сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-466

Д.Ц.Стоянов, Л.К.Хаджииванов*

О КВАНТОВОМ ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В МОДЕЛИ ТИРРИНГА

* ИЯИЯЕ, НРБ

1984

В последнее время наблюдается повышенный интерес к некоторым аспектам теории бесконечных алгебр Ли и их представлений. В частности, имеется доказательство, что алгебра Вирасоро возникает во всех двумерных, конформно-инвариантных локальных квантовых теориях поля /1/. Проверка этого утверждения в конкретных теориях сталкивается с определенными трудностями. Они связаны с тем, что в квантовой теории не существует аналога теоремы Нетер для построения сохраняющихся величин. Процедура перенормировок иногда не дает даже никакой возможности определить сохраняющиеся квантовые токи в соответствии с классическими /речь идет о различных аномалиях в квантовых теориях/.

Модель Тирринга /2/, ввиду ее точной решаемости /3,4,5/, конформной инвариантности и отсутствия аномалий весьма удобна для проверки различных гипотез относительно квантовой теории взаимодействующих полей. В частности, на примере этой модели можно проверить упомянутый результат работы /1/.

При такой проверке, однако, возникает трудность, связанная с наличием в литературе двух разных выражений для тензора энергии-импульса в модели Тирринга. Одно из них получено в работе /6/ исходя из классического, нетеровского вида этого тензора:

$$\Theta^{cl}_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}\psi) + \frac{g}{2}\eta_{\mu\nu} j_\rho j^\rho . \qquad /1/$$

Здесь $\psi(x)$ - поле Тирринга; γ_μ - двумерные матрицы Дирака, $j_\rho = \bar{\psi}\gamma_\rho\psi$ - ток поля Тирринга, g - константа связи и $\eta_{\mu\nu}$ - метрический тензор в двумерном псевдоевклидовом пространстве ($\eta_{\mu\mu} \to (1, -1)$). Использованием определенного в /7/ "нормального произведения" операторов ψ в /6/ удалось распространить выражение /1/ и на случай квантовой теории. Так как решение Клайбера /4/ строится в гильбертовом пространстве свободного безмассового спинорного поля, то квантовый тензор энергии импульса, соответствующий выражению /1/, также следует рассматривать как оператор в этом же пространстве.

Второе выражение может быть получено на основе формулировки модели Тирринга в терминах сохраняющихся токов /5,8,9/. Оно содержит в себе только сохраняющиеся токи и имеет вид /10,11,12/

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2b}[2:j_\mu j_\nu:(x) - \eta_{\mu\nu}:j_\rho j^\rho:(x)], \qquad /2/$$

где :...: обозначает обычное нормальное произведение /напомним, что токи в модели Тирринга являются свободными векторными полями/.

Два упомянутых выражения для тензора энергии-импульса возникают, следовательно, из двух различных формулировок модели Тирринга. Если данные формулировки эквиваленты, то эти два выражения должны совпадать. Существует, однако, утверждение [13], что это не имеет места.

Здесь на основе бозонизации модели Тирринга [8,9,14–20] мы покажем, что существующие два выражения для тензора энергии-импульса совпадают. Тогда очевидно, что справедливо и упомянутое в начале утверждение работы [1], поскольку из выражения /2/ возникает алгебра Вирасоро.

1. Здесь мы будем пользоваться результатами и обозначениями работ [17,18,19]. Поле Тирринга в бозонизированном виде имеет следующую форму:

$$\psi(x) = :e^{-i\alpha\phi + i\beta\gamma^5\tilde{\phi}}:u\,; \qquad u = \frac{\mu^{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4\pi}}}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \mu > 0, \qquad /3/$$

где $\phi(x)$ и $\tilde{\phi}(x)$ - свободные скалярные поля:

$$\partial_\mu\phi(x) + \epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi}(x) = 0, \qquad \|\epsilon_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad /4/$$

/см. о них [17,18]/. Нормальное произведение в /3/ берется по скалярным полям.

Квантовый оператор тока определяется следующим образом:

$$j_\mu(x) = \frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to0}\sum_{k=1}^{4} j_\mu(x, \epsilon_\nu^{(k)}), \qquad /5/$$

где $\epsilon_\mu^{(1)} = \epsilon_\mu$; $\epsilon_\mu^{(2)} = -\epsilon_\mu$; $\epsilon_\mu^{(3)} = \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^\nu \equiv \tilde{\epsilon}_\mu$; $\epsilon_\mu^{(4)} = -\tilde{\epsilon}_\mu$; $\epsilon^2 = \epsilon_0^2 - \epsilon_1^2 = \eta_{\mu\nu}\epsilon^\mu\epsilon^\nu \neq 0$ и кроме того

$$j_\mu(x, \epsilon) = \bar{\psi}(x + \frac{\epsilon}{2})\,\gamma_\mu\, e^{R(\epsilon)}\,\psi(x - \frac{\epsilon}{2}) \qquad /6/$$

/здесь ψ бозонизированы/.

Величина $R(\epsilon)$ определяется из равенства

$$\frac{i}{4\pi}R(\epsilon) = -(d - \frac{1}{2})\,D^-(\frac{\epsilon}{\mu}) + (s - \frac{1}{2})\,\gamma^5\tilde{D}^-(\epsilon), \qquad /7/$$

где $d = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4\pi}$; $s = \frac{\alpha\beta}{4\pi}$, а $D^-(x)$ и $\tilde{D}^-(x)$ - отрицательно-частотные части перестановочных функций скалярных полей ϕ и $\tilde{\phi}$.

Как это впервые было замечено в [21], подобное определение тока дает возможность распространить его и на случай, когда d и s принимают неканонические значения. Тогда

$$j_\mu(x) = \frac{\alpha+\beta}{2\pi}\partial_\mu\phi(x). \qquad /8/$$

Из этого определения тока мы видим, что в квантовой теории классическое выражение для спинорного тока $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ заменяется выражениями /6/ с последующей симметризацией и предельным переходом, согласно равенству /5/. Можно, используя формулы /3/, поступить подобным же образом и с классическим выражением /1/, поскольку в него входят подобные классическому току выражения. Это нетрудно сделать, и тогда мы можем записать следующее выражение для квантового тензора энергии импульса

$$\kappa\Theta_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{4}\{\frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to0}\sum_{k=1}^{4}[\Xi_{\mu\nu}(x, \epsilon_\rho^{(k)}) + \Xi_{\nu\mu}(x, \epsilon_\rho^{(k)})]\} - \eta_{\mu\nu}\mathfrak{L}(x), \qquad /9/$$

где

$$\Xi_{\mu\nu}(x, \epsilon) = :\bar{\psi}(x + \frac{\epsilon}{2})\,\gamma_\mu\overleftrightarrow{\partial}_\nu\, e^{R_0(\epsilon)}\,\psi(x - \frac{\epsilon}{2}): \qquad /10/$$

и

$$R_0(\epsilon) = R(\epsilon)\,|_{s=d=0} - 2d\ln\mu\,; \qquad /11/$$

Легко показать, что в /6/ тоже можно заменить $R(\epsilon)$ на $R_0(\epsilon)$, если при этом взять нормальное произведение операторов.

В квантовом лагранжиане /в его кинематической части/ тоже сделан подобный сдвиг аргументов. Поэтому он имеет вид

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{i}{4}[\frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to0}\sum_{k=1}^{4}\Xi_\mu{}^\mu(x, \epsilon^{(k)})] +$$
$$+\frac{g}{2}:[\frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to0}\sum_{k=1}^{4}j_\mu(x, \epsilon^{(k)})]\,[\frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to0}\sum_{\ell=1}^{4}j^\mu(x, \epsilon^{(\ell)})]: . \qquad /12/$$

Поскольку везде присутствует бозонизированное выражение для поля Тирринга /3/, то нормальное произведение в верхних формулах берется по полям ϕ и $\tilde{\phi}$. Очевидно, что в квантовой теории выражение $\Xi_{\mu\nu}(x,\epsilon)$ из /10/ заменяет классическое выражение $\bar{\psi}\gamma_\mu\overleftrightarrow{\partial}_\nu\psi$ точно таким же образом, как $j_\mu(x,\epsilon)$ заменяет $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$.

Следует заметить, что квантовый лагранжиан /12/ приводит к правильному уравнению движения /квантовое перенормированное уравнение Тирринга/, которое на самом деле решалось в [17-20].

Выполняя необходимые вычисления в выражениях /10/ и /9/, получим *

$$\Xi_{\mu\nu}(x,\epsilon) = -2i\{:\alpha j_\mu(x,\epsilon)[\partial_\nu\phi + O(\epsilon^2)]: + :\beta j_\nu(x,\epsilon)[\partial_\mu\phi + O(\epsilon^2)]: - \qquad /13/$$

$$- \beta\eta_{\mu\nu}: j_\rho(x,\epsilon)[\partial^\rho\phi(x) + O(\epsilon^2)]:\}.$$

Отсюда:

$$\frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{k=1}^{4}\Xi_{\mu\nu}(x,\epsilon) \equiv \Xi_{\mu\nu}(x) = \Xi_{\nu\mu}(x) = \qquad /14/$$

$$= -4\pi i:[j_\mu(x)j_\nu(x) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\eta_{\mu\nu}j_\rho(x)j^\rho(x)]:$$

Квантовый лагранжиан /12/ при этом принимает вид

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{g}{2}:j_\rho(x)j^\rho(x):. \qquad /15/$$

Наконец, подставляя /14/ и /15/ в /9/, получаем окончательно

$$\kappa\Theta_{\mu\nu}(x) = \pi:[2j_\mu(x)j_\nu(x) - \eta_{\mu\nu}j_\rho(x)j^\rho(x)]: \qquad /16/$$

/нормировочную постоянную κ можно определить, если учесть, что $p_\mu = \int\Theta_{0\mu}dx^1$ является генератором трансляции, т.е. $[p_\mu, \Phi(x)] = i\partial_\mu\Phi(x)$ для любых операторов $\Phi(x)$/.

Таким образом, мы показали, что, исходя из квантового выражения для тензора энергии-импульса, соответствующего классическому виду /1/, можно привести его к виду /2/, что и доказывает наше утверждение.

2. Теперь покажем, как из выражения /16/ следует алгебра Вирасоро. Для этой цели заметим, что $\Theta_{\mu\nu}(x)$ имеет только две независимые компоненты. Если ввести конусные переменные $x_\pm = x^0 \pm x^1$, то окажется, что эти независимые компоненты можно выбрать так, чтобы каждая из них зависела лишь от одной переменной x_+ или x_-. Эти две независимые компоненты имеют вид

$$\Theta_\pm(x_\pm) \equiv \frac{1}{2}(\Theta_{00} \pm \Theta_{10}) = \frac{2\pi}{\kappa}:[j_\pm(x_\pm)]^2:, \qquad /17/$$

*Подобные вычисления проводились в работах [17,20].

где

$$j_\pm = \frac{1}{2}(j_0 \pm j_1). \qquad /18/$$

Используя вид /8/ тока и коммутационные соотношения для полей $\phi(x)$ /см. [17]/, можно получить следующие коммутаторы:

$$[j_\pm(x_\pm), j_\pm(y_\pm)] = \frac{ib}{2}\delta'(x_\pm - y_\pm) \qquad /19/$$

/остальные коммутаторы равны нулю/. Здесь постоянная b выражается через α и β, но для дальнейшего это не имеет особого значения, поэтому эту связь не выписываем. Зная эти коммутаторы, можно вычислить и коммутаторы компонент $\Theta_\pm$ тензора энергии-импульса.

Сначала заметим, что компоненты с разными значками коммутируют между собой: $[\Theta_+, \Theta_-] = 0$. Не коммутируют компоненты с одинаковыми значками, но в разных точках. В силу симметрии по значкам ±, в дальнейшем мы будем их опускать, помня что полученные нами формулы справедливы для обеих компонент.

С учетом сказанного выше нетрудно получить

$$[\Theta(\xi), \Theta(\eta)] = \frac{4\pi^2}{\kappa^2}[2ib:j(\xi)j(\eta):\delta'(\xi-\eta) - \frac{ib^2}{24\pi}\delta'''(\xi-\eta)]. \qquad /20/$$

Первый член в правой части последнего равенства можно преобразовать с помощью тождества

$$:j(\xi)j(\eta):\delta'(\xi-\eta) \equiv \frac{1}{2}[:j(\xi)^2: + :j(\eta)^2:]\delta'(\xi-\eta) \qquad /21/$$

и получить окончательно /после учета соотношения /17//

$$\frac{1}{i}[\Theta(\xi), \Theta(\eta)] = [\Theta(\xi) + \Theta(\eta)]\delta'(\xi-\eta) - \frac{1}{24\pi}\delta'''(\xi-\eta), \qquad /22/$$

где мы уже провели упомянутую выше нормировку, которая свелась к равенству $\kappa = 2\pi b$. Как известно, формула /22/ задает определенную алгебру типа Вирасоро.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fubini S., Hanson A.J., Jackiw R. Phys.Rev.D, 1973, 7, p. 1732.
2. Thirring W. Ann. Phys., 1958, 3, p. 91.
3. Johnson K. Nuovo Cim., 1961, 20, p. 773.
4. Klaiber B. Boulder Lectures in Theoretical Physics, 1968, X-A, Gordon & Breach, p. 141.

5. Dell'Antonio G.F., Frishman Y., Zwanziger D. Phys.Rev.D, 1972, 6, p. 988.
6. Lowenstein J.H., Schroer B. Phys.Rev.D,1971, 3, p. 1981.
7. Lowenstein J.H. Comm.Math.Phys., 1970, 16, p. 265.
8. Streater R.F., Wilde I.F. Nucl.Phys.B., 1970, 24, p. 561.
9. Streater R.F. Charges and Currents in the Thirring Model, 1974, in Physical Reality and Mathematical Description, Enz/Mehra (eds.) D.Reidel Publ.Co., Dordrecht, Holland, p. 375.
10. Callan C.G., Dashen R.F., Sharp D.H. Phys.Rev., 1968, 165, p. 1883.
11. Sommerfield C.M. Phys.Rev., 1968, 176, p. 2019.
12. Sugawara H. Phys.Rev., 1968, 170, p. 1659.
13. Georgi H. Phys.Rev.D, 1970, 2, p. 2908.
14. Coleman S. Phys.Rev.D, 1975, 11, p. 2088.
15. Mandelstam S. Phys.Rev.D, 1975, 11, p. 3026.
16. Nakanishi N. Progr.Theor.Phys., 1977, 57, p. 269, 570, 1025.
17. Hadjiivanov L., Mikhov S., Stoyanov D. Journ. of Phys.A, 1979, 12, p. 119.
18. Hadjiivanov L. JINR, E2-80-445, Dubna, 1980.
19. Hadjiivanov L., Stoyanov D. Theor.Math.Phys., 1981, 46, p. 361.
20. Стоянов Д.Ц. Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий, Д1,2-12450, Дубна, 1979.
21. Aneva B., Mikhov S., Stoyanov D. Journ. of Phys.A, 1981, 14, p. 493.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1984 года.

Стоянов Д.Ц., Хаджииванов Л.К. P2-84-466
О квантовом тензоре энергии-импульса в модели Тирринга

Исследуется возможность построения улучшенного тензора энергии импульса в случае квантовой модели Тирринга. С использованием метода бозонизации этой модели удалось показать, что существующие в литературе два различных выражения для квантового тензора энергии-импульса на самом деле совпадают. Это приводит к возникновению алгебры Вирасоро и в этой модели. Получен также вид квантового лагранжиана, из которого возникает перенормированное уравнение Тирринга.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Stoyanov D.Ts., Hadjiivanov L.K. P2-84-466
About Quantum Energy-Momentum Tensor for the Thirring Model

A possibility to construct the symmetrized traceless energy-momentum tensor for the quantum Thirring model is considered. Using the bosonization method, the equivalence of both expressions for this tensor, that are currently used in the literature, is proved. This leads to the appearance of the Virasoro algebra in this model too. The quantum Lagrangian is also obtained, that gives rise to renormalized Thirring equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984