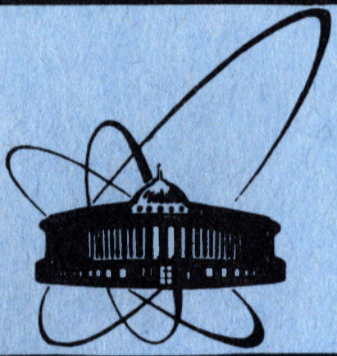

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-435

В.Бужек*

РОЛЬ "ШУМА" ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ КВАНТОВАНИИ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

1984

Метод стохастического квантования /МСК/ евклидовых полей, предложенный Паризи и Ву [1], представляет собой альтернативу к уже известным способам квантования. Он основан на связи между евклидовой КТП и стохастическими дифференциальными уравнениями [2,3] и интересен тем, что в нем нет необходимости фиксировать калибровку при квантовании неабелевых калибровочных полей [1,4,5,6].

Суть метода Паризи и Ву заключается во введении в теорию дополнительного измерения - фиктивного времени t - $\phi(x) \to \phi(x, t)$; $x \in E^D$ и постулировании стохастического дифференциального уравнения /уравнения Ланжевена/:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x, t)} + \eta(x, t) . \qquad /1/$$

Это уравнение описывает гипотетический процесс винеровского типа, протекающий в фиктивном времени. Случайную величину $\eta(x, t)$, имеющую гауссово распределение

$$P[\eta] = \exp\{-\frac{1}{4} \int d^D x dt \eta^2(x, t)\}, \qquad /2/$$

часто называют "белым шумом". Среднее значение функционала $F[\eta]$ по "белому шуму" определяется обычным образом:

$$\langle F[\eta] \rangle_\eta = \int F[\eta] P[\eta] \prod_{x, t} D\eta(x, t) .$$

Решения $\phi_\eta(x, t)$ уравнения Ланжевена /1/ обладают тем свойством, что их одновременные корреляционные функции $\langle \phi_\eta(x_1, t) \ldots \phi_\eta(x_n t) \rangle_\eta$ в равновесном состоянии, т.е. при $t \to \infty$, совпадают с функциями Грина* стандартной евклидовой теории поля с действием $S[\phi(x)]$ [6]:

$$\lim_{t \to \infty} \langle \phi_\eta(x_1, t) \ldots \phi_\eta(x_n, t) \rangle_\eta = \langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle_0 , \qquad /3/$$

где

$$\langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle_0 = N^{-1} \int \exp\{-S[\phi]\} \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \prod_x D\phi(x) . \qquad /4/$$

---

*Евклидовы функции Грина часто называют функциями Швингера.

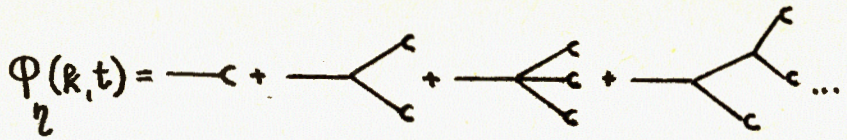

Рис.1

Рассмотрим далее для определенности скалярное поле с действием:

$$S = \int d^D x \{ (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} g\phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda\phi^4 \}. \qquad /5/$$

Уравнение Ланжевена /1/ можно переписать в виде интегрального уравнения в импульсном представлении:

$$\phi(k,t) = \int_0^t ds\, G(k, t-s) \{ \eta(k,s) - \frac{1}{2!} g \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p,s)\,\phi(k-p,s) - \qquad /6/$$

$$- \frac{1}{3!} \lambda \int \frac{d^D p\, d^D q}{(2\pi)^{2D}} \phi(p,s)\,\phi(q,s)\,\phi(k-p-q,s) \},$$

где

$$G(k, t-s) = \exp\{-(k^2 + m^2)(t-s)\}. \qquad /7/$$

При записи уравнения /6/ мы воспользовались начальным условием $\phi(x,0) = 0$*. Решение этого уравнения можно записать в виде итерационного ряда, графическое представление которого приведено на рис.1. Функции G отвечает прямая линия, а "белому шуму" η - символ -⊂ .

В силу /2/, $\langle \eta(k,t)\, \eta(q,s) \rangle_\eta = 2(2\pi)^D \delta^D(k+q)\, \delta(t-s)$, и усреднение по η графически можно представить как спаривание символов -⊂. При таком спаривании возникают стохастически диаграммы /рис.2/. Каждая из них имеет форму обыкновенной диаграммы Фейнмана. Отличие состоит в том, что разные вершины стохастических диаграмм могут быть соединены как линиями без "кружочков" /соответствующими функциям $G(k, t-s)$/, так и линиями с "кружочками". Последние называются стохастическими пропагаторами и соот-

* В работе /4/ доказано, что выбор начальных условий не влияет на значения корреляционных функций $\langle \phi_\eta \dots \phi_\eta \rangle_\eta$ при $t \to \infty$, и, таким образом, не является существенным.

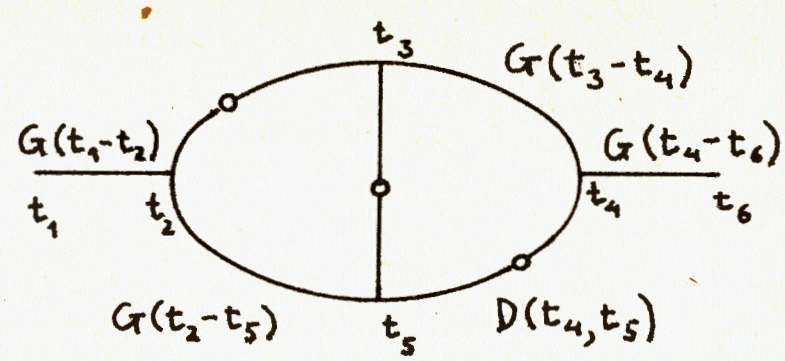

Рис.2

ветствуют следующей свертке:

$$\langle \int_0^{t_1} G(k, t_1 - s_1)\, \eta(k, s_1)\, ds_1 \int_0^{t_2} G(q, t_2 - s_2)\, \eta(q, s_2)\, ds_2 \rangle_\eta =$$

$$= 2 \int_0^{\min(t_1,t_2)} ds\, G(k, t_1 - s)\, G(k, t_2 - s) \equiv D(k; t_1, t_2). \qquad /8/$$

При вычислении стохастических диаграмм возникают две проблемы, которые, как отмечено в /1/, затрудняют практическое применение только что описанного метода квантования. Во-первых, количество стохастических диаграмм существенно больше, чем число обыкновенных диаграмм Фейнмана. Во-вторых, интегрирование по фиктивным временам вершин диаграммы оказывается громоздким /7/.

Целью настоящей работы является построение схемы стохастического квантования скалярных полей, свободной от указанных трудностей.

Прежде всего отметим, что "белый шум" η, под воздействием которого "квантуются" классические поля ϕ, можно считать евклидовым полем со специфическим функционалом действия $S[\eta]$: $S[\eta] = \frac{1}{4} \int d^D x\, dt\, \eta^2(x,t)$. Именно такое определение действия "белого шума" /или, что то же самое, определение функционала вероятности $P[\eta]$ /2// обеспечивает выполнение равенства /3/.

Рассмотрим далее новое стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = - \frac{\delta S_0[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \eta'(x,t), \qquad /9/$$

в котором S_0 является свободным действием скалярного поля, а случайная величина $\eta'(x,t)$ имеет такое распределение, что вы-

полняется равенство /см./4//:

$$\lim_{t\to\infty} \langle \phi_{\eta'}(x_1,t) \dots \phi_{\eta'}(x_n,t) \rangle_{\eta'} = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_0 , \qquad /10/$$

$$\phi_{\eta'}(k,t) = \int_0^t G(k,\, t-s)\, \eta'(k,s)\, ds . \qquad /11/$$

Представим функционал распределения $P[\eta']$ случайной величины $\eta'(x,t)$ в виде

$$P[\eta'] = \exp\{ -\frac{1}{4} \int d^D x\, dt\, \eta'^2(x,t) - \int \mathcal{Z}_I(\eta')\, d^D x\, dt \}$$

и определим производящий функционал $Z[J]$, такой, что

$$\langle \phi_{\eta'}(x_1,t) \dots \phi_{\eta'}(x_n,t) \rangle_{\eta'} = \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1,t) \dots \delta J(x_n,t)} \Big|_{J=0} . \qquad /12/$$

Положим /8/

$$Z[J] = N^{-1} \int \prod_{x,t} D\eta'(x,t) \prod_{y,s} D\phi(y,s)\, P[\eta']\, \delta(\phi - \phi_{\eta'}) *$$

$$* \exp\{ \int d^D x\, dt\, J(x,t)\, \phi(x,t) \}\, P[\phi(x,0)] .$$

Величина $P[\phi(x,0)]$ описывает начальное распределение при $t = 0$. В частности, при $\phi(x,0) = 0$ имеет место равенство $P[\phi(x,0)] = \delta(\phi(x,0))$. После интегрирования по $D\phi$ функционал $Z[J]$ принимает вид

$$Z[J] = N^{-1} \int \prod_{x,t} D\eta' \exp\{ -\frac{1}{4} \int \eta'^2(x,t)\, d^D x\, dt - \int d^D x\, dt\, \mathcal{Z}_I(\eta') \} *$$

$$* \exp\{ \int d^D x\, dt\, J(x,t)\, \phi_{\eta'}(x,t) \} .$$

При подходящем выборе $\mathcal{Z}_I(\eta')$ случайная величина $\eta'(x,t)$ несет ответственность не только за квантование классической системы, но и за взаимодействие в ней.

Представим $\mathcal{Z}_I(\eta')$ в виде

$$\mathcal{Z}_I(\eta') = [\frac{g}{3!} (\phi_{\eta'}(x,t))^3 + \frac{\lambda}{4!} (\phi_{\eta'}(x,t))^4] \delta(t - T) ,$$

где $\phi_{\eta'}(x,t)$ является фурье-образом величины $\phi_{\eta'}(k,t)$, определенной выражением /11/, а T есть некоторый фиксированный момент времени. Тогда производящий функционал $Z[J]$ можно записать в виде

$$Z[J] = \exp\{ -\frac{g}{3!} \int d^D x\, (\frac{\delta}{\delta J(x,T)})^3 - \frac{\lambda}{4!} \int d^D x\, (\frac{\delta}{\delta J(x,T)})^4 \} *$$

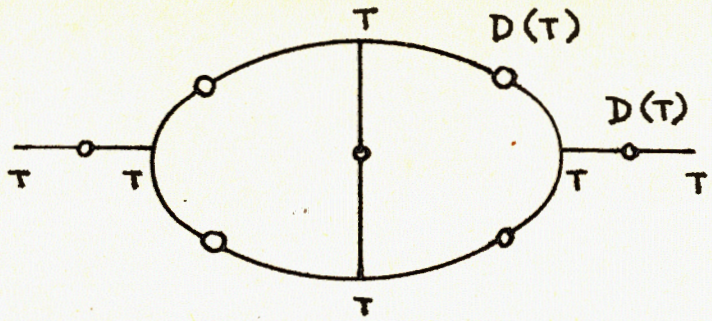

Рис.3

$$\exp\{ \frac{1}{2} \int d^D x\, d^D y\, ds\, dt\, J(x,s)\, D(x-y;\, t,\, s)\, J(y,t) \} , \qquad /14/$$

где $D(x-y;\, t,\, s) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k\, e^{ik(x-y)}\, D(k;\, t,\, s)$, а $D(k;\, t,\, s)$ определяется выражением /8/.

С помощью /12/-/14/ можно вычислить одновременные корреляционные функции $\langle \phi_{\eta'}(x,T) \dots \phi_{\eta'}(x,T) \rangle_{\eta'}$, которым соответствуют стохастические диаграммы рис.3. Они топологически эквивалентны стандратным диаграммам Фейнмана с той только разницей, что каждая вершина стохастической диаграммы характеризуется параметром T /одинаковым для всех вершин/. Вершины диаграммы соединяются стохастическим пропагатором $D(x-y;\, T,\, T) \equiv D(x-y,\, T)$.

Особо отметим, что число стохастических диаграмм здесь равно числу диаграмм Фейнмана и что, в силу /13/, все интегрирования по фиктивным временам тривиальны.

Очевидно, что в пределе $T \to \infty$ каждая стохастическая диаграмма переходит в соответствующую диаграмму Фейнмана, поскольку

$$\lim_{T\to\infty} D(x-y,\, T) = D(x-y) . \qquad /15/$$

Тем самым равенство /10/ можно считать доказанным для всех корреляционных функций.

Аналогичным образом можно построить производящий функционал $Z[J_1, \dots, J_k]$ для системы взаимодействующих скалярных полей $\phi_1, \dots, \phi_k$. При этом каждому полю ϕ_i необходимо сопоставить свой "шум" η'_i.

Для иллюстрации вычислим вклад в 2-точечную корреляционную функцию $\langle \phi_{\eta'}(k_1,T)\, \phi_{\eta'}(k_2,T) \rangle^{(2)}_{\eta'}$ во втором порядке теории возмущений при условии, что действие дается выражением /5/. Используя /14/, находим

$$\langle \phi_{\eta'}(k_1,T)\, \phi_{\eta'}(k_2,T) \rangle^{(2)} \sim g^2 \delta^D(k_1+k_2)\, D(k_1,T) \int d^D p\, D(p,T)\, D(k_1-p,T) \times$$
$$\times D(k_2,T) .$$

Из /15/ следует, что при $T \to \infty$ получается результат, эквивалентный стандартной теории возмущений.

Рассмотрим более подробно интеграл $A(k,T) \equiv \int d^D p D(p,T) D(k-p,T)$. Из определения функции $D(p,T)$ /8/ следует, что

$$A(k,T) = 4 \int d^D p \int_0^T d\sigma_1 \, e^{-2(p^2+m^2)(T-\sigma_1)} \int_0^T d\sigma_2 \, e^{-2((k-p)^2+m^2)(T-\sigma_2)}. \qquad /16/$$

При $T \to \infty$ из /16/ получаем хорошо известный /при $D \geq 4$/ расходящийся интеграл. Нетрудно заметить, что после замены $\alpha_i = 2(T-\sigma_i)$ стохастические пропагаторы оказываются записанными в модифицированном представлении Швингера /при $T \to \infty$ оно совпадает со стандратным представлением Швингера для функций D/:

$$A(k,T) = \int d^D p \int_0^{2T} d\alpha_1 \, e^{-\alpha_1(p^2+m^2)} \int_0^{2T} d\alpha_2 \, e^{-\alpha_2((k-p)^2+m^2)}.$$

В последнем интеграле расходимости возникают при значениях $\alpha_i = 0$. Известно[9], что интеграл $A(k,T)$ при $T \to \infty$ можно регуляризовать, если функции $D(k,T)$ записать в виде

$$\lim_{T\to\infty} D(k,T) = \lim_{T\to\infty} \int_0^{2T} d\alpha \, F(\alpha, r) \, e^{-\alpha(k^2+m^2)}, \qquad /17/$$

где

$$F(\alpha, r) = \begin{cases} r > 0; & \lim\limits_{\alpha\to 0} F(\alpha, r) = 0, \\ \alpha > 0; & \lim\limits_{r\to 0} F(\alpha, r) = 1. \end{cases}$$

Вспомогательную функцию $F(\alpha_i, r_i)$ можно выбрать таким образом, что регуляризованная фейнмановская /т.е. при $T \to \infty$ / амплитуда будет выдерживать предельный переход $r_i \to 0$ / i - номер внутренней линии диаграммы/ независимо от того, имеются ли в диаграмме расходящиеся подграфы или нет. Соответствующий симметризованный предел регуляризованной амплитуды Фейнмана и объявляется перенормированной амплитудой. Таким образом, в рассматриваемой схеме* рецепт перенормировки не включает в себя вычитательной процедуры типа R-операции или удаления полюсных особенностей по регуляризующим параметрам. Необходимые вычитания ультрафиолетовых расходимостей происходят автоматически за счет особого выбора функции $F(\alpha, r)$.

* В литературе описанная процедура называется перенормировкой "без вычитаний" /9/.

Не определяя конкретного вида функции $F(\alpha, r)$, отметим, что представление /17/ для стохастического пропагатора $D(p,T)$ можно просто получить, если модифицировать распределение "шума" $\eta(x,t)$ следующим образом:

$$\exp\{-\frac{1}{4}\int d^D x \, dt \, \eta^2(x,t)\} \to \exp\{-\frac{1}{4}\int d^D x \, dt \, \frac{\eta^2(x,t)}{f(t,r)}\},$$

где $f(2T-\alpha, r) \equiv F_T(\alpha, r)$; $\lim\limits_{T\to\infty} F_T(\alpha, r) = F(\alpha, r)$.

Резюмируем предложенный способ квантования скалярных полей. Функционал распределения "шума" η' определяется следующей формулой:

$$P[\eta'] = \exp\{-\frac{1}{4}\int d \, x \, dt \, \frac{\eta'^2(x,t)}{f(t,r)} - \int d^D x \, dt \, \mathcal{Z}_I(\eta')\}.$$

"Шум" η' действует на решения $\phi_{\eta'}$ стохастического уравнения /9/ таким образом, что корреляционные функции $\langle \phi_{\eta'}(x_1,T) \ldots \phi_{\eta'}(x_n,T) \rangle_{\eta'}$ при $T \to \infty$ эквивалентны регуляризованным функциям Грина перенормируемой евклидовой квантовой теории со взаимодействием $\mathcal{Z}_I(\phi)$.

Автор выражает благодарность В.Г.Кадышевскому за помощь при написании работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Parisi G., Wu Yong Shi Scientica Sinica, 1981, 24, p.483.
2. Zwanziger D. Nucl.Phys., 1981, B192, p.259.
3. Zwanziger D. Phys.Lett., 1982, 114B, p.337.
4. Floratos E., Iliopoulos J. Nucl.Phys., 1983, B214, p.392.
5. Конструктивная теория поля /под ред. А.Н.Колмогорова и С.П.Новикова/. "Мир", М., 1977.
6. Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход /под ред. А.Н.Колмогорова и С.П.Новикова/. "Мир", М., 1978.
7. Grumis W., Hüffel H. Z.Phys.C - Particles and Fields, 1983, 18, p.129.
8. Gozzi E. Phys.Lett., 1983, 130B, p.183.
9. Завьялов О.И. Перенормированные диаграммы Фейнмана. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник *"Краткие сообщения ОИЯИ"*. В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют [redacted] статус официальных публикаций ОИЯИ.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condenced matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of this new collection [redacted] have the status of official publications of the JINR.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.

Бужек З. P2-84-435
Роль "шума" при стохастическом квантовании скалярных полей.

Предлагается новый метод стохастического квантования для скалярных полей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Buzek V. P2-84-435
Role of Noise in Stochastic Quantization of Scalar Fields

New method of stochastic quantization for scalar fields is proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984