объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-526

Л.Г.Мардоян*, Г.С.Погосян*, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян*

МЕЖБАЗИСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КРУГОВОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

Направлено в журнал "Nuovo Cimento A"

* Ереванский государственный университет

1984

1. Как известно, в рамках метода разделения переменных задача о квантовом круговом осцилляторе имеет решение в трех системах координат - декартовой, полярной и эллиптической /1/. Цель настоящей статьи - получить преобразования, связывающие между собой эти решения /базисы/ при фиксированном значении энергии.

2. Фундаментальные базисы кругового осциллятора - это собственные функции гамильтониана *

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{x^2 + y^2}{2}$$

и каждого из генераторов

$$\hat{P} = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \quad \hat{K} = \frac{1}{2}\left(xy - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right), \quad \hat{L} = \frac{1}{2i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

группы 0/3/, гомоморфной группе $SU(2)$ скрытой симметрии кругового осциллятора /2/. Такие базисы реализуются решениями уравнения Шредингера в декартовой (x, y), повернутой на 45°, декартовой (x', y') и в полярной системах координат. Собственные значения операторов $\hat{P}$, $\hat{K}$ и $\hat{L}$ имеют смысл соответствующих констант разделения.

Напомним явный вид фундаментальных базисов:

$$\Psi_{J+M,\, J-M}(x,y) = \frac{(-i)^{J-M}}{2^J\sqrt{\pi}}\, \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}}{\sqrt{(J+M)!\,(J-M)!}}\, H_{J+M}(x)\, H_{J-M}(y), \qquad /1/$$

$$\Psi_{J+\bar{M},\, J-\bar{M}}(x',y') = \frac{1}{2^J\sqrt{\pi}}\, \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\}}{\sqrt{(J+M)!\,(J-M)!}}\, H_{J+\bar{M}}(x')\, H_{J-M}(y')$$

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

$$\Psi_{2J,\, 2M'}(r, \phi) = R_{2J,\, 2|M'|}(r)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp 2iM'\phi,$$

$$R_{2J,\, 2|M'|}(r) = (-1)^{J-|M'|} \sqrt{\frac{2(J+|M'|)!}{(J-|M'|)!}}\, \frac{r^{2|M'|}}{(2|M'|)!} \exp\{-\frac{r^2}{2}\} F(-J+|M'|; 2|M'|+1; r^2).$$

---

*В системе единиц $\hbar = \mu = \omega = 1$.

Фазовые множители перед волновыми функциями выбраны из соображений удобства. Квантовые числа M, $\bar M$ и M' изменяются в пределах: $-J, -J+1, \dots J-1, J$. Число J может быть как целым, так и полуцелым и полностью определяет спектр энергий: $E = 2J+1$.

3. Разложения в фундаментальных базисах, приведенных в предыдущем пункте, имеют следующий вид:

$$\Psi_{J+M,J-M}(x,y) = \sum_{\bar M=-J}^{J} (-i)^{J-\bar M}\, d^{J}_{-M,\bar M}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Psi_{J+\bar M,J-\bar M}(x',y'), \qquad /3/$$

$$\Psi_{J+M,J-M}(x,y) = \sum_{M'=-J}^{J} d^{J}_{M',M}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Psi_{2J,2M'}(r,\phi), \qquad /4/$$

$$\Psi_{J+\bar M,J-\bar M}(x',y') = \sum_{M'=-J}^{J} (i)^{J+\bar M-M'}\, d^{J}_{M',-\bar M}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Psi_{2J,2M'}(r,\phi), \qquad /5/$$

где

$$d^{J}_{M,M'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{M-M'}}{2^J}\sqrt{\frac{(J+M)!\,(J-M)!}{(J+M')!\,(J-M')!}}\ \sum_k (-1)^k \binom{J+M'}{k}\binom{J-M'}{k+M-M'}, \qquad /6/$$

$d^{J}_{M,M'}(\beta)$ - функция Вигнера из квантовой теории углового момента /3/.

Разложения /3/-/5/ доказываются просто. Чтобы вывести /4/ и /5/, нужно устремить в обеих частях $r \to \infty$, использовать ортонормированность функций $\exp im\phi/\sqrt{2\pi}$, формулу /6/ и соотношение симметрии $d^{J}_{M,M'}(\beta) = (-1)^{M-M'}\, d^{J}_{M',M}(\beta)$. Справедливость разложения /3/ устанавливается подстановкой в него /5/ и дальнейшим его сведением /с помощью теоремы сложения для d-функций/ к разложению /4/.

Теоретико-групповой смысл преобразований /3/-/5/ легко понять. Для каждого фундаментального базиса

$$\hat J^2\Psi \equiv (\hat P^2 + \hat K^2 + \hat L^2)\Psi = \frac{\hat H^2 - 1}{4}\Psi = J(J+1)\Psi, \quad \hat P\Psi_{J+M,J-M}(x,y) = M\Psi_{J+M,J-M}(x,y),$$

$$\hat K\Psi_{J+\bar M,J-\bar M}(x',y') = \bar M\Psi_{J+\bar M,J-\bar M}(x',y'), \quad \hat L\Psi_{2J,2M'}(r,\phi) = M'\Psi_{2J,2M'}(r,\phi)$$

и, так как $\{\hat P, \hat K\} = i\hat L$, $\{\hat L, \hat P\} = i\hat K$, $\{\hat K, \hat L\} = i\hat P$, то налицо аналогия, позволяющая интерпретировать преобразования /3/-/5/ как вращения в трехмерном пространстве, соответствующем группе скрытой симметрии кругового осциллятора.

4. Введем базисы с данной четностью, т.е. собственные функции операторов $\hat H$, $\hat P$, $\hat P_y$, $\hat P_{xy}$ и $\hat H$, $\hat L$, $\hat P_y$, $\hat P_{xy}$ соответственно, где, по определению,

$$\hat P_y\Psi(x,y) = \Psi(x,-y), \qquad \hat P_y\Psi(r,\phi) = \Psi(r,-\phi),$$

$$\hat P_{xy}\Psi(x,y) = \Psi(-x,-y), \qquad \hat P_{xy}\Psi(r,\phi) = \Psi(r,\phi+\pi).$$

Именно такие базисы являются теми пределами, в которые переходит эллиптический базис /1/.

Декартовы базисы с данной четностью определяются выражением /1/ при: $J+M = 2k$, $J-M = 2n-2k$; $J+M = 2k+1$, $J-M = 2n-2k$; $J+M = 2k$, $J-M = 2n-2k+1$; $J+M = 2k+1$, $J-M = 2n-2k+1$. Здесь n и k - целые неотрицательные числа, причем $0 \le k \le n$. Для соответствующих полярных базисов

$$\Psi^{(\pm)}_{2J,m}(r,\phi) = R_{2J,m}(r)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\begin{matrix}\cos m\phi\\ i\sin m\phi\end{matrix}\right\}$$

и квантовые числа J и m равны: $J = n$, $m = 2p$; $J = n+1/2$, $m = 2p+1$ при индексе "+" и $J = n+1$, $m = 2p+2$; $J = n+1/2$, $m = 2p+1$ - при индексе "-". Как и в случае декартового базиса, $n = 0,1,2$. Соблюдается также условие $0 \le p \le n$.

В /1/ методом разделения переменных было решено уравнение Шредингера для кругового осциллятора в эллиптических координатах

$$x = \frac{R}{2}\operatorname{ch}\xi\cos\eta, \quad y = \frac{R}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\eta, \quad 0 \le \xi < \infty, \quad 0 \le \eta \le 2\pi, \quad 0 \le R < \infty.$$

В терминах этих координат операторы $\hat P_y$ и $\hat P_{xy}$ осуществляют преобразования $\eta \to -\eta$ и $\eta \to \eta + \pi$ соответственно. Эллиптические базисы с данной четностью имеют вид:

$$\Psi^{(c,c)} = C^{(c,c)}(R^2)\,\mathrm{hc}^{2q}_{2n}\left(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2\right)\mathrm{hc}^{2q'}_{2n}(\eta; R^2)$$

$$\Psi^{(s,c)} = C^{(s,c)}(R^2)\,\mathrm{hs}^{2q+1}_{2n+1}\left(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2\right)\mathrm{hc}^{2q'+1}_{2n+1}(\eta; R^2),$$

$$\Psi^{(c,s)} = C^{(c,s)}(R^2)\,\mathrm{hc}^{2q+1}_{2n+1}\left(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2\right)\mathrm{hs}^{2q'+1}_{2n+1}(\eta; R^2),$$

$$\Psi^{(s,s)} = C^{(s,s)}(R^2)\,\mathrm{hs}^{2q+2}_{2n+2}\left(i\xi + \frac{\pi}{2}; -R^2\right)\mathrm{hs}^{2q'+2}_{2n+2}(\eta; R^2),$$

где

$$\mathrm{hc}^{m}_{n}(z, R^2) = \exp\left\{-\frac{R^2}{16}\cos z\right\}\sum_{k=0}^{n} a_k(R^2)(\cos z)^k, \qquad /7/$$

$$\mathrm{hs}^{m}_{n}(z; R^2) = \exp\left\{-\frac{R^2}{16}\cos z\right\}\sin z\sum_{k=0}^{n} b_k(R^2)(\cos z)^k. \qquad /8/$$

Коэффициенты $a_k(R^2)$ и $b_k(R^2)$ и эллиптические нормировочные постоянные $C(R^2)$ считаются известными [1]. В частности, $a_k(R^2)$ и $b_k(R^2)$ определяются трехчленными рекуррентными соотношениями

$$(k+1)(k+2)\,a_{k+2} + \beta_k a_k + \frac{R^2}{2}(k-n-2)\,a_{k-2} = 0,$$

$$(k+1)(k+2)\,b_{k+2} + \tilde{\beta}_k b_k + \frac{R^2}{2}(k-n-1)\,b_{k-2} = 0,$$

в которых

$$\beta_k = -k^2 + \frac{R^2}{4}(\epsilon - 2k - 1) + \frac{R^4}{64} - A(R^2), \quad \tilde{\beta}_k = -(k+1)^2 + \frac{R^2}{4}(\epsilon - 2k - 1) + \frac{R^4}{64} - A(R^2),$$

и $A(R^2)$ - эллиптическая константа разделения, собственные значения которой находятся из условия равенства нулю детерминантов, соответствующих рекуррентным соотношениям. Имеются еще дополнительные условия: $a_{-1} = a_{-2} = b_{-1} = b_{-2} = 0$, $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$. Квантовые числа q и q' являются целыми, причем $0 \le q \le n$, $0 \le q' \le n$. Число q имеет смысл числа нулей функций hc и hs, зависящих от переменной η. Выписанные эллиптические базисы при $R \to 0$ и $R \to \infty$ переходят полярные и декартовы базисы с данной четностью.

5. Разложим декартовы базисы с данной четностью по ооответствующим полярным:

$$\Psi^{(+)}_{2k,2n-2k}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \omega^{(+)}_{2p}\,\Psi^{(+)}_{2n,2p}(r,\phi), \qquad /9/$$

$$\Psi^{(+)}_{2k+1,2n-2k}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \omega^{(+)}_{2p+1}\,\Psi^{(+)}_{2n+1,2p+1}(r,\phi), \qquad /10/$$

$$\Psi^{(-)}_{2k,2n-2k+1}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \omega^{(-)}_{2p+1}\,\Psi^{(-)}_{2n+1,2p+1}(r,\phi), \qquad /11/$$

$$\Psi^{(-)}_{2k+1,2n-2k+1}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \omega^{(-)}_{2p+2}\,\Psi^{(-)}_{2n+2,2p+2}(r,\phi). \qquad /12/$$

Из разложения /4/ легко показать, что

$$\omega^{(+)}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,d^{n}_{0,2k-n}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \omega^{(+)}_p = \sqrt{2}\,d^{n}_{p,2k-n}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad p \neq 0,$$

$$\omega^{(+)}_{2p+1} = \sqrt{2}\,d^{n+1/2}_{p+1/2,2n-n+1/2}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \omega^{(-)}_{2p+1} = \sqrt{2}\,d^{n+1/2}_{p+1/2,2k-n-1/2}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad /13/$$

$$\omega^{(-)}_{2p+2} = \sqrt{2}\,d^{n+1}_{p+1,2k-n}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Вычисления возможно провести и другим путем. Устремляя в /9/ $r \to 0$, находим

$$\omega^{(+)}_0 = \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-1/2}}\,\frac{\sqrt{(2k)!\,(2n-2k)!}}{k!\,(n-k)!}.$$

При расчете остальных коэффициентов учитываем условие ортонормированности [4]

$$\int_0^\infty R_{2J,m}(r)\,R_{2J,m'}(r)\,\frac{dr}{r} = \frac{1}{m}\,\delta_{mm'}, \qquad /14/$$

справедливое при $m \neq 0$ и $m' \neq 0$, и соотношение

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{m-1} F(a;b;z)\,F(c;d;z)\,dz = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(d)\,\Gamma(d-c-m)}{\Gamma(d-c)\,\Gamma(d-m)}\;{}_3F_2\left\{ {a, m, 1+m-d \atop b, 1+m-c-d} \middle| 1 \right\},$$

правомерность которого устанавливается разложением одной из подынтегральных вырожденных гипергеометрических функций по степеням z и дальнейшим интегрированием. В результате получаем

$$\omega^{(+)}_{2p} = \frac{(-1)^{n+k-p}\,n!}{2^{n-1/2}\,k!\,(n-k)!}\sqrt{\frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{(n+p)!\,(n-p)!}}\;{}_3F_2\left\{ {-k, -p, p \atop 1/2, -n} \middle| 1 \right\},$$

$$\omega^{(+)}_{2p+1} = \frac{(-1)^{n+k-p}\,(2p+1)\,n!}{2^{n}\,k!\,(n-k)!}\sqrt{\frac{(2k+1)!\,(2n-2k)!}{(n+p+1)!\,(n-p)!}}\;{}_3F_2\left\{ {-k, -p, p+1 \atop 3/2, -n} \middle| 1 \right\},$$

$$/15/$$

$$\omega^{(-)}_{2p+1} = \frac{(-1)^{n+k-p}\,n!}{2^{n}\,k!\,(n-k)!}\sqrt{\frac{(2k)!\,(2n-2k+1)!}{(n+p+1)!\,(n-p)!}}\;{}_3F_2\left\{ {-k, -p, p+1 \atop 1/2, -n} \middle| 1 \right\},$$

$$\omega^{(-)}_{2p+2} = \frac{(-1)^{n+k-p+1}\,(2p+2)\,n!}{2^{n+1/2}\,k!\,(n-k)!}\sqrt{\frac{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}{(n+p+2)!\,(n-p)!}}\;{}_3F_2\left\{ {-k, -p, p+1 \atop 3/2, -n} \middle| 1 \right\}.$$

Тот факт, что коэффициенты в разложениях /9/-/12/ выразились через обобщенные гипергеометрические функции ${}_3F_2$, не случаен и подтверждает замеченную ранее [5,6] связь между $d^{J}_{M,M'}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и ${}_3F_2(1)$ -функциями.

6. Разложим эллиптические базисы по полярным:

$$\Psi^{(c,c)} = \sum_{p=0}^{n} W^{(+)}_{2p}(R^2)\,\Psi^{(+)}_{2n,2p}(r,\phi), \qquad \Psi^{(s,c)} = \sum_{p=0}^{n} W^{(+)}_{2p+1}(R^2)\,\Psi^{(+)}_{2n+1,2p+1}(r,\phi),$$

$$\Psi^{(c,s)}=\sum_{p=0}^{n} W^{(-)}_{2p+1}(R^2)\,\Psi^{(-)}_{2n+1,2p+1}(r,\phi),\qquad \Psi^{(s,s)}=\sum_{p=0}^{n} W^{(-)}_{2p+2}(R^2)\,\Psi^{(-)}_{2n+2,2p+2}(r,\phi).$$

Устремляя в первом из этих разложений $r\to 0$, получим

$$W_0^{(+)}(R^2)=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,C^{(c,c)}(R^2).$$

Для вычисления остальных коэффициентов перейдем в полярных базисах от полярных координат к эллиптическим

$$r=\frac{R}{2}\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-\sin^2\eta},\quad \cos\phi=\frac{\mathrm{ch}\xi\cos\eta}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-\sin^2\eta}},\quad \sin\phi=\frac{\mathrm{sh}\xi\sin\eta}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-\sin^2\eta}},$$

устремим $\eta\to\pi/2$ и используем свойство ортогональности /14/. Тогда, после учета формул /7/ и /8/, получим

$$W_{2p}^{(+)}(R^2)=\frac{(-1)^n\sqrt{2\pi}\,n!}{\sqrt{(n+p)!\,(n-p)!}}\,C^{(c,c)}(R^2)\sum_{s=0}^{p}\left(-\frac{4}{R}\right)^s a_{2s}(-R^2)\frac{(p)_s(-p)_s}{(-n)_s},\quad p\neq 0$$

$$W_{2p+1}^{(+)}(R^2)=\frac{(-1)^n\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(n+p+1)!\,(n-p)!}}\;\frac{C^{(s,c)}(R^2)}{R}\sum_{s=0}^{p}\left(-\frac{4}{R^2}\right)^s b_{2s}(-R^2)\frac{(p-1)_s(-p)_s}{(-n)_s},$$

$$W_{2p+1}^{(-)}(R^2)=\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2\pi}(2p+1)}{\sqrt{(n+p+1)!\,(n-p)!}}\;\frac{C^{(c,s)}(R^2)}{R}\sum_{s=0}^{p}\left(-\frac{4}{R^2}\right)^s a_{2s+1}(-R^2)\frac{(p+1)_s(-p)_s}{(-n)_s},$$

$$W_{2p+2}^{(-)}(R^2)=\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2\pi}\,(2p+2)\,n!}{\sqrt{(n+p+2)!\,(n-p)!}}\;\frac{C^{(s,s)}(R^2)}{R^2}\sum_{s=0}^{p}\left(-\frac{4}{R^2}\right)^s b_{2s+1}(-R^2)\frac{(p+2)_s(-p)_s}{(-n)_s}.$$

где $(a)_s=\Gamma(a+s)/\Gamma(a)$.

Перейдем к разложениям эллиптических базисов по декартовым:

$$\Psi^{(c,c)}=\sum_{k=0}^{n}U^{(+)}_{2k}(R^2)\,\Psi^{(+)}_{2k,2n-2k}(x,y),\qquad \Psi^{(s,c)}=\sum_{k=0}^{n}U^{(+)}_{2k+1}(R^2)\,\Psi^{(+)}_{2k+1,2n-2k}(x,y),$$

$$\Psi^{(c,s)}=\sum_{k=0}^{n}U^{(-)}_{2k}(R^2)\,\Psi^{(-)}_{2k,2n-2k+1}(x,y),\qquad \Psi^{(s,s)}=\sum_{k=0}^{n}U^{(-)}_{2k+1}(R^2)\,\Psi^{(-)}_{2k+1,2n-2k+1}(x,y).$$

Как и выше, переходим к пределу $\eta\to\pi/2$, используя на этот раз ортогональность полиномов Эрмита и формулы /7/ и /8/:

$$U_{2k}^{(+)}(R^2)=\frac{(-1)^k2^nk!\sqrt{\pi}}{\sqrt{(2k)!\,(2n-2k)!}}\;\frac{C^{(c,c)}(R^2)}{(R^2)^{n-k}}\sum_{s=0}^{k}\frac{a_{2s+2n-2k}(-R^2)}{(-R^2)^s}\;\frac{(2s+2n-2k)!}{s!},$$

$$U_{2k+1}^{(+)}(R^2)=\frac{(-1)^k2^n\sqrt{\pi}\,k!}{\sqrt{(2k+1)!\,(2n-2k)!}}\;\frac{C^{(s,c)}(R^2)}{R\cdot(R^2)^{n-k}}\sum_{s=0}^{k}\frac{b_{2s+2n-2k}(-R^2)}{(-R^2)^s}\;\frac{(2s+2n-2k)!}{s!},$$

$$U_{2k}^{(-)}(R^2)=\frac{(-1)^{k+1}2^n\sqrt{2\pi}\,k!}{\sqrt{(2k)!(2n-2k+1)!}}\;\frac{C^{(c,s)}(R^2)}{R\cdot(R^2)^{n-k}}\sum_{s=0}^{k}\frac{a_{2s+2n-2k+1}(-R^2)}{(-R^2)^s}\;\frac{(2s+2n-2k+1)!}{s!},$$

$$U_{2k+1}^{(-)}(R^2)=\frac{(-1)^k2^{n+1}\sqrt{\pi}\,k!}{\sqrt{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}}\;\frac{C^{(s,s)}(R^2)}{R^2(R^2)^{n-k}}\sum_{s=0}^{k}\frac{b_{2s+2n-2k+1}}{(-R^2)^s}\;\frac{(2s+2n-2k+1)!}{s!}.$$

Приведем еще таблицы с некоторыми частными значениями коэффициентов $W(R^2)$ и $U(R^2)$. В них принято обозначение $\lambda=A(R^2)-(R^4/64)$.

Таблица 1

n	p	$W_{2p}^{(+)}(R^2)$	$\lambda^{(c,c)}$
0	0	1	$\lambda^{(c,c)}=0$
1	0	$\left(\frac{\lambda^{(c,c)}+4}{3\lambda^{(c,c)}+4}\right)^{1/2}$	$\lambda^{(c,c)}(\lambda^{(c,c)}+4)=\frac{R^4}{4}$
1	1	$-\frac{2\sqrt{2}}{R^2}\lambda^{(c,c)}\left(\frac{\lambda^{(c,c)}+4}{3\lambda^{(c,c)}+4}\right)^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\frac{8}{3}\left(\frac{\lambda^{(c,c)}}{R^2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\lambda^{(c,c)}}{\lambda^{(c,c)}+16}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$\lambda^{(c,c)}(\lambda^{(c,c)}+4)(\lambda^{(c,c)}+16)=R^4(\lambda^{(c,c)}+12)$
2	1	$-\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{\lambda^{(c,c)}}{R^2}\left\{1+\frac{8}{3}\left(\frac{\lambda^{(c,c)}}{R^2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\lambda^{(c,c)}}{\lambda^{(c,c)}+16}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{\lambda^{(c,c)}}{\lambda^{(c,c)}+16}\left\{1+\frac{8}{3}\left(\frac{\lambda^{(c,c)}}{R^2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\lambda^{(c,c)}}{\lambda^{(c,c)}+16}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 2

n	p	$W^{(+)}_{2p+1}\ (R^2)$	$\lambda^{(s,c)}$
0	0	1	$\lambda^{(s,c)} = -1 - \frac{R^2}{4}$
1	0	$\left\{\frac{\lambda^{(s,c)}+9}{2\lambda^{(s,c)}+10+R^2/2}\right\}^{1/2}$	$(\lambda^{(s,c)}+1)(\lambda^{(s,c)}+9) =$
1	1	$-\frac{4}{\sqrt{3}R^2}(\lambda^{(s,c)}+1+R^2/2)\left\{\frac{\lambda^{(s,c)}+9}{2\lambda^{(s,c)}+10+R^2/2}\right\}^{1/2}$	$= -\frac{R^2}{2}(\lambda^{(s,c)}+9)+\frac{3R^4}{16}$
2	0	$\left\{1+\frac{2}{R^4}(\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4}{\lambda^{(s,c)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(s,c)}+1)(\lambda^{(s,c)}+9)(\lambda^{(s,c)}+25) =$
2	1	$-\frac{\sqrt{2}}{R^2}(\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4)\left\{1+\frac{2}{R^4}(\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4}{\lambda+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$= -\frac{3R^2}{4}(\lambda^{(s,c)}+9)(\lambda^{(s,c)}+25)+$
2	2	$\frac{\sqrt{10}}{4}\,\frac{\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4}{\lambda^{(s,c)}+25}\left\{1+\frac{2}{R^4}(\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(s,c)}+1+3R^2/4}{\lambda^{(s,c)}+25}\right)^2\right\}^{1/2}$	$+\frac{R^4}{16}(13\lambda^{(s,c)}+205)+\frac{15R^6}{64}$

Таблица 3

n	p	$W^{(-)}_{2p+1}\ (R^2)$	$\lambda^{(c,s)}$
0	0	1	$\lambda^{(c,s)} = -1 + \frac{R^2}{4}$
1	0	$\left\{\frac{\lambda^{(c,s)}+9}{2\lambda^{(c,s)}+10-R^2/2}\right\}^{1/2}$	$(\lambda^{(c,s)}+1)(\lambda^{(c,s)}+9) =$
1	1	$-\frac{4}{\sqrt{3}R^2}(\lambda^{(c,s)}+1-R^2/2)\left\{\frac{\lambda^{(c,s)}+9}{2\lambda^{(c,s)}+10-R^2/2}\right\}^{1/2}$	$= \frac{R^2}{2}(\lambda^{(c,s)}+9)+\frac{3R^4}{16}$
2	0	$\left\{1+\frac{2}{R^4}(\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(c,s)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(c,s)}+1)(\lambda^{(c,s)}+9)(\lambda^{(c,s)}+25) =$
2	1	$-\frac{\sqrt{2}}{R^2}(\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4)\left\{1+\frac{2}{R^4}(\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(c,s)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$= \frac{3R^2}{4}(\lambda^{(c,s)}+9)(\lambda^{(c,s)}+25)+$
2	2	$\frac{\sqrt{10}}{4}\,\frac{\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(c,s)}+25}\left\{1+\frac{2}{R^4}(\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(c,s)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(c,s)}+25}\right)^2\right\}^{1/2}$	$+\frac{R^4}{16}(13\lambda^{(c,s)}+205)-\frac{15R^6}{64}$

Таблица 4

n	p	$W^{(-)}_{2p+2}\ (R^2)$	$\lambda^{(s,s)}$
0	0	1	$\lambda^{(s,s)} = -4$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\lambda^{(s,s)}+16}{\lambda^{(s,s)}+10}\right\}^{1/2}$	$(\lambda^{(s,s)}+4)(\lambda^{(s,s)}+16) =$
1	1	$-\frac{\sqrt{2}}{R^2}(\lambda^{(s,s)}+4)\left\{\frac{\lambda^{(s,s)}+16}{\lambda^{(s,s)}+10}\right\}^{1/2}$	$= \frac{R^4}{4}$
2	0	$\left\{1+\frac{8}{5R^4}(\lambda^{(s,s)}+4)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(s,s)}+4}{\lambda^{(s,s)}+36}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(s,s)}+4)(\lambda^{(s,s)}+16)\times$
2	1	$-\frac{4}{\sqrt{10}R^2}(\lambda^{(s,s)}+4)\left\{1+\frac{8}{5R^4}(\lambda^{(s,s)}+4)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(s,s)}+4}{\lambda^{(s,s)}+36}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$\times(\lambda^{(s,s)}+36) =$
2	2	$\sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{\lambda^{(s,s)}+4}{\lambda^{(s,s)}+36}\left\{1+\frac{8}{5R^4}(\lambda^{(s,s)}+4)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(s,s)}+4}{\lambda^{(s,s)}+36}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$= R^4(\lambda^{(s,s)}+24)$

Таблица 5

n	k	$U^{(+)}_{2k}\ (R^2)$	$\lambda^{(c,c)}$
0	0	1	$\lambda^{(c,c)} = 0$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\lambda^{(c,c)}+2+\frac{R^2}{2}}{\lambda^{(c,c)}+2}\right\}^{1/2}$	$\lambda^{(c,c)}(\lambda^{(c,c)}+4) =$
1	1	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda^{(c,c)}+2-\frac{R^2}{2})\left\{\frac{\lambda^{(c,c)}+2+R^2/2}{\lambda^{(c,c)}+2}\right\}^{1/2}$	$= \frac{R^4}{4}$
2	0	$\left\{1+\frac{1}{24}(\lambda^{(c,c)}+4-R^2)^2+\left(\frac{\lambda^{(c,c)}+4-R^2}{\lambda^{(c,c)}+4+R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$\lambda^{(c,c)}(\lambda^{(c,c)}+4)(\lambda^{(c,c)}+16) =$
2	1	$-\frac{1}{2\sqrt{6}}(\lambda^{(c,c)}+4-R^2)\left\{1+\frac{1}{24}(\lambda^{(c,c)}+4-R^2)^2+\left(\frac{\lambda^{(c,c)}+4-R^2}{\lambda^{(c,c)}+4+R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$= R^4(\lambda^{(c,c)}+12)$
2	2	$\frac{\lambda^{(c,c)}+4-R^2}{\lambda^{(c,c)}+4+R^2}\left\{1+\frac{1}{24}(\lambda^{(c,c)}+4-R^2)+\left(\frac{\lambda^{(c,c)}+4-R^2}{\lambda^{(c,c)}+4-R}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 6

n	k	$U^{(+)}_{2k+1}\ (R^2)$	$\lambda^{(s,c)}$
0	0	1	$\lambda^{(s,c)} = -1 - \frac{R^2}{4}$
1	0	$\left\{ \frac{\lambda^{(s,c)} + 3 + 3R^2/4}{2\lambda^{(s,c)} + 10 + R^2/2} \right\}^{1/2}$	$(\lambda^{(s,c)}+1)(\lambda^{(s,c)}+9) =$
1	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda^{(s,c)} + 7 - R^2/4)\left\{ \frac{\lambda^{(s,c)} + 3\ \ 3R^2/4}{2\lambda^{(s,c)} + 10 + R^2/2} \right\}^{1/2}$	$= -\frac{R^2}{2}(\lambda^{(s,c)}+9) + \frac{3R^4}{16}$
2	0	$\left\{1 + \frac{1}{72}(\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4}{\lambda^{(s,c)} + 5 + 5R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(s,c)}+1)(\lambda^{(s,c)}+9)(\lambda^{(s,c)}+25) =$
2	1	$-\frac{\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4}{6\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{1}{72}(\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4}{\lambda^{(s,c)} + 5 + 5R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$= -\frac{3R^2}{4}(\lambda^{(s,c)}+9)(\lambda^{(s,c)}+25) +$
2	2	$\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4}{\lambda^{(s,c)} + 5 + 5R^2/4}\left\{1 + \frac{1}{72}(\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{\lambda^{(s,c)} + 13 - 3R^2/4}{\lambda^{(s,c)} + 5 + 5R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$+ \frac{R^4}{16}(13\lambda^{(s,c)} + 205) + \frac{15R^6}{64}$

Таблица 7

n	k	$U^{(-)}_{2k}\ (R^2)$	$\lambda^{(c,s)}$
0	0	1	$\lambda^{(c,s)} = -1 + \frac{R^2}{4}$
1	0	$\left\{ \frac{\lambda^{(c,s)} + 7 + R^2/4}{2\lambda^{(c,s)} + 10 - R^2/4} \right\}^{1/2}$	$(\lambda^{(c,s)}+1)(\lambda^{(c,s)}+9) =$
1	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda^{(c,s)} + 3 - 3R^2/4\left\{ \frac{\lambda^{(c,s)} + 7 + R^2/4}{2\lambda^{(c,s)} + 10 - R^2/4} \right\}^{1/2}$	$= \frac{R^2}{2}(\lambda^{(c,s)}+9) + \frac{3R^4}{16}$
2	0	$\left\{1 + \frac{1}{40}(\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4}{\lambda^{(c,s)} + 13 + 3R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(c,s)}+1)(\lambda^{(c,s)}+9)(\lambda^{(c,s)}+25) =$
2	1	$-\frac{1}{2\sqrt{10}}(\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4)\left\{1 + \frac{1}{40}(\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4}{\lambda^{(c,s)} + 13 + 3R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$= \frac{3R^2}{4}(\lambda^{(c,s)}+9)(\lambda^{(c,s)}+25) +$
2	2	$\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4}{\lambda^{(c,s)} + 13 + 3R^2/4}\left\{1 + \frac{1}{40}(\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(c,s)} + 5 - 5R^2/4}{\lambda^{(c,s)} + 13 + 3R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$+ \frac{R^4}{16}(13\lambda^{(c,s)} + 205) - \frac{15R^6}{64}$

Таблица 8

n	k	$U^{(-)}_{2k+1}\ (R^2)$	$\lambda^{(s,s)}$
0	0	1	$\lambda^{(s,s)} = -4$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \frac{\lambda^{(s,s)} + 10 + R^2/2}{\lambda^{(s,s)} + 10} \right\}^{1/2}$	$(\lambda^{(s,s)}+4)(\lambda^{(s,s)}+16) =$
1	1	$-\frac{1}{6\sqrt{2}}(\lambda^{(s,s)} + 10 - R^2/2)\left\{ \frac{\lambda^{(s,s)} + 10 + R^2/2}{\lambda^{(s,s)} + 10} \right\}^{1/2}$	$= \frac{R^4}{4}$
2	0	$\left\{1 + \frac{(\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2)^2}{120} + \left(\frac{\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2}{\lambda^{(s,s)} + 16 + R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(s,s)}+4)(\lambda^{(s,s)}+16)\times$
2	1	$-\frac{\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2}{2\sqrt{30}}\left\{1 + \frac{1}{120}(\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2)^2 + \left(\frac{\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2}{\lambda^{(s,s)} + 16 + R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$\times(\lambda^{(s,s)}+36) =$ $= R^4(\lambda^{(s,s)}+24)$
2	2	$\frac{\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2}{\lambda^{(s,s)} + 16 + R^2}\left\{1 + \frac{1}{120}(\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2)^2 + \left(\frac{\lambda^{(s,s)} + 16 - R^2}{\lambda^{(s,s)} + 16 + R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Мы признательны Г.С.Саакяну, Я.А.Смородинскому, Л.И.Пономареву и С.И.Виницкому за интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мардоян Л.Г. и др. ОИЯИ, Р2-83-475, Дубна, 1983.
2. Englefield M.J. Group Theory and the Coulomb Problem. Wiley-Interscience, New York, London, Sydney, Toronto, 1972.
3. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
4. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. Изв.АН АрмССР, сер.физ., 1984, т.19, с.45.
5. Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. ЯФ, 1977, 25, с.447.
6. Погосян Г.С., Смородинский Я.А., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, Р2-82-118, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник *"Краткие сообщения ОИЯИ"*. В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют /в отличие от препринтов/ статус официальных публикаций ОИЯИ.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condenced matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of this new collection, in contrast to the JINR Preprints, have the status of official publications of the JINR.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.

Мардоян Л.Г. и др. Р2-84-526
Межбазисные разложения в круговом осцилляторе

Вычислены коэффициенты, определяющие разложения в фундаментальных базисах квантового кругового осциллятора. Получены формулы для коэффициентов в разложениях эллиптических базисов по полярным и декартовым. Составлены табличные значения этих коэффициентов для некоторых частных случаев.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Mardoyan L.G. et al. P2-84-526
Interbasis Expansions in the Circular Oscillator

Expansion coefficients for fundamental bases of a quantum circular oscillator are calculated. Formulae are found for the coefficients of expansions of the elliptic bases over the polar and Cartesian ones. Values of these coefficients are tabulated for some particular cases.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984