:

$$u = 2\tilde{z}\omega(1 - a^2)^{-1} z - 2\tilde{z}(1 + a)^{-1} z\tilde{z}(1 - a^2)^{-1} z -$$

$$- 2\tilde{z}(1 - a^2)^{-1} z\tilde{z}(1 + a)^{-1} z + 2\tilde{z}(1 - a^2)^{-1}\omega z.$$

Группируя в правой части этого равенства первое слагаемое со вторым, а третье - с четвертым, с учетом соотношения $z\tilde{z} = a\omega + \omega a$ получаем

$$u = 4\tilde{z}(1 + a)^{-1}\omega(1 + a)^{-1} z. \qquad /3.16/$$

Нетрудно видеть, что если все величины f_m и ω_m выбрать положительными, то $\det(1 + a) \neq 0$ при любом $x \in (-\infty, \infty)$. Следовательно, определенная посредством /3.16/ функция u не имеет полюсов на всей вещественной оси x и стремится к нулю при $x \to \pm\infty$.

Второй тип солитонных решений получается, если в системе /3.5/-/3.13/ положить равными нулю все величины f_m. Тогда на основании /3.5/, /3.6/ и /3.11/ получаем, что $K_{0,m} = K_{1,m} = N_m = 0$. С учетом этого факта остальные уравнения системы /3.5/-/3.13/ принимают вид

$$\hat K_{0,m} + h_m \sum_n \left\{ \frac{M_n}{\tau_m - \sigma_n} - \frac{\hat M_n}{\tau_m + \sigma_n} \right\} = 0. \tag*{/3.17/}$$

$$\hat K_{1,m} - h_m \sum_n \left\{ \frac{M_n}{\tau_m + \sigma_n} - \frac{\hat M_n}{\tau_m - \sigma_n} \right\} = 0, \tag*{/3.18/}$$

$$M_m + g_m \exp(\sigma_m x) + g_m \sum_n \frac{\exp[(\sigma_m - \tau_n)x]}{\sigma_m - \tau_n} \hat K_{0,n} = 0, \tag*{/3.19/}$$

$$\hat M_m + g_m \sum_n \frac{\exp[(\sigma_m - \tau_n)x]}{\sigma_m - \tau_n} \hat K_{1,n} = 0, \tag*{/3.20/}$$

$$\hat N_m + h_m + h_m \sum_n \left\{ \frac{R_n}{\tau_m - \sigma_n} - \frac{R_n}{\tau_m + \sigma_n} \right\} = 0, \tag*{/3.21/}$$

$$R_m + g_m \sum_n \frac{\exp[(\sigma_m - \tau_n)x]}{\sigma_m - \tau_n} \hat N_n = 0. \tag*{/3.22/}$$

Складывая /3.17/ и /3.18/, а затем /3.19/ и /3.20/, получаем что величины $P_m = \hat K_{0,m} + \hat K_{1,m}$ и $Q_m = M_m + \hat M_m$ удовлетворяют системе уравнений

$$P_m + h_m \sum_n \left\{ \frac{Q_n}{\tau_m - \sigma_n} - \frac{Q_n}{\tau_m + \sigma_n} \right\} = 0, \tag*{/3.23/}$$

$$Q_m + g_m \exp(\sigma_m x) + g_m \sum_n \frac{\exp[(\sigma_m - \tau_n)x]}{\sigma_m - \tau_n} P_n = 0.$$

Пусть r и s - квадратные матрицы с элементами $r_{m,n} = \frac{(g_m h_n)^{1/2}}{\sigma_m - \tau_n}$ и $s_{m,n} = \frac{(g_m h_n)^{1/2}}{\sigma_m + \tau_n}$ соответственно. Пусть, далее, σ и τ - диагональные матрицы с диагональными элементами σ_m и τ_m. Положим $\hat r = \exp(\sigma x)\, r \exp(-\tau x)$. Пусть, наконец, P и Q - векторы-столбцы с компонентами $P_m h_m^{-1/2}$ и $Q_m g_m^{-1/2}$ соответственно, а β - вектор-столбец с компонентами $g_m^{1/2} \exp(\sigma_m x)$. С учетом этих обозначений система /3.23/ принимает вид $P - (\tilde r + \tilde s) Q = 0$, $Q + \hat r P + \beta = 0$, где знак " ~ " означает транспонирование. Отсюда следует, что

$$P = -[I + (\tilde r + \tilde s)\hat r]^{-1} (\tilde r + \tilde s)\beta, \quad Q = -[I + \hat r(\tilde r + \tilde s)]^{-1} \beta. \tag*{/3.24/}$$

Вычтем теперь /3.18/ из /3.17/, а /3.20/ из /3.19/. В результате получим, что величины $\hat P_m = \hat K_{0,m} - \hat K_{1,m}$ и $\hat Q_m = M_m - \hat M_m$ удовлетворяют системе уравнений

$$\hat P_m + h_m \sum_n \left\{ \frac{\hat Q_n}{\tau_m - \sigma_n} + \frac{\hat Q_n}{\tau_m + \sigma_n} \right\} = 0,$$

$$\hat Q_m + g_m \exp(\sigma_m x) + g_m \sum_n \frac{\exp[(\sigma_m - \tau_n)x]}{\sigma_m - \tau_n} \hat P_n = 0. \tag*{/3.25/}$$

Пусть $\hat P$ и $\hat Q$ - векторы-столбцы с компонентами $\hat P_m h_m^{-1/2}$ и $\hat Q_m g_m^{-1/2}$ соответственно. В этих обозначениях система /3.25/ принимает вид $\hat P - (\tilde r - \tilde s) Q = 0$, , $\hat Q + \hat r \hat P + \beta = 0$. Следовательно, справедливы равенства

$$\hat P = -[I + (\tilde r - \tilde s)\hat r]^{-1} (\tilde r - \tilde s)\beta, \quad \hat Q = -[I + \hat r(\tilde r - \tilde s)]^{-1} \beta. \tag*{/3.26/}$$

Наконец, пусть $\hat N$ и R - векторы-столбцы с компонентами $\hat N_m h_m^{-1/2}$ и $R_m g_m^{-1/2}$ соответственно, а γ - вектор-столбец с компонентами $h_m^{1/2} \exp(-\tau_m x)$. С помощью этих обозначений уравнения /3.21/ и /3.22/ могут быть записаны в следующем виде:

$$\hat N - (\tilde r + \tilde s) R + \exp(\tau x)\gamma = 0, \quad R + \hat r \hat N = 0.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\hat N = -[I + (\tilde r + \tilde s)\hat r]^{-1} \exp(\tau x)\gamma. \tag*{/3.27/}$$

С учетом равенств /3.24/, /3.26/ и /3.27/ соотношения /3.14/ принимают вид

$$p = \tilde\gamma \{ (\tilde r + \tilde s)[I + \hat r(\tilde r + \tilde s)]^{-1} - (\tilde r - \tilde s)[I + \hat r(\tilde r - \tilde s)]^{-1} \} \beta,$$

$$q = -\tilde\beta \exp(-\sigma x)[I + \hat r(\tilde r - \tilde s)]^{-1} \beta, \quad w = \tilde\gamma [I + (\tilde r + \tilde s)\hat r]^{-1} \exp(\tau x)\gamma. \tag*{/3.28/}$$

Далее, в силу равенства $\frac{\partial \hat r}{\partial x} = \sigma \hat r - \hat r \tau = \beta \tilde\gamma$ из соотношений /3.3/ и /3.28/ следует, что

$$v = -2\tilde\beta \exp(-\sigma x)[I + \hat r(\tilde r - \tilde s)]^{-1} [\hat r \tau(\tilde r + \tilde s) + \sigma][I + \hat r(\tilde r + \tilde s)]^{-1} \beta.$$

Отсюда на основании равенства $\tau(\tilde r + \tilde s) = (\tilde r - \tilde s)\sigma$ вытекает соотношение

$$v = -2\tilde\beta \exp(-\sigma x)\, \sigma [I + \hat r(\tilde r + \tilde s)]^{-1} \beta. \tag*{/3.29/}$$

Согласно /3.28/ и /3.29/ выражения для v и w могут быть записаны в следующем виде

$$\mathrm{v} = -\tilde{\mu}\,\mathrm{A}\mu, \quad \mathrm{w} = \tilde{\nu}\,\mathrm{B}\nu, \qquad /3.30/$$

где

$$\mathrm{A} = [\exp(-\sigma \mathrm{x}) + \sigma^{1/2}\,\mathrm{r}\exp(-r\mathrm{x})\,(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})\sigma^{-1/2}]^{-1},$$

$$\mathrm{B} = [\exp(r\mathrm{x}) + (\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})\exp(\sigma\mathrm{x})\,\mathrm{r}]^{-1}, \quad \mu = (2\sigma)^{1/2}\exp(-\sigma\mathrm{x})\beta, \quad \nu = \exp(r\mathrm{x})\gamma. \qquad /3.31/$$

Предположим теперь, что величины $\mathrm{g_m}$, $\mathrm{h_m}$, σ_m, r_m удовлетворяют условиям

$$2\mathrm{g_m}\sigma_\mathrm{m} = -\mathrm{i}\kappa\,\mathrm{h}^*_\mathrm{m}, \quad \sigma^*_\mathrm{m} = -r_\mathrm{m}. \qquad /3.32/$$

В этом случае, как нетрудно убедиться, матрицы A, B и векторы μ, ν удовлетворяют соотношениям $\mathrm{A} = \mathrm{B}^*$, $\tilde{\mu} = (-\mathrm{i}\kappa)^{1/2}\nu^*$. Отсюда на основании /3.30/ следует равенство $\mathrm{w} = \mathrm{i}\kappa\mathrm{v}^*$. Заметим, что при $\mathrm{c} = \pm\mathrm{i}$ условия /3.32/ согласуются с уравнениями /3.15/.

Положим теперь $a_\pm = [I + \hat{\mathrm{r}}(\tilde{\mathrm{r}} \pm \tilde{\mathrm{s}})]^{-1}$, $\mathrm{a}_\pm = [I + (\tilde{\mathrm{r}} \pm \tilde{\mathrm{s}})\hat{\mathrm{r}}]^{-1}$. Очевидно, что $(\tilde{\mathrm{r}} \pm \tilde{\mathrm{s}})a_\pm = \mathrm{a}_\pm(\tilde{\mathrm{r}} \pm \tilde{\mathrm{s}})$. Далее, с учетом равенства $\partial\hat{\mathrm{r}}/\partial\mathrm{x} = \sigma\hat{\mathrm{r}} - \hat{\mathrm{r}}r = \beta\tilde{\gamma}$ на основании /3.28/ имеем

$$\mathrm{p}_\mathrm{x}^{\prime} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_4 - \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_3, \qquad \mathrm{p}^2 = \mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_2 + \mathrm{J}_3 - \mathrm{J}_4,$$

$$2\mathrm{qw} = -2\tilde{\gamma}\mathrm{a}_+\exp(r\mathrm{x})\,\gamma\tilde{\beta}\exp(-\sigma\mathrm{x})\,a_-\beta,$$

где

$$\mathrm{I}_1 = \tilde{\gamma}r(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})a_+\beta = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_+[I + (\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})\hat{\mathrm{r}}]\,r(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})a_+\beta,$$

$$\mathrm{I}_2 = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_+(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})\sigma\beta = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_+(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})\sigma[I + \hat{\mathrm{r}}(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})]a_+\beta,$$

$$\mathrm{I}_3 = \tilde{\gamma}r(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})a_-\beta = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_+[I + (\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})\hat{\mathrm{r}}]\,r(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})a_-\beta,$$

$$\mathrm{I}_4 = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_-(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})\sigma\beta = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_-(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})\sigma[I + \hat{\mathrm{r}}(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})]a_+\beta,$$

$$\mathrm{J}_1 = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_+(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})(\sigma\hat{\mathrm{r}} - \hat{\mathrm{r}}r)(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})a_+\beta, \quad \mathrm{J}_2 = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_+(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})(\sigma\hat{\mathrm{r}} - \hat{\mathrm{r}}r)(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})a_-\beta,$$

$$\mathrm{J}_3 = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_-(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})(\sigma\hat{\mathrm{r}} - \hat{\mathrm{r}}r)(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})a_-\beta, \quad \mathrm{J}_4 = \tilde{\gamma}\mathrm{a}_-(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})(\sigma\hat{\mathrm{r}} - \hat{\mathrm{r}}r)(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})a_+\beta.$$

С помощью равенств $(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}})\sigma - r(\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}}) = 2\exp(r\mathrm{x})\,\gamma\tilde{\beta}\exp(-\sigma\mathrm{x})$, $r(\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{s}}) = (\tilde{\mathrm{r}} - \tilde{\mathrm{s}})\sigma$ нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$-\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 - \mathrm{J}_1 = 2\tilde{\gamma}\mathrm{a}_+\tilde{\mathrm{s}}\sigma a_+\beta, \quad \mathrm{I}_3 + \mathrm{J}_2 - 2\mathrm{qw} = \mathrm{I}_2, \quad \mathrm{I}_4 - \mathrm{J}_4 = \mathrm{I}_1.$$

Отсюда на основании /3.3/ вытекает равенство

$$\mathrm{u} = 4\tilde{\gamma}\mathrm{a}_+\tilde{\mathrm{s}}\sigma a_+\beta. \qquad /3.33/$$

Полученное выражение для u можно записать в следующем виде: $\mathrm{u} = 2\tilde{\nu}\,\mathrm{B}\tilde{\mathrm{s}}(2\sigma)^{1/2}\mathrm{A}\mu$, где матрицы A, B и векторы μ, ν определены посредством /3.31/. При выполнении условий /3.32/ получаем $\mathrm{u} = 2\lambda^*\mathrm{A}^*\mathrm{C}\mathrm{A}\lambda$, где λ - вектор-столбец с компонентами $\lambda_\mathrm{m} = (\mathrm{h}^*_\mathrm{m})^{1/2}$, а C - квадратная матрица с элементами $\mathrm{c_{m,n}} = -\mathrm{i}\kappa\,\dfrac{(\mathrm{h_m}\mathrm{h}^*_\mathrm{n})^{1/2}}{r_\mathrm{m} - r^*_\mathrm{n}}$.

Очевидно, что $\mathrm{C}^* = \mathrm{C}$ и, следовательно, $\mathrm{u}^* = \mathrm{u}$. Положим теперь в равенстве /3.33/

$$\mathrm{g_m} = -\epsilon\,\frac{2\mathrm{i}\kappa\mathrm{f_m}\omega_\mathrm{m}}{4\omega^2_\mathrm{m} - \mathrm{i}\kappa\mathrm{f_m}\epsilon^2}, \qquad \mathrm{h_m} = \epsilon\mathrm{f_m},$$

$$\sigma_\mathrm{m} = \omega_\mathrm{m} - \mathrm{i}\kappa\frac{\mathrm{f_m}}{4\omega_\mathrm{m}}\epsilon^2, \qquad r_\mathrm{m} = -\omega_\mathrm{m} - \mathrm{i}\kappa\frac{\mathrm{f_m}}{4\omega_\mathrm{m}}\epsilon^2$$

и устремим ϵ к нулю. В пределе получим выражение для u, совпадающее с /3.16/. Таким образом, солитоны первого типа могут быть получены из солитонов второго типа в результате указанного выше предельного перехода.

В заключение необходимо отметить, что исходная система уравнений может быть записана в гамильтоновой форме

$$\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\mathrm{t}} = -\mathrm{c}_\ell\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}}\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\mathrm{u}}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{t}} = -\mathrm{i}\mathrm{c}_\ell\frac{\beta}{a}\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\phi^*}, \quad \frac{\partial\phi^*}{\partial\mathrm{t}} = \mathrm{i}\mathrm{c}_\ell\frac{\beta}{a}\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\phi},$$

где гамильтониан H имеет вид

$$\mathrm{H} = \int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{\mathrm{u}^2}{2} + \frac{a}{\mathrm{c}_\ell}[-\frac{\gamma}{\beta}|\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}|^2 + \mathrm{i}\frac{\mathrm{c_g}}{2\beta}(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial\mathrm{x}} - \frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}\phi^*) + \frac{\delta}{2\beta}|\phi|^4 + \mathrm{u}|\phi|^2]\}\mathrm{dx}$$

и содержит три группы членов, определяющих соответственно энергию длинной волны, энергию пакета коротких волн и энергию взаимодействия длинной волны с пакетом коротких волн. Предположим теперь, что мы имеем длинную волну u_ℓ вида

$$\mathrm{u}_\ell = \frac{\gamma\lambda^2}{\beta}\,\frac{2\mu_0^2}{\mathrm{ch}^2[\lambda\mu_0(\mathrm{x} - \mathrm{c}_\ell\mathrm{t})]},$$

где $\lambda = \dfrac{2}{a\beta}\,\mathrm{sign}(a\beta\gamma)$, а $\mu_0 \neq 0$. Пусть, далее, при $\mathrm{t} = 0$ комплексная огибающая пакета коротких волн имеет вид $\phi = \epsilon\omega(\mathrm{x})$, где ϵ - малый параметр. В результате взаимодействия образуется солитон $\mathrm{u_s}$ вида

$$u_s = \frac{\gamma\lambda^2}{\beta} \quad \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\lambda\mu(x - c_s t + \Delta)]},$$

где величины μ и c_s определяются следующим образом. Пусть

$$f_0(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mu_0 x)}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\gamma\lambda^2}\,\omega\left(\frac{x}{\lambda}\right)\exp\left(-i\sigma\frac{x}{\lambda}\right), \quad \sigma = \frac{c_g - c_\ell}{2\gamma}.$$

Положим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\,\psi(x) \int_{-\infty}^{x} f_0(z)\,\psi^*(z)\,dz\,dx .$$

Тогда справедливы равенства

$$\mu = \mu_0 + \frac{\kappa I_1}{4}\,\frac{\mu_0}{|\mu_0|}\,\epsilon^2 + \dots, \qquad c_s = c_\ell + \frac{\gamma I_0}{\alpha\beta}\,\epsilon^2 + \dots,$$

где $I_0 = \mathrm{Re}\,I$, $I_1 = \mathrm{Im}\,I$, $\kappa = \mathrm{sign}(\alpha\beta\gamma)$, а точками обозначены члены более высокого порядка по ϵ. Определим теперь соответственно энергию E_ℓ длинной волны u_ℓ и энергию E_s солитона u_s, положив

$$E_\ell = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_\ell^2\,dx, \quad E_s = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_s^2\,dx .$$

С помощью несложных выкладок получаем равенство

$$E_s - E_\ell = 2\frac{\gamma^2}{\beta^2}\,|\lambda|^3\,\mu_0^2\,\kappa\,I_1\,\epsilon^2 + \dots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка по ϵ. В зависимости от знака величины κI_1 мы будем иметь либо $E_s - E_\ell > 0$, если $\kappa I_1 > 0$, либо $E_s - E_\ell < 0$, если $\kappa I_1 < 0$.

Автор выражает благодарность академику Л.И.Седову за плодотворное обсуждение изложенных выше результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D.J. Stud.Appl.Math., 1977, vol.56, No.1, p.81-94.
2. Мельников В.К. ОИЯИ, Р2-84-81, Дубна, 1984.
3. Мельников В.К. Матем.сб., 1983, т.121, №4, с.469-498.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июля 1984 года.

Мельников В.К. Р2-84-531

Взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн

Рассмотрена система уравнений, описывающая взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн. Найдено многосолитонное решение этой системы. Указан алгоритм для нахождения локальных законов сохранения и показано, что первые интегралы находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, порождаемой гамильтоновой структурой исходной системы уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-84-531

Interaction of a Long Wave with a Packet of Short Waves

A system of equations is considered which describes the interaction of a long wave with a packet of short waves. A multi-soliton solution of this system is found. An algorithm is determined for finding the local consevation laws. It is shown that the first integrals are found in the involution with respect to the Poisson bracket generated by the Hamiltonian structure of the initial system of equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984