

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-84-513

В.Г.Маханьков, О.К.Пашаев, С.А.Сергеенков

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ
С НЕКОМПАКТНОЙ ГРУППОЙ
В ТЕОРИИ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

Доклад на III Международном симпозиуме
по избранным проблемам статистической механики,
Дубна 1984

1984

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, широкий круг физических проблем может быть изучен в рамках модели слабонеидеального бозе-газа. При этом учет лишь парных взаимодействий между бозонами, являясь достаточно содержательным в физическом плане, допускает точное математическое решение в случае одного пространственного измерения.

На квантово-механическом уровне слабонеидеальный бозе-газ N частиц описывается уравнением Шредингера $H\Psi = (T + V)\Psi = E\Psi$

с двухчастичным потенциалом взаимодействия $V = 2\kappa \sum_{i \neq j}^N \delta(x_i - x_j)$.

Решение этой задачи методом анзаца Бете было дано как в случае притяжения частиц, $\kappa > 0$, так и в случае отталкивания, $\kappa < 0$.

В картине вторичного квантования система соответствующих частиц описывается квантовым /операторным/ нелинейным уравнением Шредингера $i\hat{\Psi}_t + \hat{\Psi}_{xx} + 2\kappa |\hat{\Psi}|^2 \hat{\Psi} = 0$. Это уравнение интегрируется квантовым методом обратной задачи - алгебраическим вариантом анзаца Бете.

Квазиклассическое описание слабонеидеального бозе-газа, так же, как и описание в методе самосогласованного поля или в методе коллективных переменных, приводит к классическому /с-числовому/ нелинейному уравнению Шредингера /НУШ/

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\kappa |\psi|^2 \psi = 0. \quad /1/$$

Оно позволяет установить возможность существования в бозе-газе явления сверхтекучести /1/, эффекта Джозефсона /2/, вихревых /3/ и периодических /4/ структур. НУШ используется также для описания слабонеидеального бозе-газа магновов в ферро- и антиферромагнетиках /5/, распространения электро-магнитных волн в диспергирующих средах /6/, в частности, распространения лазерного излучения в оптических волноводах /7/.

Точное интегрирование НУШ как на классическом /8/, так и на квантовом /9/ уровне выявило наряду с боголюбовским спектром с дисперсией $\epsilon(p) = p\sqrt{p^2 + \kappa^2}$ наличие дырочной ветви - дискретного спектра. На классическом уровне она описывается солитонами /10/.

Исследование сверхтекучих свойств ряда квантовых жидкостей в настоящее время указывает на тензорный характер параметра порядка в них, который во многом аналогичен скалярному. Интегрируемым вариантом модели слабонеидеального бозе-газа с n внутрен-

ними /"цветовыми"/ степенями свободы, не затрагивающими характера взаимодействия, является $SU(n)$ НУШ отталкивающего типа /11/.

Описание магнитных систем на языке газа магнонов и соответствующие феноменологические уравнения Ландау-Лифшица /5/ показывают, что в определенных ситуациях можно ограничиться слабонеидеальным газом магнонов. При этом характер взаимодействия магнонов определяется знаками интегралов обменного взаимодействия и анизотропии. Однако объединение слабонеидеальных бозе-газов притягивающегося и отталкивающего типов в интегрируемый вариант НУШ возможно лишь в рамках некомпактной группы внутренней симметрии $U(1,1)$, реализованной линейно на полях /12/.

В работе Боголюбова /1/ впервые показано, что каноническое преобразование в сверхтекучем бозе-газе с конденсатом носит гиперболический характер. Наглядный смысл его как гиперболического вращения был дан в работе Соломона /13/, показавшей, что динамической группой симметрии сверхтекучего бозе-газа является некомпактная псевдоунитарная группа $SU(1,1)$. В одном измерении линейная задача для соответствующего НУШ также формулируется на алгебре группы $SU(1,1)$. Ассоциированная с ним нелинейная σ -модель описывается изотропным уравнением Ландау-Лифшица на некомпактном многообразии $SU(1,1)/U(1)$ /14/.

Объединение "цветовых" ($SU(n)$) и "ароматных" симметрий приводит к НУШ с $U(p, q)$ изогруппой /15/. Как показано в /16/, эти уравнения возникают при описании многоподрешеточных квазиодномерных магнитных систем с различным характером взаимодействия в подрешетках. Изучение поляризованных пучков света в оптических волноводах также может приводить к $U(2)$ и $U(1,1)$ НУШ.

Специфические свойства $U(p, q)$ НУШ,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\kappa(\bar{\psi}\psi)\psi = 0, \quad (\psi(x, t))_a = \psi^{(a)}(x, t), \quad (a=1, \dots, n), \quad (n=p+q); \quad /2/$$

$$(\bar{\psi}\psi) = \sum_{a=1}^p |\psi^{(a)}|^2 - \sum_{a=p+1}^{p+q} |\psi^{(a)}|^2,$$

связаны с тем, что соответствующая ему линейная задача и ассоциированная с ней σ -модель в форме изотропного уравнения Ландау-Лифшица формулируются на алгебре Ли некомпактной группы $G = SU(p+1, q)$ /17/. При этом плотность энергии для уравнения Ландау-Лифшица пропорциональна $U(p, q)$ инвариантной плотности числа частиц НУШ:

$$H = \frac{1}{2} \text{Tr}(S_x)^2 = \sum_{a=1}^p |\psi^{(a)}|^2 - \sum_{a=p+1}^{p+q} |\psi^{(a)}|^2. \quad /3/$$

Эта плотность энергии может быть сделана знакоопределенной, если факторизация группы G производится по максимальной компактной подгруппе $G/H = SU(p+1, q)/S(U(p+1) \otimes U(q))$.

В случае $p=0$ факторизации $G/H = SU(1, q)/S(U(1) \otimes U(q))$ соответствует $U(q)$ НУШ, описывающее бозе-газ отталкивающего типа с q цветовыми степенями свободы. Плотность энергии /3/ в этом случае отрицательно определена. Введением конденсата конечной плотности ρ ее можно сделать положительной $H' = \rho - \sum_{a=1}^q |\psi^{(a)}|^2$.

В таком бозе-газе возможно образование связанных состояний "дырочного" типа, которые можно интерпретировать как связанные состояния из бесконечного числа частиц /18/. Такая интерпретация кажется естественной в силу следующего обстоятельства. Задача рассеяния для рассматриваемого уравнения задается на алгебре некомпактной группы $SU(1, q)$. Как известно, все неприводимые унитарные представления некомпактных групп бесконечномерны. В духе идей "унитарной симметрии" элементарных частиц рассмотрение таких представлений приводит к бесконечным мультиплетам частиц. Их реализация как связанных состояний фундаментальных частиц возможна лишь при рассмотрении связанных состояний из бесконечного числа частиц. Поэтому при изучении бозе-газа с некомпактной группой симметрии для получения устойчивых конфигураций необходимо перейти к термодинамическому пределу $\rho = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} \frac{N}{L}$. На

классическом уровне такая постановка соответствует выбору нетривиальных граничных условий на потенциалы в бесконечности.

Изучение $p \times p$ спектральной задачи с нетривиальными граничными условиями в общем виде в настоящее время не представляется возможным. Поэтому мы рассмотрим несколько простых случаев, в которых удастся продвинуться далеко в той или иной степени. В первой части работы мы рассмотрим $U(2)$ и $U(1,1)$ НУШ /линейная реализация/ /18/. Коротко прокомментируем обобщение на случай $U(n)$ НУШ. Во второй части работы мы рассмотрим изотропное уравнение Ландау-Лифшица с $SU(2)/U(1)$ и $SU(1,1)/U(1)$ /нелинейная реализация/ многообразиями /14/.

1. $U(2)$ и $U(1,1)$ НУШ

Изотропное уравнение Ландау-Лифшица на группе $G = SU(2, 1)$

$U(0, 2)$ НУШ - бозе-газ с отталкиванием с цветовыми степенями свободы / $n=2$ /

$U(1, 1)$ НУШ - бозе-газ с притяжением и отталкиванием

Линейная задача $\Phi_x = U\Phi$ имеет вид

$$U = -i\lambda \Sigma + Q,$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0, \quad \gamma_0 = \text{diag}(1, \pm 1),$$

где $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & i\bar{\psi}(x) \\ -i\psi(x) & 0 \end{pmatrix}$, /знак+соотв. $U(2)$, $-U(1,1)$ /.

Линейная задача эрмитова
→ спектр вещественный

Линейная задача не эрмитова
→ спектр комплексный

Решения Иоста определяются асимптотиками на $\pm\infty$:

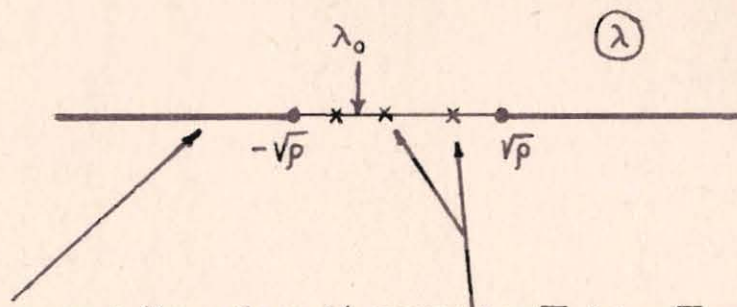
$$\begin{aligned} \Phi_{\pm 1}(x, \lambda) &\rightarrow e^{-i\zeta x} \chi_{\pm 1}(\lambda, \zeta), & \zeta(\lambda) &= \sqrt{\lambda^2 - \rho}, \psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \psi_{\pm} \\ \Phi_{\pm 2}(x, \lambda) &\rightarrow e^{i\zeta x} \chi_{\pm 2}(\lambda, \zeta), & (\bar{\psi}_+ \psi_+) &= (\bar{\psi}_- \psi_-) = \rho. \\ \Phi_{\pm 3}(x, \lambda) &\rightarrow e^{i\lambda x} \chi_{\pm 3}(\lambda, \zeta), \end{aligned}$$

Матрица рассеяния определяется как $\Phi_-(x, \lambda) = \Phi_+(x, \lambda) S(\lambda)$ и удовлетворяет условиям псевдоунитарности и унитарности $S(\lambda)S(\lambda) = I$, $\det S(\lambda) = 1$; где $\bar{S} = \Sigma S^+ \Sigma$.

Решения Иоста аналитически продолжимы:

$$\begin{aligned} \Phi_{+2}(x, \lambda, \zeta), \Phi_{-1}(x, \lambda, \zeta) - \text{Im} \zeta > 0 & \text{ - на верхний лист римановой по-} \\ & \text{верхности,} \\ \Phi_{+1}(x, \lambda, \zeta), \Phi_{-2}(x, \lambda, \zeta) - \text{Im} \zeta < 0 & \text{ - на нижний лист римановой по-} \\ & \text{верхности,} \\ \Phi_{\pm 3}(x, \lambda, \zeta) - \text{Im} \zeta = 0 & \text{ - определены лишь на действи-} \\ & \text{тельной оси } \lambda \text{ и не продолжимы.} \end{aligned}$$

Вещественный спектр



непрерывный /боголюбовский/ спектр: $\lambda > \sqrt{\rho}$, $\lambda < -\sqrt{\rho}$; $-\infty < \lambda_0 < +\infty$
дискретный спектр /либовского типа/: $S_{11}(\lambda_n, \zeta_n) = 0$, $S_{31}(\lambda_n, \zeta_n) = 0$,
 $\Phi_{-1}(x, \lambda_n) = C_n \Phi_{+2}(x, \lambda_n)$, $C_n \equiv S_{21}(\lambda_n, \zeta_n)$, $-\sqrt{\rho} \leq \lambda_n \leq \sqrt{\rho}$.
В случае $U(1,1)$ НУШ возможны состояния с комплексным λ . При этом нет ограничений на число, расположение и кратность нулей.

Используя скобки Пуассона для элементов матрицы рассеяния, находим временную эволюцию ее элементов $iS_t(\lambda, t) = [\Gamma(\lambda), S(\lambda, t)]$, $\Gamma(\lambda) = \text{diag}((\lambda + \zeta)^2, (\lambda - \zeta)^2, 0)$.

Обратная задача

Односолитонное решение

$$\psi(x, t) = \frac{\psi_+}{\lambda - i\nu} (\lambda - i\nu \text{th} \nu z), \quad z = x - 2\lambda t, \text{ - "цветной" пузырь} \quad (*)$$

Учет влияния непрерывного спектра

- Для малых $|r_{31}(\lambda)| = \left| \frac{S_{31}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} \right| \ll 1$ - теория возмущений непрерывным спектром \longrightarrow солитон (*) устойчив, т.к. малая поправка к чисто солитонному решению при $|t| \rightarrow \infty$ имеет оценку $|\delta K(x, t)| \leq \alpha/t$, то есть слабовозмущенное односолитонное решение асимптотически стремится к чисто солитонному как $1/t$. Отметим, что в отличие от случая $U(n)$ с притяжением $1/\sqrt{t}$ здесь заметное влияние на устойчивость солитона оказывает присутствие "среды" постоянной плотности ρ , которая катализирует процесс освобождения возмущенного солитона от непрерывного фона.
- Для не малых $r_{31}(\lambda)$ рассмотрим "квазисвязанные" состояния

$$\begin{aligned} \Phi_{-1}(x, \lambda_n) &= C_{2n} \Phi_{+2}(x, \lambda_n) + C_{3n} \Phi_{+3}(x, \lambda_n); & C_{2n} &= S_{21}(\lambda_n, \zeta_n), \\ & & C_{3n} &= S_{31}(\lambda_n, \zeta_n). \end{aligned}$$

При вещественной редукции в результате "взаимодействия" второй ветви непрерывного спектра с солитонном возникает новый вид солитона - "капля в пузыре". В рамках МОЗР для его получения при выводе уравнений Марченко необходимо учесть наличие дополнительной непрерывной ветви.

Это приводит к "перенормировке" кинкового решения на постоянный фактор и к образованию /на основе плосковолнового "хвоста" $e^{i\lambda x}$ / нового солитона типа "капля" /19/. В результате образуется вполне устойчивая биподобная конфигурация типа - "капля в пузыре"

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \left[\frac{\psi_+}{\lambda - i\nu} (\lambda - i\nu \text{th} \nu z) + \frac{i\nu}{\lambda - i\nu} \sigma_1 \psi_+^* e^{i\theta} \text{sech} \nu z \right],$$

$$\text{где } \theta = \lambda x - (\lambda^2 - \nu^2)t - i\phi, \quad e^{i\phi} = \frac{\mu_2(0)}{\nu} \sqrt{\frac{\nu}{\mu_1(0)}} = \sqrt{\frac{2}{\beta} - 1},$$

β - параметр, характеризующий "включение" взаимодействия кинка с непрерывным фоном. При критическом значении параметра $\beta_c = 2$ это взаимодействие "выключается".

Взаимодействие солитонов

Двухсолитонное решение "цветных" кинков имеет вид

$$\psi^{\text{II}}(x, t) = \frac{\frac{2}{\nu_1 + \nu_2} [\lambda_1 + \lambda_2 + i(\nu_1 + \nu_2)] - (\lambda_1 + i\nu_1) \left(\frac{1}{\nu_2} + \frac{e^{2\nu_2 x}}{\mu_{12}} \right) - (\lambda_2 + i\nu_2) \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{e^{2\nu_1 x}}{\mu_{11}} \right)}{\rho \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{e^{2\nu_1 x}}{\mu_{11}} \right) \left(\frac{1}{\nu_2} + \frac{e^{2\nu_2 x}}{\mu_{12}} \right) - \frac{2}{(\nu_1 + \nu_2)} (\rho - \lambda_1 \lambda_2 - \nu_1 \nu_2)}$$

При $t \rightarrow \pm \infty$ оно распадается на отдельные кинки

$$\psi^{\text{II}}(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \psi^{\text{I}}(x - 2\lambda_1 t, x_1^+, \psi_+, a_1^+) + \psi^{\text{I}}(x - 2\lambda_2 t, x_2^+, \psi_+, a_2^+),$$

$$\psi^{\text{II}}(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \psi^{\text{I}}(x - 2\lambda_1 t, x_1^-, \psi_+, a_1^-) + \psi^{\text{I}}(x - 2\lambda_2 t, x_2^-, \psi_+, a_2^-).$$

В результате упругого рассеяния происходят:

А. Сдвиг центров масс

$$\delta x_1 = x_1^+ - x_1^- = \frac{1}{2\nu_1} \ln \frac{(\nu_1 + \nu_2)^2 (\lambda_1^2 + \nu_1^2)}{(\nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1)^2},$$

$$\delta x_2 = x_2^+ - x_2^- = -\frac{1}{2\nu_2} \ln \frac{(\nu_1 + \nu_2)^2 (\lambda_2^2 + \nu_2^2)}{(\nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1)^2}.$$

Из условия $\rho = +(\lambda_1^2 + \nu_1^2) = +(\lambda_2^2 + \nu_2^2)$ следует закон сохранения центра масс солитонов $\nu_1 \delta x_1 + \nu_2 \delta x_2 = 0$.

Б. Изменение "поляризации"

В случае $U(2,0)$ НУШ с притяжением "цвет" обусловлен коэффициентами C_{21}, C_{31} . В случае "цветовых" кинков $U(0,2)$ НУШ причиной является конденсат с $\psi_{\pm} \neq 0$. Изменение поляризации сводится к $U(1)$ повороту $\psi_+ \rightarrow \psi'_+ = \psi_+ e^{ia_2}, \psi_+ \rightarrow \psi'_+ = \psi_+ e^{ia_1}$ для первого и второго

кинков соответственно. Здесь $e^{ia_n} = \frac{\lambda_n + i\nu_n}{\lambda_n - i\nu_n}$, $(n=1,2)$ - соответствующие однокинковые фазы конденсата.

В. Изменение фаз

$$\delta a_1 = a_1^+ - a_1^- = a_1 - (-a_2 - i \ln(1 + \frac{2i}{\rho} \frac{\Delta_2}{\Delta_1})),$$

$$\delta a_1 = \delta a_2,$$

$$\delta a_2 = a_2^+ - a_2^- = a_2 - (-a_1 - i \ln(1 + \frac{2i}{\rho} \frac{\Delta_2}{\Delta_1})),$$

$$\text{где } \Delta_1 = + \frac{(\nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1)^2}{\rho(\nu_1 + \nu_2)^2}, \Delta_2 = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2 + \nu_1} [\nu_1 (\lambda_1 + i\nu_1) - \nu_2 (\lambda_2 + i\nu_2)].$$

При рассмотрении столкновения бионоподобных солитонов, в дополнение к А, В, С, получим "перенормировки" амплитуд "капель"

$$\delta \varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^- = \ln \frac{\Delta_2}{(\lambda_1 + i\nu_1)(\nu_1 - \nu_2) \sqrt{|\Delta_1|}}, \delta \varphi_2 = \varphi_2^+ - \varphi_2^- = \ln \frac{\Delta_2}{(\lambda_2 + i\nu_2)(\nu_1 - \nu_2) \sqrt{|\Delta_1|}}.$$

Обобщение результатов на случай $U(n)$ НУШ не вызывает затруднений [18].

Некоторые приложения

1/Перенос заряда в квазиодномерных органических солях

$$\phi_+ = \psi_1 + \psi_2^*, \quad \phi_- = \psi_1 - \psi_2^*,$$

$$n(x, t) = |\phi_+|^2 + |\phi_-|^2 = \frac{n_+}{\lambda^2 + \nu^2} (\lambda^2 + \nu^2 \text{th}^2 \nu z) \quad \text{- среднее число частиц / плотность /}$$

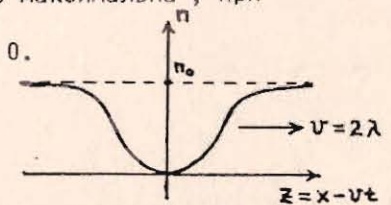
$$m(x, t) = |\phi_+|^2 - |\phi_-|^2 = \frac{m_+}{\lambda^2 + \nu^2} (\lambda^2 + \nu^2 \text{th}^2 \nu z) \quad \text{- намагниченность / плотность /}$$

Это локализованная волна зарядовой плотности, где

$$n_+ = \frac{\kappa}{2} (|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{+2}|^2), \quad m_+ = \frac{\kappa}{2} |\psi_{+1}| |\psi_{+2}| \cos \Omega, \quad \Omega = \arg \psi_{+1} - \arg \psi_{+2}.$$

При $\arg \psi_{+1} = \arg \psi_{+2}$ намагниченность максимальна, при

$$\arg \psi_{+1} - \arg \psi_{+2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{намагниченность } 0.$$



2/ Структурный фазовый переход по константе связи в бозе-газе: три фазы -

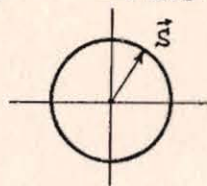
1. "двойная капля" $U(1,0) \otimes U(1,0)$ ($\text{sech} \otimes \text{sech}$);
2. "двойной пузырь" $U(0,1) \otimes U(0,1)$ ($\text{th} \otimes \text{th}$);
3. "капля в пузыре" $U(0,1) \otimes U(1,0)$ - гетерофазное состояние.

2. $SU(1,1)$ УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА

$SU(2)$ УЛЛ

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z) \rightarrow S = \begin{pmatrix} S_z & S^- \\ S^+ & -S_z \end{pmatrix} \in SU(2); \quad \vec{S} \rightarrow S = \begin{pmatrix} S_z & iS^- \\ iS^+ & -S_z \end{pmatrix} \in su(1,1)$$

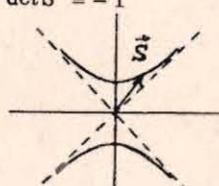
$$\vec{S}^2 = 1 \rightarrow \det S = -1$$



$SU(1,1)$ УЛЛ

$$\vec{S} \rightarrow S = \begin{pmatrix} S_z & iS^- \\ iS^+ & -S_z \end{pmatrix} \in su(1,1)$$

$$\vec{S}^2 = 2S_z^2 - 1 \rightarrow \det S = -1$$



$$2iS_t = [S, S_{xx}] + \frac{\Delta}{2} [S, \sigma_3] [\sigma_3, S] \longleftrightarrow 2iS_{0t} = [S_0, S_{0xx}]$$

одноосная анизотропия калибровочная эквивалентность изотропное

Алгебра симметрии S и S_0 в общем случае различна ^{/17/}. Калибровочно-эквивалентное $SL(2, C)$ НУШ

$$iq_t + q_{xx} + 2(rq)q = 0, \quad -ir_t + r_{xx} + 2(rq)r = 0$$

заменой $q = \psi_1 + \psi_2$, $r = \psi_1^* - \psi_2^*$ приводится к системе

$$i\psi_{1t} + \psi_{1xx} + 2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)\psi_1 + 2(\psi_1^*\psi_2 - \psi_1\psi_2^*)\psi_2 = 0,$$

$$i\psi_{2t} + \psi_{2xx} + 2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)\psi_2 + 2(\psi_1^*\psi_2 - \psi_1\psi_2^*)\psi_1 = 0.$$

Ее эрмитова редукция есть $U(1,1)$ НУШ /интерпретация в терминах бозе-газа/ ^{/21/}.

Изотропное $SU(1,1)$ уравнение Ландау-Лифшица имеет вид

$$S_t = \frac{1}{2i} [S, S_{xx}].$$

Если использовать:

1/ малоамплитудное приближение для гладкой огибающей, получим $U(0,1)$ НУШ: $i\psi_t + \psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi = 0$.

2/ калибровочную эквивалентность $U(0,1)$ НУШ и $SU(1,1)$ ИУЛЛ $S(x, t; \lambda_0) = g^{-1} \sigma_3 g$, где $g \equiv \Phi(x, t; \lambda = \lambda_0)$ - решение Иоста $U(0,1)$ НУШ, то в угловых переменных $\vec{S} = (\text{sh}\theta \cos\phi, \text{sh}\theta \sin\phi, \text{ch}\theta)$ получим связь между решениями $U(0,1)$ НУШ и $SU(1,1)$ ИУЛЛ

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} (\theta_x + i \text{sh}\theta \phi_x) e^{ia(x, t)}, \quad a_x = \text{ch}\theta \phi_x, \quad a_t = \text{ch}\theta \phi_t - 2(|\psi|^2 - \rho).$$

Граничные условия для спиновой матрицы недиагональны;

$$S_{\pm} = \frac{1}{\zeta_0} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \psi_{\pm} e^{2i\zeta_0(x+2\lambda_0 t)} \\ -\psi_{\pm}^* e^{-2i\zeta_0(x+2\lambda_0 t)} & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_0 = \sqrt{\lambda_0^2 - \rho}, \quad (**)$$

что приводит к отличию МОЗР от случая $SU(2)$ ИУЛЛ ^{/14/}.

Спектр:

1/ Спиновые волны описываются решением (**), с $\omega = 4\lambda_0 \zeta_0$, $k = 2\zeta_0$. Спектр спиновых волн $\omega(k) = \pm k \sqrt{k^2 + 4\rho}$ совпадает с бозе-любовским спектром ^{/14/}. При $k \rightarrow 0$ $\omega(k) \approx \pm 2\sqrt{\rho} k$; при $k \gg \sqrt{\rho}$ $\omega(k) \approx \pm k^2$. При $k \rightarrow 0$ $S_z \rightarrow \infty$, что соответствует тому, что в бозе-

газе среднее число частиц в конденсате $\langle a_k^{\dagger} a_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\rho}}{k} \rightarrow \infty$. Скорость

спиновой волны $|v| \geq |v_{зв}|$, где скорость звука $v_{зв} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=0} = \pm 2\sqrt{\rho}$.

В отличие от спиновой волны с конечной амплитудой в $SU(2)$ ИУЛЛ

$$S^+(x, t) = \sqrt{1 - (S^z)^2} \exp[i(kx - \omega t + \phi)]; \quad \omega = S^z k^2,$$

являющейся неустойчивой, в нашем случае она устойчива ^{/14/}.

2/ Солитоны. Используя решения Иоста $U(0,1)$ НУШ, получаем односолитонное решение

$$\begin{cases} S_z = \frac{\lambda_0}{\zeta_0} - \frac{\nu^2}{2\zeta_0(\lambda_0 - \lambda)} \text{sech}^2 \nu z, & (z = x - 2(\lambda - 2\lambda_0)t), \\ S^+ = i \frac{\psi_{\pm}^*}{\rho \zeta_0} e^{-2i\zeta_0(x+2\lambda_0 t)} \left[\rho - \frac{i\nu \zeta_0(\rho + \lambda\lambda_0 + i\nu\zeta_0)}{(\nu + i\zeta_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{i\nu \zeta_0(\rho + \lambda\lambda_0 + i\nu\zeta_0)}{(\nu + i\zeta_0)^2} \text{th} \nu z - \frac{\nu^2(\rho + \lambda\lambda_0 + i\nu\zeta_0)}{2(\nu + i\zeta_0)} \text{sech}^2 \nu z \right], & (\nu = \sqrt{\rho - \lambda^2}). \end{cases}$$

Энергия, импульс и намагниченность имеют вид

$$E_s = 4\nu = 4\sqrt{\rho - \lambda^2}, \quad \Pi_s = 4 \arcsin \frac{\nu}{\sqrt{2(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 + \zeta_0)}}, \quad M_s^z = -\frac{\nu}{\zeta_0(\lambda_0 - \lambda)}.$$

Используя канонический импульс $P_s = \int \frac{dv}{v} \left(\frac{dE_s}{dv} \right) + \text{const} = \text{const} - 2 \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}$, получим закон дисперсии для солитона в виде /14/

$E_s = E_s(P_s) = \sqrt{\rho} \sin \frac{P_s}{2}$. Этот спектр похож на спектр дырочной ветви в антиферромагнетике.

Обобщение изотропного уравнения Ландау-Лифшица на случай произвольной группы G с $S \in G/H$, где H - глобальная изогруппа нелинейного уравнения Шредингера, расширяет число редукций в случае некомпактных G и приводит к естественной интерпретации теории в терминах притягивающегося и отталкивающего бозе-газов /17/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, т. 11, №1, с. 77.
2. Янсон И.К. Материалы V Зимней школы по физике полупроводников, Л., 1973, с. 99.
3. Питаевский Л.П. ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 646.
4. Питаевский Л.П. Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 39, вып. 9, с. 423.
5. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", К., 1983.
6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 118.
7. Хасэгава А., Кодама Ю. ТИИЭР, 1981, т. 69, №9, с. 57.
8. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1627.
9. Lieb E. Phys. Rev., 1963, 130, p. 1616.
10. Кулиш П.П., Манаков С.В., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1976, т. 28, с. 38.
11. Makhankov V.G., Pashaev O.K., Sergeenkov S.A. Phys. Lett., 1983, vol. 98A, No 5, 6, p. 227.
12. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. Phys. Lett., 1981, vol. 81A, No 2,3, p. 161.
13. Solomon A.I.J. Math. Phys., 1971, 12, No 3, p. 390.
14. Пашаев О.К., Сергеев С.А. ОИЯИ, P2-83-377, Дубна, 1983.
15. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. ТМФ, 1982, т. 53, №1, с. 55.
16. Makhankov V.G., Pashaev O.K., Kundu A. Physica Scripta, 1983, vol. 28, No 2, p. 229.
17. Makhankov V.G., Pashaev O.K. Phys. Lett., 1983, 95A, p. 95.
18. Makhankov V.G., Pashaev O.K., Sergeenkov S.A. Physica Scripta, 1984, vol. 29, No 6, p. 521.
19. Fedyanin V.K. et al. JINR, E17-83-755, Dubna, 1983. Сергеев С.А. ОИЯИ, P17-83-678, Дубна, 1983.
20. Kundu A., Pashaev O.K. J. Phys. C: Solid State Phys., 1983, vol. 18, p. L585.
21. Пашаев О.К. ОИЯИ, 2-83-230, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1984 года.

Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Сергеев С.А. P2-84-513
Нелинейные интегрируемые модели с некомпактной группой
в теории слабоидеального бозе-газа

Рассматриваются специфические свойства интегрируемых систем с некомпактной группой внутренней симметрии, связанные с наличием конденсата /бесконечного числа бозонов/ в системе. Некомпактность группы позволяет в единой схеме рассматривать, например, многоподрешеточные магнитные системы с различным характером взаимодействия в подрешетках. С помощью метода обратной задачи исследуются вопросы устойчивости и взаимодействия солитонов различных типов в таких системах. Обсуждается связь уравнений Шредингера и Ландау-Лифшица и их решений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники
и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Makhankov V.G., Pashaev O.K., Sergeenkov S.A. P2-84-513
Nonlinear Integrable Models with Noncompact Groups in the
Theory of Weakly Nonideal Bose-Gas

Specific properties of integrable systems with noncompact internal symmetry groups related to the condensate (infinite number of bosons) present in a system are considered. The fact of group non-compactness allows one to treat, in the frame of one scheme, for example, many-layered magnetic systems with different types of interactions in sublattices. The soliton stability problem and soliton interactions of various types are studied in such systems via the spectral transform (inverse method). Relation between the NLS and Landau-Lifshitz equations and their solutions is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory
of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984