сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-84-530

С.И.Златев, В.А.Матвеев

# ОПЕРАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА В ЗАДАЧЕ О СОКРАЩЕНИИ НУЛЕВЫХ МОД

1984

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что задача квантования нелинейных систем в окрестности нетривиального классического решения уравнений движения сталкивается с проблемой нулевых мод, связанной с появлением формально расходящихся выражений или неоднозначностей при построении пертурбационного /квазиклассического/ разложения [1].

Заметим, что корень проблемы нулевых мод заключается в наличии вырождения в системе, обусловленного той или иной симметрией задачи, порождающей группу непрерывных преобразований /например, группу трансляций и лоренцевых вращений в квантовой теории солитонов/. Именно это обстоятельство приводит к появлению собственных функций с нулевой частотой в уравнениях, определяющих спектр малых вариаций поля или другой переменной рассматриваемой задачи в окрестности заданного классического решения, нарушающего некоторую непрерывную симметрию системы. Так же, как голдстоуновские возбуждения в теории со спонтанно нарушенной симметрией, эти решения нулевой моды могут стать причиной инфракрасной нестабильности и обусловить неприменимость стандартной теории возмущений. Использование коллективных координат, а также подходящий выбор граничных /или асимптотических [2] / условий или выделение формально бесконечного группового объема [3] в рамках метода континуального интегрирования позволяют избавиться от трудностей, связанных с наличием нулевых мод. Существенную роль здесь играет явление сокращения вкладов нулевых мод в сумме членов заданного петлевого /квазиклассического/ приближения.

Как было впервые показано Фаддеевым и Корепиным [2] на примере двумерной модели нелинейного скалярного поля, в однопетлевом и двухпетлевом приближениях сингулярности, связанные с решениями нулевых мод, сокращаются. Доказательство было обобщено затем на случай произвольных порядков петлевого разложения, на основе анализа операторных тождеств, возникающих как следствие точной трансляционной симметрии задачи [4]. В этих доказательствах существенным образом использовалась квадратичная неинтегрируемость решений нулевой моды /соответствующие функции принадлежат непрерывному спектру оператора, описывающего малые вариации поля в окрестности классического односолитонного решения/ [2,4–6]. Отметим, что в высших порядках теории возмущений вопрос о сокращении вкладов нулевой моды усложняется появлением расходимостей инфракрасного типа [7].

В то же время в ряде задач, таких, как, например, нахождение квазиклассического разложения в одномерном /квантовомеханическом/ случае, где при некоторых граничных условиях нулевые моды являются квадратично-интегрируемыми собственными функциями уравнения в вариациях, отмеченные выше операторные тождества, вообще говоря, несправедливы, что ставит под вопрос вывод о сокращении вкладов нулевых мод/8/.

В настоящей заметке ставится задача обобщения предложенных в/4/ операторных тождеств на случай квадратично-интегрируемых /локализуемых/ нулевых мод.

Для конкретности будет рассмотрена одномерная квантовомеханическая система. Будет продемонстрировано несокращение нулевых мод для набора диаграмм в каждом порядке квазиклассического разложения, соответствующего стандартной теории возмущений. Проведенный анализ естественным образом приводит к необходимости введения новых вершин и соответствующих им диаграмм, отвечающих модифицированной теории возмущений, в которой сокращение вкладов нулевых мод является точным в каждом порядке петлевого квазиклассического разложения. Заметим, что соответствующая модификация теории возмущений вполне совпадает с той, которая возникает в рамках метода континуального интегрирования при использовании трюка Фаддеева-Попова/9/.

Таким образом, обсуждаемые в настоящей заметке операторные тождества позволяют формализовать доказательство о сокращении нулевых мод в произвольных порядках петлевого разложения.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Рассмотрим простейшую квантовомеханическую систему, описываемую интегралом действия

$$S[q(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right), \qquad /1/$$

допускающим нетривиальную экстремаль $q = q_c(t)$, т.е.

$$\frac{\delta S}{\delta q}[q_c(t)] = -\ddot{q}_c - \frac{\partial V}{\partial q}(q_c) = 0. \qquad /2/$$

Квантовые поправки к заданному классическому решению $q_c(t)$ обычно ищутся в виде ряда теории возмущений, определяемой диаграммной техникой в терминах вершин

$$V_n(t) = \left(\frac{d}{dq}\right)^n V(q)\Big|_{q=q_c(t)} \qquad /3/$$



и пропагатора

$$G = H^{-1}, \quad H = \frac{d^2}{dt^2} + V''(q_c(t)). \qquad /4/$$

Однако, как хорошо известно, формальное определение пропагатора /4/ сталкивается с проблемой нулевых мод, в силу того, что уравнение в вариациях

$$H\phi = \lambda\phi \qquad /5/$$

обладает собственными функциями с нулевым собственным значением. Одним из таких решений нулевой моды, очевидно, является функция $\psi(t) = \dot{q}_c(t)$, так как

$$H\dot{q}_c = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta S}{\delta q}(q_c)\right] = 0. \qquad /6/$$

Как уже указывалось в работе/2/, для ненулевой асимптотической скорости $v = \lim \dot{q}_c(t)$, $t \to \pm\infty$ хорошо определенная резольвента уравнения /5/ может быть, тем не менее, построена, ввиду того, что функция $\psi = \dot{q}_c$ не является квадратично-интегрируемой и соответствует не связанному, а виртуальному состоянию шредингеровского оператора – H.

В этой статье мы будем рассматривать, однако, наиболее сингулярный случай нулевой асимптотической скорости, т.е. случай классической экстремали с нулевой полной энергией

$$E = \frac{1}{2}\dot{q}_c^2 + V(q_c) = 0. \qquad /7/$$

Для класса потенциалов, удовлетворяющих требованию / $q^{\pm}$ - точки экстремума потенциала/

$$\int_{q^-}^{q^+} dq\, |V(q)|^{1/2} < \infty, \qquad /8/$$

$\dot{q}_c = \psi(t)$ есть локализуемая, квадратично-интегрируемая собственная функция оператора H, отвечающая связанному состоянию с нулевой энергией.

Заметим, что второй линейно независимой собственной функцией оператора H с нулевым собственным значением является величина $\phi = \frac{\partial q_c}{\partial E}\Big|_{E=0}$, соответствующая квадратично-неинтегрируемому виртуальному состоянию, что видно из значения вронскиана обоих решений

$$[\psi, \phi] = \psi\dot{\phi} - \dot{\psi}\phi = \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{1}{2}\dot{q}_c^2 + V(q_c)\right)\Big|_{E=0} = 1. \qquad /9/$$

Таким образом, лишь функция $\psi = \dot{q}_c(t)$ является "опасной" нулевой модой. Отсюда следует хорошо известный вывод о том, что функция Грина задачи может быть построена лишь в подпространстве гильбертова пространства, ортогональном к вектору $\psi_0(t) = \dot{q}_c(t)/||\dot{q}_c||$, т.е.

$$HG(t, t') = \delta(t - t') - \psi_0(t)\,\psi_0(t'). \qquad /10/$$

Очевидно при этом, что любое расширение функции Грина $G(t,t')$ на полное гильбертово пространство неоднозначно: любая подстановка вида

$$G(t, t') \to G(t, t') + c\,\psi_0(t)\,\psi_0(t'), \qquad /11/$$

где $c$ - произвольная константа, удовлетворяет тому же уравнению /10/ и приводит к допустимой функции Грина.

Исследование влияния этой неоднозначности на члены петлевого пертурбационного разложения в окрестности заданного классического решения и составляет предмет большинства работ по проблеме нулевой моды.

Следуя /4/, мы будем исходить из операторной формулировки квазиклассического разложения, в основе которой лежит операция операторного "усреднения"

$$\bar{F} \equiv \left(\exp \frac{i}{2} \int dt\, dt'\, G(t, t') \frac{\delta^2}{\delta X(t)\, \delta X(t')}\right) F[X]\Big|_{X=0}, \qquad /12/$$

причем функционал $F[X]$ определяется разложением интеграла действия системы /1/ в окрестности заданного классического решения $q_c(t)$:

$$F[X] \equiv \exp(i\Gamma[X]), \qquad /13а/$$

$$-\Gamma[X] \equiv S[q_c + X] - S[q_c] - \mathcal{E}[X, q_c] = -\sum_{n \geq 3} (n!)^{-1} \int V_n(t) X^n(t)\, dt, \qquad /13б/$$

где

$$\mathcal{E}[X, q_c] = -\frac{1}{2} \int X(t)\, HX(t) dt. \qquad /14/$$

Влияние неоднозначности в выборе функции Грина $G(t, t')$ при нахождении квантовых амплитуд, определенных средними типами /12/, тесно связано с зависимостью этих средних от величины составляющей функциональной переменной $X(t)$ вдоль "опасного" направления $\psi_0(t)$ в функциональном пространстве.



Действительно, нетрудно показать, что в результате подстановки /11/ среднее произвольного функционала $F[X]$ претерпевает следующее изменение:

$$F[X] \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{-4\pi i c}}\, e^{-\frac{i\lambda^2}{2c}} \cdot \overline{F[X + \lambda\psi_0]} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2^n \cdot n!)^{-1} (ic)^n\, \overline{T^{2n} F[X]}, \qquad /15/$$

где

$$T = \int \psi_0(t)\, \delta/\delta X(t)\, dt. \qquad /16/$$

есть оператор инфинитезимального смещения вдоль "опасного" направления, т.е. $X \to X + \lambda\psi_0$.

С другой стороны, инфинитезимальное смещение $\delta X \propto \psi_0$ и вариация параметра $a$, фиксирующего выбор классической составляющей квантовой переменной $q(t) = q_c(t - a) + X(t)$, ведут к эквивалентному изменению величины $q(t)$. Благодаря этой взаимосвязи следующие основные тождества имеют место:

$$T e^{i\Gamma[X]} = \mathcal{D}_a e^{i\Gamma[X]}; \qquad /17а/$$

$$T^2 e^{i\Gamma[X]} = (\mathcal{D}_a^2 - \dot{T}) e^{i\Gamma[X]} \text{ и т.д.} \qquad /17б/$$

Здесь

$$\mathcal{D}_a = e^{i\mathcal{E}}\, \partial_a e^{-i\mathcal{E}} = \partial_a + \frac{i}{2} \int dt\, V_3 \psi_0 X^2; \qquad /18/$$

$$\dot{T} = [\mathcal{D}_a, T] = e^{i\mathcal{E}} \cdot \int \dot{\psi}_0\, {}^{\delta}/_{\delta X(t)}\, dt \cdot e^{-i\mathcal{E}} = \int \dot{\psi}_0 \left(\frac{\delta}{\delta X} + iHX\right) dt =$$

$$= \int \dot{\psi}_0\, {}^{\delta}/_{\delta X}\, dt + i \int V_3\, \psi_0^2 X\, dt, \qquad /19/$$

причем и здесь и далее выбирается для удобства нормировка $||\dot{q}_c||^2 = 1$, так что $\dot{q}_c = \psi_0$.

Очевидно, что операторы $T$ и $\dot{T}$ коммутируют между собой, т.к.

$$[T, \dot{T}] = i \int V_3\, \psi_0^3\, dt = 0 \qquad /20/$$

для самосопряженных операторов $H$.

Последующие члены системы тождеств /17/ могут быть получены по индукции, на основе соотношения

$$T^n = T^{n-1} \cdot \not{D}_a = \not{D}_a \cdot T^{n-1} - (n-1)\dot{T} \cdot T^{n-2} \qquad /21/$$

при действии слева на функционал $\exp(i\Gamma)$. Эти, а также другие полученные на их основе операторные тождества играют важную роль при анализе проблемы сокращения вкладов нулевых мод в квазиклассическое /петлевое/ разложение в окрестности заданного классического решения уравнений задачи.

Рассмотрим прежде всего наиболее общие требования, которым удовлетворяет введенный выше операторный символ усреднения /12/, определяющий квазиклассическое разложение.

Вычислим производную от среднего произвольного функционала по параметру a, определяющему выбор классического решения задачи, обладающей трансляционным вырождением.

Имеем, очевидно,

$$\partial_a \bar{F} = \overline{\partial_a F} + \frac{i}{2} \int dt\, dt'\, \dot{G}(t,t')\, \overline{\delta^2 F/\delta X(t)\,\delta X(t')}\,. \qquad /22/$$

где точкой обозначена частная производная по параметру a. Используя формулу

$$\overline{\not{D}_a F} = \overline{\partial_a F} + \frac{1}{2} \int dt\, V_3 \psi_0\, \overline{X^2(t) F} \qquad /23/$$

и замечая, что

$$\overline{X^2(t) F} = iG(t,t)\bar{F} - \qquad /24/$$

$$- \int dt'\, dt''\, G(t,t')\, \overline{\frac{\delta^2 F}{\delta X(t')\,\delta X(t'')}}\, G(t'',t),$$

приходим к соотношению

$$\overline{\not{D}_a F} = \partial_a \bar{F} + \Omega \bar{F} - \frac{i}{2} \int dt\, dt' [\dot{G} + G\dot{H}G]\, \overline{\frac{\delta^2 F}{\delta X(t)\,\delta X(t')}}\,, \qquad /25/$$

где величина

$$\Omega = \partial_a (\det H)^{-1/2} = -\frac{1}{2} Sp(\dot{H}/H) = -\frac{1}{2} \int dt\, V_3 \psi_0 G(t,t), \qquad /26/$$

а также $\partial_a \cdot \bar{F}$ в силу трансляционной инвариантности задачи обращается в нуль. Выражение $(\dot{G} + G\dot{H}G)$, появляющееся под интегралом в правой части соотношения /25/, заслуживает специального рассмотрения. Дифференцируя по параметру обе части уравнения /10/, определяющего функцию Грина задачи, т.е.

$$\dot{H}G + H\dot{G} = -\dot{\psi}_0 \psi_0 - \psi_0 \dot{\psi}_0\,. \qquad /27/$$

и умножая слева на G, находим

$$\dot{G} + G\dot{H}G = \psi_0(\dot{\psi}_0 G) - (G\dot{\psi}_0)\psi_0 - (G\psi_0)\dot{\psi}_0\,. \qquad /28/$$

Левая и правая части этого соотношения не изменяются при подстановках /11/. Это позволяет упростить правую часть соотношения /28/, выбирая функцию Грина $G = G_\perp$, где $(G_\perp \psi_0) = (\psi_0 G_\perp) = 0$, так что

$$\dot{G} + G\dot{H}G = -\psi_0(\dot{\psi}_0 G_\perp) - (G_\perp \dot{\psi}_0)\psi_0\,. \qquad /29/$$

В результате, используя формулы /22-29/, находим

$$\overline{\not{D}_a F} - \overline{T\Delta F} = \partial_a \cdot \bar{F} = 0, \qquad /30/$$

где

$$\Delta = i \int dt\, dt'\, \dot{\psi}_0(t)\, G_\perp(t,t')\, \delta/\delta X(t') - \int dt\, \dot{\psi}_0 X(t), \qquad /31/$$

причем $[\Delta, T] = \int \dot{\psi}_0(t)\, \psi_0(t)\, dt = 0$.

Подчеркнем, что соотношение /30/, приравнивающее действие под знаком среднего оператора $\not{D}_a$ произведению операторов $T\Delta = \Delta T$, справедливо для произвольного функционала $F[X]$, среднее от которого существует и не зависит от параметра a. Можно проверить также, что для произвольного функционала $F[X]$ выполняется равенство

$$\overline{\dot{T}F} = \int \dot{\psi}_0\, \overline{\left(\frac{\delta}{\delta X} + iHX\right) F}\, dt = 0, \qquad /31/$$

где $\dot{T} = [\not{D}_a, T]$ определено формулой /19/. Действительно, используя тождество

$$\overline{X(t)F} = i \int G(t,t')\, \overline{\delta F/\delta X(t')}\, dt' \qquad /32/$$

и определение /10/ резольвенты оператора H, получаем

$$\overline{\dot{T}F} = \int \dot{\psi}_0(t)\, [1 - HG]\, \overline{\frac{\delta F}{\delta X}}\, dt = \int \dot{\psi}_0 \psi_0\, dt \cdot \overline{TF} = 0, \qquad /33/$$

т.к. $\int \dot{\psi}_0 \psi_0\, dt = 0$.

### 3. ОПЕРАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА И ПЕТЛЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Ниже мы рассмотрим вопрос о вкладе нулевых мод в члены квазиклассического петлевого разложения в окрестности заданного классического решения, используя введенные выше операторные тождества.

Петлевое разложение амплитуды перехода "вакуум-вакуум" определим следующим образом:

$$\overline{F_g[X]} \equiv \overline{\exp\frac{i}{g^2}\Gamma[gX]} = \sum_{n=0}^{\infty} g^n\, \overline{L_n(X)}. \qquad /34/$$

Независимость членов петлевого разложения /34/ от произвола в выборе функции Грина задачи /11/, а следовательно, точное сокращение вкладов нулевой моды требует в соответствии с формулой /15/ обращения в нуль совокупности величин

$$\delta(n,k) = \overline{T^k L_n}, \quad k = 2,4,\ldots,3n. \qquad /35/$$

Чтобы изучить вопрос о вкладе нулевых мод в коэффициенты петлевого разложения, воспользуемся введенными выше операторными тождествами. При этом необходимо учесть, что для параметра петлевого разложения $g \neq 1$ следует сделать замену

$$T \to \frac{1}{g}T, \quad \Delta \to g\Delta, \quad \not{D}_a \to \not{D}_a. \qquad /36/$$

Таким образом, приходим к системе тождеств:

$$\overline{TL_n} = \overline{\not{D}_a L_{n-1}} = \overline{\Delta T L_{n-1}} = \overline{\Delta \not{D}_a L_{n-2}}; \qquad /37а/$$

$$\overline{T^2 L_n} = \overline{T\not{D}_a L_{n-1}} = \overline{\not{D}_a^2 L_{n-2}} - \overline{\dot{T} L_{n-1}} = \overline{\not{D}_a^2 L_{n-2}}; \qquad /37б/$$

. . . .

$$\overline{T^k L_n} = \overline{T^{k-1}\not{D}_a L_{n-1}} = \overline{\not{D}_a T^{k-1} L_{n-1}} - (k-1)\overline{\dot{T} T^{k-2} L_{n-1}} =$$
$$= \overline{\Delta T^{k-1}\not{D}_a L_{n-2}} = \overline{\Delta\not{D}_a T^{k-1} L_{n-2}} - (k-2)\overline{\Delta\dot{T}T^{k-2}L_{n-2}} =$$
$$= \overline{\Delta\not{D}_a T^{k-1} L_{n-2}} + (k-2)\,||\dot\psi_0||^2\, \overline{T^{k-2} L_{n-2}}, \qquad /37в/$$

где использовано

$$[\Delta, \dot{T}] = -\int \dot\psi_0(t)\,\dot\psi_0(t)\,dt = -||\dot\psi_0||^2. \qquad /38/$$

Повторное использование этих, а также полученных ранее соотношений приводит к новым тождествам, например:

$$\overline{TL_n} = \overline{\Delta\not{D}_a L_{n-2}} = \overline{\Delta^2\not{D}_a L_{n-3}} - \overline{\dot\Delta L_{n-2}} = \ldots =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,\overline{\Delta^k\dot\Delta L_{n-2-k}}; \qquad /39а/$$



$$\overline{T^2 L_n} = \overline{\not{D}_a^2 L_{n-2}} = \overline{\Delta\not{D}_a^2 L_{n-3}} + ||\dot\psi_0||^2 \cdot \overline{L_{n-2}} =$$
$$= \overline{\Delta^2\not{D}_a^2 L_{n-4}} - \overline{\Delta\dot\Delta\not{D}_a L_{n-4}} + 3||\dot\psi_0||^2\,\overline{\Delta L_{n-3}} +$$
$$+ \overline{\ddot\Delta L_{n-3}} + ||\dot\psi_0||^2\,\overline{L_{n-2}} = \ldots =$$
$$= ||\dot\psi_0||^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(k+1)(k+2)}{2}\,\overline{\Delta^k L_{n-2-k}} + \sum_{k=0}^{n-3}\frac{(k+1)(k+2)}{2}\,\overline{\ddot\Delta\Delta^k L_{n-1-k}} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-4}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{2}\,\overline{\dot\Delta^2\Delta^k L_{n-k}} \text{ и т.д.},$$

где

$$\dot\Delta = [\not{D}_a, \Delta] = \int\ddot\psi_0 X(t)\,dt; \qquad [\dot\Delta, T] = ||\dot\psi_0||^2$$
$$\ddot\Delta = [\not{D}_a, \dot\Delta] = \int\dddot\psi_0 X(t)\,dt. \qquad /40/$$

Эти тождества позволяют выразить величины $\delta(n,k) = \overline{T^k L_n}$, определяемые вкладом нулевых мод, через сумму петлевых диаграмм с учетом дополнительных вершин, соответствующих внешним источникам

$$\dot\psi_0 = -\frac{\partial V}{\partial q}(q_c), \qquad \ddot\psi_0 = \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}(q_c)\cdot\psi_0 \quad \text{и т.д.} \qquad /41/$$

Аналогичным образом можно вывести другую систему тождеств, выражающих величины $\delta(n,k)$ через средние значения степеней оператора $\not{D}_a$, действующих на единицу, т.е. через $\overline{\not{D}_a^n} \equiv \overline{\not{D}_a^n L_0}$, для нахождения которых имеется хорошо разработанная процедура /см. Приложение/. С этой целью рассмотрим последовательность равенств

$$\overline{T^k L_n} = \overline{T^{k-2}\not{D}_a^2 L_{n-2}} = \overline{\not{D}_a T^{k-2}\not{D}_a L_{n-2}} =$$
$$= \overline{\not{D}_a^2 T^{k-2} L_{n-2}} - (k-2)\,\overline{\ddot{T}T^{k-3}L_{n-2}} =$$
$$= \overline{\not{D}_a^2 T^{k-2} L_{n-2}} + (k-2)\gamma_1 \cdot \overline{T^{k-2}L_{n-2}}; \qquad /42а/$$

$$\overline{T^k L_n} = \overline{\not{D}_a^4 T^{k-4} L_{n-4}} + 2\gamma_1(3k-10)\,\overline{\not{D}_a^2 T^{k-4} L_{n-4}} +$$
$$+ (k-4)\,[\gamma_1^2(3k-5) - \gamma_2]\,\overline{T^{k-4}L_{n-4}} \quad \text{и т.д.} \qquad /42б/$$

Здесь использовано

$$\overline{T^{(k)}F} = \begin{cases} (-)^{\ell}\,\gamma_{\ell}\,\overline{TF}, & k = 2\ell; \\ 0, & k = 2\ell + 1, \end{cases} \qquad /43/$$

где

$$T^{(k)} = \underbrace{[\not{D}_a, [\not{D}_a, \ldots, [\not{D}_a, T]]\ldots]}_{k\ \text{раз}} = \int dt\, \psi_0^{(k)} \left(\frac{\delta}{\delta X} + iHX\right); \qquad /44/$$

$$\psi_0^{(k)} = \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^k \psi_0 ; \qquad \gamma_k = \|\psi_0^{(k)}\|^2 .$$

Доказательство соотношений /43-44/ очевидно и опирается на формулы /10/ и /32/. По этой же причине справедливо равенство:

$$[\Delta, T^{(k)}] = \begin{cases} 0, & k = 2\ell; \\ (-)^{\ell}\,\gamma_{\ell}, & k = 2\ell - 1. \end{cases} \qquad /45/$$

Используя тождества /42/, найдем

$$\overline{T^2 L_2} = \overline{\not{D}_a^2} = \gamma_1 ; \qquad /46а/$$

$$\overline{T^4 L_4} = \overline{\not{D}_a^4} + 4\gamma_1 \cdot \overline{\not{D}_a^2} = 10\gamma_1^2 - \gamma_2 ; \qquad /46б/$$

$$\overline{T^6 L_6} = \overline{\not{D}_a^6} + 20\gamma_1 \cdot \overline{\not{D}_a^4} + (70\gamma_1^2 - 6\gamma_2)\overline{\not{D}_a^2} =$$

$$= 280\gamma_1^3 - 56\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3 \quad \text{и т.д.} \qquad /46в/$$

Подчеркнем, что соотношения /46/ непосредственно свидетельствуют о факте несохранения вкладов нулевых мод в петлевое разложение, определенное операцией усреднения /12/, при условии локализуемости функции нулевой моды.

Таким образом, при наличии квадратично-интегрируемых нулевых мод операция "усреднения" /12/ оказывается зависящей от произвола в выборе функции Грина и не приводит к физически приемлемому квазиклассическому петлевому разложению амплитуд переходов. Введением дополнительных вершин можно добиться точного сокращения вкладов нулевых мод в каждом порядке петлевого разложения.

Действительно, вводя подстановку для членов петлевого разложения вида

$$\overline{L_n} \to \overline{(L_n - \Delta L_{n-1})}, \qquad \Delta = \int \dot{\psi}_0 X\, dt, \qquad /47/$$

придем к точному сокращению вкладов нулевой моды, так как

$$\overline{T^k(L_n - \Delta L_{n-1})} = \overline{T^k L_n} - \overline{\not{D}_a T^{k-1} L_{n-1}} = 0. \qquad /48/$$



Подстановка /47/ соответствует переопределению операции "усреднения", используемой при построении петлевого разложения, а именно:

$$\overline{F_g} \to \langle F_g \rangle \equiv (1 - g\Delta) F_g = \sum_{n=0}^{\infty} g^n\, \overline{(L_n - \Delta L_{n-1})}. \qquad /49/$$

Нетрудно проверить в наиболее общей форме, что

$$\langle T^{k+1}F\rangle = \overline{T^k \not{D}_a F} - \overline{\Delta T^{k+1} F} = \overline{(\not{D}_a - \Delta T) T^k F} - k\,\overline{\dot{T} T^{k-1} F} =$$

$$= \partial_a \overline{(T^k F)} - \overline{(\partial_a T^k)} F = 0 . \qquad /50/$$

Отметим, наконец, что обобщение квазиклассического петлевого разложения /49/, соответствующее введению дополнительных вершин взаимодействия, полностью совпадает в рассмотренном здесь случае с тем, что получается при использовании трюка Фаддеева-Попова или метода коллективных координат Боголюбова[10-12].

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше нами было дано корректное обобщение операторных тождеств, введенных в работе при исследовании проблемы нулевых мод в задаче квантования нелинейных систем, на случай квадратично-интегрируемых /локализуемых/ функций нулевой моды. Данные тождества, отражающие свойства трансляционной инвариантности задачи, позволяют формализовать процедуру доказательства теоремы о сокращении вкладов нулевой моды в каждом порядке соответствующим образом определенного квазиклассического петлевого разложения.

Развитый нами метод операторных тождеств может оказаться полезным также при рассмотрении и других особенностей поведения нелинейных динамических систем, обладающих непрерывными группами симметрии.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Н.Н.Боголюбову и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и полезные обсуждения, Г.А.Чечелашвили, принявшему участие в начальном этапе этих исследований, а также Н.В.Красникову, В.А.Мещерякову и К.Г.Четыркину за плодотворные дискуссии.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приведем простую процедуру для вычисления средних от степеней оператора $\not{D}_a$.

Используя тождество

$$a^n b = \sum_{k=0}^{n} c_k(n)\, b^{(k)} a^{n-k} . \qquad /П.1/$$

справедливое для любых двух операторов a и b, где

$$b^{(k)} = \underbrace{[a,[a,\dots[a,b]\dots]]}_{k\ \text{раз}}, \qquad /\text{П}.2/$$

а $c_k(n) = n!/k!(n-k)!$ - биномиальные коэффициенты, а также то, что действие оператора T на единицу дает нуль, получим соотношение

$$\overline{\not{D}_a^n} = \overline{\Delta T \not{D}_a^{n-1}} = -\sum_{k=1}^{n-1} c_k(n-1)\, \overline{\Delta T^{(k-1)} \not{D}_a^{n-1-k}}\,. \qquad /\text{П}.3/$$

Замечая далее, что в силу формул /43/ и /45/

$$\Delta T^{(k)} = \begin{cases} (-)^{\ell} \gamma_{\ell} \not{D}_a, & k = 2\ell; \\ (-)^{\ell} \gamma_{\ell}\,, & k = 2\ell - 1, \end{cases} \qquad /\text{П}.4/$$

находим рекуррентное соотношение

$$\overline{\not{D}_a^n} = -\sum_{\ell=1}^{n/2} \gamma_{\ell} (-)^{\ell} c_{2\ell}(n)\, \overline{\not{D}_a^{n-2\ell}}\,, \qquad /\text{П}.5/$$

откуда следует

$$\overline{\not{D}_a^2} = \gamma_1; \quad \overline{\not{D}_a^4} = 6\gamma_1 \overline{\not{D}_a^2} - \gamma_2 = 6\gamma_1^2 - \gamma_2;$$
$$\overline{\not{D}_a^6} = 15\gamma_1 \overline{\not{D}_a^4} - 15\gamma_2 \overline{\not{D}_a^2} + \gamma_3 = 30\gamma_1 \cdot (3\gamma_1^2 - \gamma_2) + \gamma_3 \quad \text{и т.д.} \qquad /\text{П}.6/$$

ЛИТЕРАТУРА


1. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Rev., 1978, 42C, No 1, p. 1-87.
2. Faddeev L.D.,Korepin V.E. Phys.Lett., 1975, 63B, p.435-438.
3. Jevicki A. Nucl.Phys., 1976, B117, No 2, p. 365-376.
4. Matveev V.A. Nucl.Phys., 1977, B121, No 3, p. 403-412.
5. Златев С.И., Матвеев В.А., Чечелашвили Г.А. ОИЯИ, Р2-80-505, Дубна, 1980; ТМФ, 1982, 50, №3, с. 323-332.
6. Златев С.И., Матвеев В.А. ОИЯИ, Р2-82-244, Дубна, 1982.
7. Златев С.И., Матвеев В.А. ОИЯИ, Р2-84-186, Дубна, 1984.
8. Lowe M., Stone M. Nucl.Phys., 1978, B136, No 1, p. 177-188.
9. Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, No 1, p. 29-30.
10. Bogolubov N.N. Lectures on quantum statistics. Vol.2 (Gordon and Breach, 1970).
11. Gervais J.L., Neveu A. Phys.Rep., 1976, 23C, No.3, p.240-374.
12. De Vega H.J. Nucl.Phys., 1976, B115, No. 3, p. 411-428.



Рукопись поступила в издательский отдел
18 июля 1984 года.





Златев С.И., Матвеев В.А. Р2-84-530


Операторные тождества в задаче о сокращении нулевых мод


На примере одномерной квантовомеханической модели развит метод операторных тождеств, позволяющий формализовать доказательство точного сокращения вклада нулевых мод в любом порядке соответствующим образом определенного квазиклассического петлевого разложения. Проведенный анализ естественным образом приводит к необходимости введения новых вершин и соответствующих им диаграмм, отвечающих модифицированной теории возмущений.



Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой



Zlatev S.I., Matveev V.A. P2-84-530


Operator Identities in the Problem about Zero Mode Cancellation


On the base of the example of one-dimensional quantum mechanical system a method of operator identities is developed which allows one to formalize a proof of an exact cancellation of zero mode contributions at any order of a proper loop expansion. As a result of the performed analysis new vertices and corresponding diagrams are involved which correspond to a modified perturbation theory.



The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984