



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-84-502

А.В.Сидоров, Н.Б.Скачков

МЕТОД РАСЧЕТА СПЕКТРОВ МАСС КВАРКОНИЯ
НА ОСНОВЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1984

ВВЕДЕНИЕ

Квазипотенциальный подход^{/1/} широко применяется для релятивистского описания связанной системы двух частиц, например, кварка и антикварка. При этом используется релятивистское обобщение уравнения Шредингера - квазипотенциальные уравнения^{/1, 2/}, собственные значения которых определяют энергию связанной системы, а собственные функции - релятивистскую волновую функцию относительного движения частиц.

В настоящей работе будет развит метод решения квазипотенциального уравнения непосредственно в импульсном пространстве. В нем волновая функция удовлетворяет в общем случае трехмерному интегро-дифференциальному уравнению. Подобные интегральные уравнения решаются точно аналитически лишь в случае некоторых потенциалов^{/3/}. Для решения релятивистских квазипотенциальных уравнений и рассмотрения более сложных, нежели кулоновский, потенциалов необходимо применение численных методов решения интегро-дифференциальных уравнений. Для этой цели в данной работе используется метод сплайнов^{/4/}.

В первом разделе рассмотрены некоторые из наиболее часто встречающихся типов квазипотенциальных уравнений и потенциалов, возникающих при описании систем $q\bar{q}$, e^+e^- и др. Во втором разделе излагается метод приближения решений интегро-дифференциальных уравнений параболическими сплайнами. Численные результаты сравниваются с известными аналитическими решениями. В третьем разделе в качестве приложения развитого метода рассчитываются спектры масс семейств ψ - и ρ -мезонов.

1. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Волновая функция связанной системы двух частиц удовлетворяет следующему записанному в импульсном пространстве уравнению

$$G^{-1}(p, E_n) \psi_n(\vec{p}) = \int V(\vec{p}, \vec{k}) \psi_n(\vec{k}) d\Omega_{\vec{k}}, \quad h = m = c = 1; \quad /1/$$

здесь $G(p, E_n)$ - свободная функция Грина, а $d\Omega_{\vec{k}}$ - элемент объема в импульсном пространстве. В случае уравнения Шредингера

$$G^{\text{Ш}}(p, E_n) = (p^2/2 - E_n)^{-1}, \quad d\Omega_{\vec{k}} = d^3 k. \quad /2/$$



В релятивистском квазипотенциальном подходе пространство импульсов является пространством Лобачевского /5/:

$$d\Omega_{\vec{k}} = d^3\vec{k} / \sqrt{1+k^2}. \quad /3/$$

При этом функция Грина для уравнения Кадышевского равна /2/

$$G^k(p, E_n) = (E_p - E_n)^{-1}, \quad E_p = \sqrt{1+p^2}, \quad /4/$$

а для уравнения Логунова-Тавхелидзе /1/

$$G^{LT}(p, E_n) = (E_p^2 - E_n^2)^{-1}. \quad /5/$$

Потенциал $V(\vec{p}, \vec{k})$ состоит из двух слагаемых,

$$V(\vec{p}, \vec{k}) = V_{M.p.}(\vec{p}, \vec{k}) + V_{зап.}(\vec{p}, \vec{k}). \quad /6/$$

Первое слагаемое описывает взаимодействие на малых расстояниях. Оно определяется амплитудой однобозонного обмена и в нерелятивистском пределе равно

$$V_{M.p.}(\vec{p}, \vec{k}) = \frac{\alpha}{2\pi^2 (\vec{p}-\vec{k})^2}, \quad /7/$$

а его образом в Γ -пространстве является кулоновский потенциал

$$V_{M.p.}(r) = -\alpha/r. \quad /8/$$

Второе слагаемое в /6/ описывает взаимодействие кварков на больших расстояниях и задается феноменологически. Установлено, что для правильного описания масс Ψ - и Y -частиц потенциал взаимодействия кварка и антикварка должен расти с ростом межкваркового расстояния, т.е. обладать свойством запираия кварков. Обычно используются линейный или осцилляторный запирающий потенциалы. Осцилляторному потенциалу в импульсном пространстве соответствует оператор

$$V_{зап.}(\vec{p}, \vec{k}) = \frac{\omega \Delta_p}{2} \delta(\vec{p}-\vec{k}), \quad /9/$$

где $\Delta_p = \frac{d^2}{dp^2}$ - оператор Лапласа в импульсном пространстве, а коэффициент ω определяет силу потенциала. Перейдем к уравнению для радиальной части волновой функции $\phi_n(p)$ и рассмотрим случай нулевого орбитального квантового числа $\ell=0$: $\psi_n(\vec{p}) = \phi_n(p)/r$. Для уравнения Шредингера получаем

$$\left[G^{III}(p, E_n)^{-1} - \frac{\omega d^2/dp^2}{2} \right] \phi_n(p) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| \frac{p+k}{p-k} \right| \phi_n(k) dk, \quad /10/$$

$$\phi_n(0) = 0, \quad \phi_n(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

В качестве потенциала взаимодействия на малых расстояниях мы будем использовать модельный потенциал, являющийся релятивистским обобщением выражения /7/ /6/:

$$V_{рел.}(\vec{p}, \vec{k}) = \alpha/2\pi |\vec{p}(-)\vec{k}|^2, \quad /11/$$

где $p(-)k$ есть разность в пространстве Лобачевского /5/:

$$\vec{p}(-)\vec{k} = \vec{p} - \vec{k} \left[p_0 - \frac{\vec{p}\vec{k}}{1+k_0} \right], \quad p_0 = \sqrt{1+p^2}, \quad k_0 = \sqrt{1+k^2}.$$

Переходя к уравнению для радиальной части в релятивистском случае, учтем наличие корня в элементе объема /3/: $\psi_n(\vec{p}) = \phi_n(p)/p\sqrt{1+p^2}$. При этом для радиальной части получим уравнение, отличающееся от нерелятивистского /10/ лишь заменой $(G^{III})^{-1}$ на $E_p(G^K)^{-1}$ в случае уравнения Кадышевского и $(G^{III})^{-1}$ на $E_p(G^{LT})^{-1}$ в случае уравнения Логунова-Тавхелидзе. Отметим, что в нерелятивистском пределе квазипотенциальные уравнения переходят в уравнение Шредингера, а потенциал /11/ - в кулоновский.

2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

В методе сплайнов решение интегрального уравнения аппроксимируется гладкосклеенной кусочной функцией, а собственные значения определяются как нули детерминанта системы линейных однородных уравнений. Этот метод с успехом применялся для решения уравнений квазипотенциального типа в конфигурационном представлении /4/.

Будем искать приближенное решение уравнения

$$\left[G(p, E_n)^{-1} - \frac{\omega d^2/dp^2}{2} \right] \phi_n(p) = \int_0^\infty V(p, k) \phi_n(k) dk \quad /12/$$

в классе C^2 -функций, непрерывных вместе со своей первой производной. Здесь $G(p, E_n)$ определяется выражениями /4, 5/.

На положительной полуоси $p \geq 0$ зададим сетку $\{p_N\}$, такую, что $0 < p_1 < p_2 \dots < p_{N-1} < p_N$. На каждом из отрезков $[p_i, p_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N-1$, приближаем неизвестную функцию $\phi_n(p)$ параболой

$$S_i(p) = a_i p^2 + b_i p + c_i. \quad /13/$$

В области малых и в области больших p приближаем $\phi_n(p)$ ее асимптотиками

$$S_0(p) = a_0 p, \quad p \in [0, p_1], \quad /14/$$

$$S_N(p) = b_N/p^\sigma, \quad p \in [p_N, \infty]. \quad /15/$$

Асимптотики /14,15/ могут иметь поведение и более сложное, чем степенное. Потребуем в точках p_i непрерывности $\phi_n(p)$ и ее первой производной:

$$a_0 p_1 = a_1 p_1^2 + b_1 p_1 + c_1, \quad a_0 = 2a_1 p_1 + b_1,$$

$$a_i p_i^2 + b_i p_i + c_i = a_{i+1} p_i^2 + b_{i+1} p_i + c_{i+1},$$

$$2a_i p_i + b_i = 2a_{i+1} p_i + b_{i+1}, \quad i = 2, \dots, N-1,$$

$$a_{N-1} p_N^2 + b_{N-1} p_N + c_{N-1} = b_N p_N^{-\sigma}, \quad /16/$$

$$2a_{N-1} p_N + b_{N-1} = -\sigma b_N p_N^{-\sigma-1}.$$

Сплайн представляет собой гладкосклеенную кусочную функцию, состоящую из парабол $S_i(p)$ и асимптотик $S_0(p)$ и $S_N(p)$. В дополнение к условиям гладкости /16/ потребуем в точках $\bar{p}_k = (p_k + p_{k+1})/2, k = 1, \dots, N-1$ выполнения уравнения /12/:

$$-\omega a_k + G(\bar{p}_k, E_n)(a_k \bar{p}_k^2 + b_k \bar{p}_k + c_k) = \sum_{i=1}^{N-1} (A_{ki} a_i + B_{ki} b_i + C_{ki} c_i) + A_{k0} a_0 + B_{kN} b_N. \quad /17/$$

Здесь обозначено

$$A_{ki} = \int_{k_i}^{k_{i+1}} V(\bar{p}_k, k) k^2 dk, \quad B_{ki} = \int_{k_i}^{k_{i+1}} V(\bar{p}_k, k) k dk, \\ C_{ki} = \int_{k_i}^{k_{i+1}} V(\bar{p}_k, k) dk, \quad /18/ \\ A_{k0} = \int_0^{k_1} V(\bar{p}_k, k) k dk, \quad B_{kN} = \int_{k_N}^{\infty} V(\bar{p}_k, k) \frac{dk}{k^\sigma}.$$

и предполагается, что интегралы существуют.

Объединяя /16/ и /17/, получаем систему, состоящую из $3N-1$ однородных линейных уравнений относительно $3N-1$ неизвестных коэффициентов, определяющих функции $S_i(p), i=0, \dots, N$. Собственные значения E_n определяются из условия обращения в нуль детерминанта полученной системы уравнений

$$\det A(E_n) = 0, \quad /19/$$

а соответствующие собственные векторы задают сплайны, приближающие собственные функции $\phi_n(p)$.

При расчетах мы используем равномерную сетку $\{p_i\}$ с шагом $H = p_{i+1} - p_i$. Точность изложенного метода оценим на примере уравнений, имеющих точное решение.

А. Рассмотрим уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом $-1/r$ при $\ell = 0$:

$$(p^2/2 - E_n) \phi_n^{III}(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| \frac{p+k}{p-k} \right| \phi_n^{III}(k) dk. \quad /20/$$

Для него известны собственные значения $E = -1/2n^2, n=1, 2, \dots$ и собственные функции в импульсном представлении. При $p \rightarrow \infty$ волновые функции спадают как p^{-3} . Расчеты, проведенные в случае $N=19, H=0,3$, дают для основного уравнения $E_1^{числ.} = -0,4996$, а при $H=0,5$ $E_1^{числ.} = -0,50008$. Значения $E_1^{числ.}$ отличаются от точного значения $-0,5$ в четвертом знаке. Максимальное отличие вычисленной волновой функции основного состояния от известного решения $\phi_1(p) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{2p}{(1+p^2)^2}$ менее 2%.

Б. Перейдем к уравнению Шредингера с комбинированным потенциалом

$$V(p-k) = \frac{1}{2\pi^2(p-k)^2} + \frac{\omega \Delta p}{2} \delta(p-k), \quad /21/$$

которому в Γ -представлении отвечает функция

$$V(r) = -1/r + \frac{\omega \Gamma^2}{2}. \quad /22/$$

В случае $\omega \ll 1$ собственные значения могут быть вычислены по теории возмущений в Γ -пространстве. В таблице 1 сравниваются значения основного уровня энергии, вычисленные по теории возмущений, с результатами численных расчетов при $N=19, H=0,5$.

Таблица 1

ω	E_1	
	Т.В.	Метод сплайнов
0,001	- 0,4985	- 0,49862
0,005	- 0,4925	- 0,49249

Видно, что точность численных расчетов составляет три знака после запятой.

В. Рассмотрим квазипотенциальное уравнение Логанова-Тавхелидзе /5/ при $\omega = 0$.

Для потенциала, предложенного в /7/:

$$K(p, k) = \frac{E_p}{E_k} \frac{a}{(p-k)^2}, \quad /23/$$

и являющегося релятивистским геометрическим обобщением кулоновского потенциала, при $l = 0$ имеем /7/

$$(p^2 + 1 - E_n^2) \phi_n(p) = \frac{a}{\pi E} \int_0^\infty \ln \left| \frac{p+k}{p-k} \right| \phi_n(k) dk. \quad /24/$$

Известны точные решения этого уравнения, которое сводится к /20/,

$$E_n = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} \right). \quad /25/$$

Для $n=2$ точные и численные значения равны соответственно: 0,9659 и 0,9661, а для $n=3$: 0,9856 и 0,9854.

Точность численных расчетов составляет три значащие цифры.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАСС КВАРКОНИЯ НА ОСНОВЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Применим описанный метод для расчета спектров масс связанных состояний кварка и антикварка.

В нерелятивистском подходе массы мезонов равны $M_\psi = E_n + 2m_c + V_0$; $M_{\eta_c} = E_n + 2m_c - 3V_0$, где E_n - собственное значение энергии уравнения Шредингера, а V_0 определяется известной разностью масс ψ - и η_c -мезонов: $V_0 = (M_\psi - M_{\eta_c})/4$. Параметры m_c , a и ω

фиксируются из сравнения с известными массами ψ , ψ' и ψ'' -мезонов. Для величины $M_{\psi''}$ рассматривается два варианта: а/ $M_{\psi''} = 4,03$ ГэВ /8/ и б/ $M_{\psi''} = 4,13$ ГэВ /8/. Значения параметров, а также вычисленные на их основе значения $M_{\psi''}$ представлены в таблице 2.

В релятивистском подходе массы мезонов равны: $M_\psi = 2E_n + V_0$, $M_{\eta_c} = 2E_n - 3V_0$. Результаты расчетов на основе уравнения с функцией Грина /4/, представленные в таблице 2, дают для $M_{\psi''}$ значения, отличающиеся от экспериментального $M_{\psi''}^{\text{эксп}} = 4,415 \pm 0,006$ ГэВ, для обоих вариантов массы второго возбужденного

	Ур. Шредингера		Ур. Кадышевского	
	а)	б)	а)	б)
a_ψ	1,10	0,891	0,611	0,414
m_c [ГэВ]	1,79	1,66	1,78	1,59
ω_ψ [ГэВ]	0,141	0,270	0,0104	0,0229
$M_{\psi''}$ [ГэВ]	4,37	4,61	4,31	4,54

состояния $M_{\psi''}$. Для правильного описания спектра масс необходим последовательный учет релятивистских спиновых эффектов. Из таблицы следует, что значение константы ω , входящей в запирающую часть потенциала, существенно зависит от выбора величины $M_{\psi''}$, а для массы кварка m и константы a_ψ эта зависимость не столь значительна.

Имеющиеся экспериментальные данные по семейству ρ -мезона /8/: $M_\rho = 0,769$ ГэВ, $M_{\rho'}$ = 1,250 ГэВ, $M_{\rho''}$ = 1,600 ГэВ - могут быть описаны в релятивистском подходе, если использовать потенциал запираения, зависящий от энергии кварков, $V_{\text{зап.}}(p, k) = \omega E_n \Delta_l / 2$. Без учета наличия спина - $M_\rho = 2E_n$. Из сравнения с массами ρ , ρ' и ρ'' получаем значения параметров $a = 1,03$; $m_q = 0,584$ ГэВ; $\omega = 0,00409$ ГэВ². Используя их, находим массу третьего радиационного возбуждения ρ -мезона: $M_{\rho'''} = 1,930$ ГэВ. Значительное увеличение a_ρ по сравнению с a_ψ в случае квазипотенциального уравнения находится в качественном согласии с гипотезой об асимптотической свободе и указывает на рост вклада спиновых эффектов при описании мезонов, состоящих из легких кварков.

В заключение отметим, что релятивистские волновые функции ψ -и ρ -мезонов, полученные в виде сплайнов в импульсном пространстве, выгодно отличаются от квазиклассических волновых функций в релятивистском конфигурационном пространстве тем, что могут быть использованы для вычисления как диагональных, так и недиагональных матричных элементов, возникающих при описании различных переходов между уровнями кваркония.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, p.380.
2. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cimento, 1968, 55A, p. 275.
3. Fock V.A. Zs.Phys., 1935, 98, p. 145.
4. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике. "Наука", М., 1976; Александров Л., Караджов Д. ЖВМ и МФ, 1980, 20, с. 923.
5. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cimento, 1968, 55A, p. 233.
6. Kapshay V.N., Skachkov N.B. JINR, E2-81-618, Dubna, 1981.
7. Kapshay V.N., Skachkov N.B. JINR, E2-12919, Dubna, 1979.
8. Review of Particle Properties. Phys.Lett., 1982, 111B.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июля 1984 года.

Сидоров А.В., Скачков Н.Б.

P2-84-502

Метод расчета спектров масс кваркония на основе квазипотенциального уравнения в импульсном пространстве

Развит метод численного решения релятивистских интегральных двухчастичных уравнений квазипотенциального типа, записанных в импульсном пространстве. Для этой цели используется метод параболических сплайнов, позволяющий определить собственные значения энергии и волновые функции с достаточной точностью. В качестве приложения рассчитаны массы и волновые функции кваркония с учетом кулоновского потенциала, доминирующего на малых расстояниях, и осцилляторного запираания - на больших.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Sidorov A.V., Skachkov N.B.

P2-84-502

Method of Calculation of Quarkonium Mass Spectra on the Basis of Quasipotential Equation in Momentum Space

A method is developed for the numerical solution of quasipotential two-particle integral equation in the momentum representation. In so doing we use the method of parabolic splines, which provides binding energies and wave functions with a sufficient accuracy. As an example, wave functions and the mass spectrum of ψ and ρ -families in the case of Coulomb plus oscillator potential are determined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984