объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-471

А.Б.Пестов

К ПРОБЛЕМЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ ВСЕХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено на XIII Международную конференцию по дифференциально-геометрическим методам в теоретической физике, Шумен, НРБ

1984

После того, как Вайнбергу, Саламу и Глэшоу удалось показать возможность единого описания слабых и электромагнитных взаимодействий, проблема объединения всех взаимодействий стала естественной и актуальной. Надежды на решение этой проблемы прежде всего нужно связывать с такими методами, которые несут с собой ограничения, т.к. именно эти ограничения и могут указать путь к единственно верной теории поля, описывающей на общей основе все известные и еще не открытые взаимодействия.

Здесь выдвигается идея использования в качестве одного из таких методов общей теории относительности. Ниже мы хотели бы обсудить некоторые относящиеся к поднятой теме вопросы.

Так как даже простейшие изменения топологической структуры пространства-времени могут привести к радикальным изменениям физической интерпретации происходящих в нем событий, то без веского повода делать это нецелесообразно. Таким образом, предположим, что пространство-время есть точечное множество, топологически эквивалентное 4-мерному евклидову пространству R_4. Группа взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений R_4 на себя, которую мы обозначим через H_4, есть группа симметрии эйнштейновского закона гравитации. Действительно, пусть x^μ – глобальные координаты, параметризующие пространство-время $/-\infty < x^\mu < \infty$ $\mu = 0,1,2,3/$, а преобразование $h \in H_4$ задается гладкими функциями $h^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Функции, задающие отображение h^{-1}, обратное к h, обозначим через $\phi^\mu(x)$. Если $g_{\mu\nu}(x)$ – эйнштейновские гравитационные потенциалы, то, как нетрудно видеть, взаимно однозначные соответствия

$$g_{\mu\nu}(x) \to \overset{h}{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\alpha\beta}(\phi(x)) \frac{\partial \phi^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi^\beta(x)}{\partial x^\nu}$$

задают точную реализацию группы H_4 на множестве симметричных тензорных полей. Далее, прямыми вычислениями можно проверить, что, если $g_{\mu\nu}(x)$ есть решение уравнений $R_{\mu\nu} - 1/2\, g_{\mu\nu} R = 0$, то $\overset{h}{g}_{\mu\nu}(x)$ будет также решением тех же самых уравнений. Таким образом, теоретико-групповое значение римановой геометрии проявляется в существовании нетривиального H_4-инвариантного дифференциально-алгебраического оператора второго порядка. Фундаментальность общей теории относительности ведет к представлению об H_4 как универсальной группе пространственно-временной симметрии. Отсюда следует, что всякое множество математических объектов, которое мы ставим в соответствие некоторой физической величине, должно образовывать базис точной реализации группы H_4. Очевидно, что всякое множество тензорных полей заданной структуры образует базис точной реализации группы H_4. Множество аффинных связностей образует базис нелинейной реализации группы H_4, которая задается взаимно однозначными соответствиями $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(x) \to {}'\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(x)$, причем

$$'\Gamma^{a}_{\mu\nu}(x)\frac{\partial\phi^{\sigma}(x)}{\partial x^{a}} = \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}(\phi(x))\frac{\partial\phi^{\beta}(x)}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial\phi^{\gamma}(x)}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^{2}\phi^{\sigma}(x)}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}.$$

Группа H_4 не имеет линейных реализаций, отличных от тензорных. Отсюда следует, что понятие тензора, а точнее вектора, - более фундаментальное, чем понятие спинора. Что в таком случае представляют собой волновые тензорные поля и волновое уравнение?

Рассмотрим вопрос об H_4-инвариантных линейных дифференциальных операторах первого порядка. Сравнительно недавно математики показали, что внешнее дифференцирование - единственный оператор такого рода. Вопрос о волновой функции решается этим немедленно. Волновую функцию Ψ удобно представить как скалярную функцию координат x^{μ} и грассмановых переменных v^{μ}, преобразующихся по векторному представлению группы H_4, $\Psi = \Psi(x, v)$. Раскладывая в ряд по v^{μ}, получим

$$\Psi(x, v) = \psi(x) + \psi_{a}(x)v^{a} + \frac{1}{2!}\psi_{a\beta}(x)v^{a}v^{\beta} + $$

$$+ \frac{1}{3!}\psi_{a\beta\mu}(x)v^{a}v^{\beta}v^{\mu} + \frac{1}{4!}\psi_{a\beta\mu\nu}(x)v^{a}v^{\beta}v^{\mu}v^{\nu}.$$

Для оператора внешнего дифференцирования имеем представление

$d = v^{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. Этим возможности группы H_4 в рассматриваемом вопросе

исчерпаны. Для записи волнового уравнения необходимо привлечь геометрические объекты общей относительности. Конкретно, предположим, что структура H_4-ковариантного волнового уравнения определяется тройкой d, $g_{\mu\nu}(x)$, $K^{\sigma}_{\mu\nu}(x)$, где $K^{\sigma}_{\mu\nu}(x)$ - тензор кручения Картана. Включение нового геометрического объекта на первых порах можно обосновать хотя бы соображениями общности. Фундаментальное H_4-ковариантное волновое уравнение представляет собой нераспадающуюся систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$D^{\sigma}\psi_{\sigma} = m\psi,\quad D^{\sigma}\psi_{\sigma a} - D_{a}\psi = m\psi_{a},\quad D^{\sigma}\psi_{\sigma a\beta} - D_{a}\psi_{\beta} + D_{\beta}\psi_{a} = m\psi_{a\beta},$$

$$D^{\sigma}\psi_{\sigma a\beta\mu} - D_{a}\psi_{\beta\mu} - D_{\beta}\psi_{\mu a} - D_{\mu}\psi_{a\beta} = m\psi_{a\beta\mu}, \qquad /1/$$

$$D_{\nu}\psi_{a\beta\mu} - D_{a}\psi_{\beta\mu\nu} + D_{\beta}\psi_{\mu\nu a} - D_{\mu}\psi_{\nu a\beta} = m\psi_{a\beta\mu\nu},$$

где $D_{a} = \nabla_{a} - K_{a}$. Через ∇_{a} обозначена операция ковариантного дифференцирования, задаваемая связностью

$$\Gamma^{\mu}_{a\beta} = \left\{ {\mu \atop a\beta} \right\} + K^{\mu}_{a\beta} + g^{\mu\sigma}(K^{\nu}_{\sigma a}g_{\nu\beta} + K^{\nu}_{\sigma\beta}g_{\nu a}),$$

K_{a} - ковектор кручения, $K_{a} = K^{\sigma}_{\sigma a}$ Если положить $K^{\sigma}_{\mu\nu} = 0$, а $g_{\mu\nu}$ - равным тензору Минковского, то мы придем к волновому уравнению релятивистской квантовой механики Дарвина-Уиттекера, которая была сформулирована в ряде работ 1927-28 годов, не получивших развития. Под H_4-ковариантностью понимается следующее. Если перейти от $g_{\mu\nu}(x)$, $K_{\mu\nu}(x)$ к $'g_{\mu\nu}(x)$, $'K_{\mu\nu}(x)$, то уравнение, задаваемое тройкой d, $'g_{\mu\nu}$, $'K^{\sigma}_{\mu\nu}$, будет эквивалентно исходному.

Сейчас мы покажем, что существует связь между группой внутренней симметрии волнового уравнения и геометрическими структурами общей относительности. Рассмотрим отображение $Q_{u}: \Psi \to Q_{u}\Psi$, определяемое векторным полем u^{a},

$$Q_{u}\Psi = (-u^{\sigma}\psi_{\sigma}) + (u^{\sigma}\psi_{\sigma a} + u_{a}\psi)v^{a} +$$

$$+ \frac{1}{2!}(-u^{\sigma}\psi_{\sigma a\beta} - u_{a}\psi_{\beta} + u_{\beta}\psi_{a})v^{a}v^{\beta} +$$

$$+ \frac{1}{3!}(u^{\sigma}\psi_{\sigma a\beta\mu} + u_{a}\psi_{\beta\mu} + u_{\beta}\psi_{\mu a} + u_{\mu}\psi_{a\beta})v^{a}v^{\beta}v^{\mu} +$$

$$+ \frac{1}{4!}(u_{\nu}\psi_{a\beta\mu} - u_{a}\psi_{\beta\mu\nu} + u_{\beta}\psi_{\mu\nu a} - u_{\mu}\psi_{\nu a\beta})v^{a}v^{\beta}v^{\mu}v^{\nu}.$$

Можно показать, что, если Ψ-решение волнового уравнения, то $Q_{u}\Psi$ также будет решением при условии, что u^{a} удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\mu}u^{a} = \partial_{\mu}u^{a} + \Gamma^{a}_{\mu\nu}u^{\nu} = 0. \qquad /2/$$

Таким образом, оператор Q_{u} является генератором группы внутренней симметрии, а уравнение /2/ есть мост между этой симметрией и фундаментальным геометрическим объектом общей относительности - тензором Римана. Действительно, необходимое условие существования решения уравнения /2/ следующее: $\partial_{\mu}\partial_{\nu}u^{a} = \partial_{\nu}\partial_{\mu}u^{a}$. Используя /2/, это условие можно записать в виде $R_{\mu\nu\sigma}{}^{a}u^{\sigma} = 0$, где $R_{\mu\nu\sigma}{}^{a}$ - тензор Римана. Если $R_{\mu\nu\sigma}{}^{a} = 0$, то связность $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ называется интегрируемой, а все явления в целом - абсолютным параллелизмом. В этом случае уравнение /2/ имеет четыре линейно независимых решения u^{a}_{i}. Существует удивительная связь между одним общим свойством абсолютного параллелизма, установленным в 1930 году Эйнштейном в виде некоторых тождеств, и внутренней симметрией волнового уравнения. Инвариантность действия относительно преобразований $\Psi \to \exp(\omega Q_{u})\Psi$, где ω -параметр, приводит к тензору

$$S^{\mu\tau} = \sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \Big(\frac{1}{2} g^{\mu\tau} \psi_{a_1 \ldots a_p} \bar{\psi}^{a_1 \ldots a_p} + \psi^{\mu a_1 \ldots a_p} \bar{\psi}^{\tau}{}_{\cdot a_1 \ldots a_p} + \psi^{\mu\tau a_1 \ldots a_p} \bar{\psi}_{a_1 \ldots a_p} \Big) + \text{k.c.} \qquad /3/$$

Если Ψ-решение волнового уравнения, то $S^{\mu\tau}$ удовлетворяет уравнению

$$(\nabla_\mu - 2K_\mu) S^{\mu\tau} = 0. \qquad /4/$$

С другой стороны, из тождеств Эйнштейна следует существование тензора $E^{\mu\tau}$, который удовлетворяет уравнению /4/ тождественно. Если положить, учитывая четность,

$$A^{\mu\nu\gamma} = c_1 K^{\mu\nu\gamma} + c_2 (g^{\mu\gamma} K^{\nu} - g^{\nu\gamma} K^{\mu}) + c_3 (K^{\mu\gamma\nu} - K^{\nu\gamma\mu}),$$

где $K^{\mu\nu\gamma} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} K^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$, $K^{\nu} = g^{\nu\alpha} K_\alpha$, c_1, c_2, c_3 - константы, тогда $E^{\mu\tau} = (\nabla_\nu - 2K_\nu) A^{\mu\nu\tau} + K^{\mu}{}_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta\tau}$. Следовательно, мы имеем совместную систему уравнений /1/, /3/ и

$$E^{\mu\tau} = \ell S^{\mu\tau}, \qquad /5/$$

где ℓ - константа, аналогичную $G^{\mu\tau} = -\kappa T^{\mu\tau}$.

Таким образом, общая теория относительности указывает на необходимость полностью выявить значение группы H_4 и физическое содержание релятивистской квантовой механики Дарвина-Уиттекера. Надеюсь, мне удалось показать, что это заслуживает внимания.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 августа 1984 года.

Пестов А.Б. P2-84-471

К проблеме объединения всех взаимодействий

Предлагается использовать теоретико-групповые свойства общей теории относительности как метод, могущий указать путь к к решению проблемы объединения всех взаимодействий. Значение симметрии общей теории относительности в том, что она несет с собой жесткие ограничения и, в частности, однозначно задает волновую функцию. Для установления волнового уравнения привлекаются метрика и кручение. Установлена связь группы внутренней симметрии волнового уравнения с кривизной и кручением и общим свойством пространств абсолютного параллелизма.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Pestov A.B. P2-84-471

On the Problem of Unification of all Interactions

Group-theoretical properties of general relativity are proposed to be used as a possible method for solving the problem of unification of all interactions. The symmetry of general relativity provides rigid constraints and uniquely determines the wave function. The wave equation is established with the use of metrics and torsion. The connection is found for the group of internal symmetry of the wave equation with the curvature, torsion, and the general property of teleparallelism.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984