сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-383

В.В.Двоеглазов, Н.Б.Скачков

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КОВАРИАНТНОЕ ОДНОВРЕМЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ($\pi\mu$)-АТОМА

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в физике элементарных частиц сложилось целое направление, связанное с изучением свойств так называемых экзотических атомов. Под такими системами понимаются атомы, в которых один из электронов заменен элементарной частицей [1].

Начало этому направлению положено работами [2]. В середине 70-х гг. была экспериментально обнаружена связанная система π-мезона и мюона [3], к которой также вполне подходит название экзотического атома. Отметим, что еще за несколько лет до этого эксперимента основные свойства $(\pi\mu)$-атома были изучены теоретически в работе [4], где обращено внимание на те возможности исследования характеристик π-мезона, которые открывает экспериментальное изучение связанной системы мезона и лептона /более поздние работы на эту тему см. в [5]/.

В [6] положено начало изучению роли релятивистских эффектов в описании $(\pi\mu)$-атома. С этой целью использован метод одновременного квазипотенциального описания связанных состояний в квантовой теории поля, предложенный Логуновым и Тавхелидзе [7]. В настоящей работе, носящей технический характер, мы исследуем спиновую структуру квазипотенциала электромагнитного взаимодействия между фермионом /μ-мезоном/ и /псевдо/ скалярной частицей /π-мезоном/ и найдем вид парциальных квазипотенциалов, входящих в радиальные уравнения и содержащих эффекты релятивистского запаздывания.

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ $(\pi\mu)$-АТОМА

В [8] получено следующее квазипотенциальное уравнение для волновой функции /ВФ/ составной системы, образованной фермионом и бесспиновым бозоном:

$$2\Delta^{\circ}_{p,m_2\lambda\mathcal{P}}(M-\Delta^{\circ}_{p,m_1\lambda\mathcal{P}}-\Delta^{\circ}_{p,m_2\lambda\mathcal{P}})\Phi_{\sigma}(\vec{\Delta}_{p,\lambda}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{\sigma'}\int\frac{d^3\vec{\Delta}_{k,\lambda}}{2\Delta^{\circ}_{k,m_1\lambda}}\cdot V^{\sigma'}_{\sigma}(\vec{\Delta}_{p,\lambda};\vec{\Delta}_{k,\lambda})\Phi_{\sigma'}(\vec{\Delta}_{k,\lambda}). \qquad /2.1/$$

Квазипотенциал V совпадает в первом приближении по константе связи с амплитудой рассеяния мюона на пионе.

© Объединенный институт ядерных исследований Дубна, 1984

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

Ковариантно определенный в с.ц.м. импульс относительного движения частиц задается формулой[8] ($\lambda \equiv \lambda_{\mathcal{P}} = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{(p_1+p_2)^2}}$)

$$\vec{\Delta}_{k,\lambda} = (\overrightarrow{L_\lambda^{-1} k}) = \vec{k} - \frac{\vec{\mathcal{P}}}{M}\left(k_0 - \frac{\vec{\mathcal{P}}\vec{k}}{\mathcal{P}_0 + M}\right) \equiv \overset{\circ}{\vec{k}} ; \qquad /2.2/$$

$$\Delta^\circ_{k,m_j\lambda} \equiv \sqrt{m_j^2 + \vec{\Delta}^2_{k,\lambda}} \equiv \overset{\circ}{k}_0 ; \quad j = 1,2. \qquad /2.3/$$

Здесь m_1 - масса мюона, m_2 - масса пиона, L_λ^{-1} - чисто лоренцевское преобразование из системы отсчета, в которой она обладает 4-импульсом $\mathcal{P}_\mu$ и 4-скоростью $\lambda_\mu \equiv \mathcal{P}_\mu / \sqrt{\mathcal{P}^2}$, в систему покоя $L_\lambda^{-1}\mathcal{P} = (M, \vec{O})$.

В[9] выражение для квазипотенциала выбрано в виде:

$$V_\sigma^{\sigma'}(\vec{\Delta}_{p,\lambda} ; \vec{\Delta}_{k,\lambda}) = V_0(\vec{\Delta}_{k,\lambda} - \vec{\Delta}_{p,\lambda}) \times$$

$$\times \bar{u}(\vec{\Delta}_{p,\lambda} ; \sigma)\gamma_\mu u(\vec{\Delta}_{k,\lambda} ; \sigma')(\tilde{\Delta}_{p,\lambda} + \tilde{\Delta}_{k,\lambda})^\mu , \qquad /2.4/$$

где V_0 - локальная часть квазипотенциала, отвечающего однобозонному обмену: $\tilde{\Delta}_{p,\lambda} = (\Delta^\circ_{p,m_2\lambda} ; -\vec{\Delta}_{p,\lambda})$, $\Delta_{p,\lambda} = (\Delta^\circ_{p,m_1\lambda} ; \vec{\Delta}_{p,\lambda})$.

Распишем /2.4/ более подробно, используя результаты работы[10]*:

$$\bar{u}(\overset{\circ}{p},\sigma)\gamma^\mu u(\overset{\circ}{k},\sigma') = \frac{2}{\sqrt{2m(\Delta^\circ + m)}}\xi_\sigma^+\{\overset{\circ}{p}{}^\mu(\Delta_0 + m) + 2W^\mu(\overset{\circ}{p})(\vec{\sigma}\vec{\Delta})\}\xi_{\sigma'} , \qquad /2.5/$$

$$\overset{\circ}{p}_\mu W^\mu(\overset{\circ}{p}) = 0 ; \quad \overset{\circ}{k}_\mu W^\mu(\overset{\circ}{p}) = -\frac{m}{2}(\vec{\sigma}\vec{\Delta}) ,$$

$$\overset{\circ}{\vec{\Delta}} \equiv \overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}} = (\overrightarrow{L^{-1}_{\overset{\circ}{p}}\overset{\circ}{k}}) ; \quad \Delta_0 \equiv \sqrt{m^2 + \vec{\Delta}^2} = \frac{\overset{\circ}{p}{}^\mu \overset{\circ}{k}_\mu}{m} . \qquad /2.6/$$

Получаем:

$$\hat{V}(\overset{\circ}{\vec{k}}, \overset{\circ}{\vec{p}}) = \frac{2}{\sqrt{2m_1(\Delta_0 + m_1)}}\{[\overset{\circ}{p}_0(\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0) - 2m_1^2](m + \Delta_0) +$$

$$+ (\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0)(\overset{\circ}{\vec{p}}\overset{\circ}{\vec{\Delta}}) + i\vec{\sigma}[\overset{\circ}{\vec{p}}\overset{\circ}{\vec{\Delta}}](\overset{\circ}{p} + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0)\} V_0(\overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}}) . \qquad /2.7/$$

---

* Здесь $W^\mu(p)$ - вектор релятивистского спина /вектор Паули-Любанского-Широкова/ .

После перехода к нерелятивистскому пределу видно, что квазипотенциал /2.7/ преобразуется к выражению вида ($\vec{\Delta}_3 = \vec{k} - \vec{p}$)

$$V(\vec{k},\vec{p}) = -g_v^2\frac{4m_1m_2}{\vec{\Delta}_3^2} + g_v^2\left(1 - \frac{m_2}{2m_1}\right)\frac{1}{c^2} -$$

$$- g_v^2\frac{\vec{p}^2 + \vec{k}^2}{\vec{\Delta}_3^2}\left(2 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{1}{c^2} - \frac{2i\vec{\sigma}[\vec{p}\vec{\Delta}_3]}{\vec{\Delta}_3^2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g_v^2}{c^2} , \qquad /2.8/$$

при условии, что локальная часть квазипотенциала выбрана в виде

$$V_0(\overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}}) = \frac{g_v^2}{2m_1(m_1 - \Delta_0)} = \frac{g_v^2}{(p-k)^2} . \qquad /2.9/$$

Несложные вычисления позволяют получить матричные элементы квазипотенциала /2.7/ $V_\sigma^{\sigma'}(\vec{k},\vec{p})$. Они записываются следующим образом:

$$V_{1/2}^{-1/2} = \frac{2V_0(\overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}})}{\sqrt{2m_1(\Delta_0 + m_1)}}(\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0)(i\eta_1 + \eta_2) , \qquad /2.10/$$

$$V_{-1/2}^{1/2} = \frac{2V_0(\overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}})}{\sqrt{2m_1(\Delta_0 + m_1)}}(\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0)(i\eta_1 - \eta_2) , \qquad /2.11/$$

$$V_{1/2}^{1/2} = \frac{2V_0(\overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}})}{\sqrt{2m_1(\Delta_0 + m_1)}}\{[\overset{\circ}{p}_0(\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0) - 2m_1^2] \times$$

$$\times (m_1 + \Delta_0) + (\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0)(\overset{\circ}{\vec{p}}\vec{\Delta}) + i\eta_3(\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0)\} , \qquad /2.12/$$

$$V_{-1/2}^{-1/2} = \frac{2V_0(\overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}})}{\sqrt{2m_1(\Delta_0 + m_1)}}\{[\overset{\circ}{p}_0(\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0) - 2m_1^2](m_1 + \Delta_0) +$$

$$+ (\overset{\circ}{p}_0 + \overset{\circ}{\tilde{p}}_0 + \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{\tilde{k}}_0)[(\overset{\circ}{\vec{p}}\vec{\Delta}) - i\eta_3]\} , \qquad /2.13/$$

где

$$\vec{\eta} = [\overset{\circ}{\vec{p}}\vec{\Delta}] ; \quad \vec{\Delta} \equiv \overset{\circ}{\vec{k}}(-)\overset{\circ}{\vec{p}} = (\overrightarrow{L^{-1}_{\overset{\circ}{p}}\overset{\circ}{k}}) ; \quad \Delta^\mu_{p,m_1\lambda} \equiv \overset{\circ}{p}{}^\mu ; \quad \tilde{\Delta}^\mu_{p,m_2\lambda} \equiv \overset{\circ}{\tilde{p}}{}^\mu . \qquad /2.14/$$

Если осуществить разложение ВФ и квазипотенциала по парциальным волнам, то можно получить систему парциальных уравнений:

$$2\mathring{p}_0(M-\mathring{p}_0-\tilde{\mathring{p}}_0)\frac{1}{\mathring{k}}\Psi_{J\ell}(\mathring{p}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathring{k}\,dk}{\mathring{k}_0}\sum V^J_{\ell\ell'}(\mathring{k},\mathring{p})\Psi_{J\ell'}(\mathring{k}), \qquad /2.15/$$

где $(J=|\ell-1/2|, \ell+1/2)$, $\mathring{k}=|\vec{\Delta}_{k,\lambda}|$; $\mathring{p}=|\vec{\Delta}_{p,\lambda}|$.

Коэффициенты $V^J_{\ell\ell'}(k,p)$ находятся по формуле:

$$V^J_{\ell\ell'}(k,p) = \sum_{M,\sigma',\sigma}\int_0^\pi \sin\theta_p\,d\theta_p\int_0^{2\pi}d\phi_p\int_0^\pi\sin\theta_k\,d\theta_k\int^{2\pi} d\phi_k \times$$

$$\times\{\Omega^{*(1/2)}_{J\ell M}(\vec{n}_p)\}^\sigma V^{\sigma'}_\sigma(\mathring{\vec{k}}(-)\mathring{\vec{p}};\mathring{\vec{p}})\{\Omega^{(1/2)}_{J\ell' M}(\vec{n}_k)\}_{\sigma'}. \qquad /2.16/$$

Здесь: $\vec{n}_p=\mathring{\vec{p}}/|\mathring{\vec{p}}|$, $\vec{n}_k=\mathring{\vec{k}}/|\mathring{\vec{k}}|$, θ_p, ϕ_p - угловые координаты вектора $\vec{n}_p$; θ_k, ϕ_k - угловые координаты вектора $\vec{n}_k$; $\Omega^{(1/2)}_{J\ell M}(\vec{n})$ - шаровые спиноры.

Для удобства вычислений выберем систему отсчета таким образом, чтобы вектор $\vec{n}_p$ был направлен по оси z, а вектор $\vec{n}_k$ лежал в плоскости xz.

Результаты вычислений могут быть представлены в виде интегралов

$$V^{\ell+1/2}_{\ell\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}(\ell+1)\int_{-1}^{1}d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\phi\,[V^{1/2}_{1/2}Y_{\ell 0}(\theta,0)+V^{-1/2}_{1/2}Y_{\ell 1}(\theta,0)+ \qquad /2.17/$$

$$+V^{1/2}_{-1/2}Y_{\ell,-1}(\theta,0)+V^{-1/2}_{-1/2}Y_{\ell 0}(\theta,0)], \quad (\ \ =0,1,2,\ldots),$$

$$V^{\ell+1/2}_{\ell,\ell+1} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+3}}\sqrt{(\ell+1)(\ell+2)}\int_{-1}^{1}d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\phi\ \times \qquad /2.18/$$

$$\times[V^{-1/2}_{1/2}Y_{\ell+1,1}(\theta,0)-V^{1/2}_{-1/2}Y_{\ell+1,-1}(\theta,0)], \quad (\ell=0,1,2,\ldots),$$

$$V^{\ell-1/2}_{\ell\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\cdot\ell\int_{-1}^{1}d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\phi\cdot[V^{1/2}_{1/2}Y_{\ell 0}(\theta,0)- \qquad /2.19/$$

$$-V^{-1/2}_{1/2}Y_{\ell 1}(\theta,0)-V^{1/2}_{1/2}Y_{\ell,-1}(\theta,0)+V^{-1/2}_{-1/2}Y_{\ell 0}(\theta,0)], \quad (\ell=1,2,\ldots),$$

$$V^{\ell-1/2}_{\ell,\ell-1} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell-1}}\sqrt{\ell(\ell-1)}\int_{-1}^{1}d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\phi\,[V^{-1/2}_{1/2}Y_{\ell-1/2,1}(\theta,0)+ \qquad /2.20/$$

$$+V^{1/2}_{-1/2}Y_{\ell-1,1}(\theta,0)], \quad (\ell=1,2\ldots).$$

Чтобы вычислить указанные интегралы, нужно осуществить следующую замену переменных:

$$\cos\theta \to \mathrm{ch}y = \mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\chi_k - \cos\theta\,\mathrm{sh}\chi_p\,\mathrm{sh}\chi_k, \qquad /2.21/$$

где

$$\mathring{p}_0=m_1\mathrm{ch}\chi_p; \qquad \mathring{k}_0=m_1\mathrm{ch}\chi_k;$$

$$\mathring{\vec{p}}=m_1\vec{n}_p\mathrm{sh}\chi_p; \qquad \mathring{\vec{k}}=m_1\vec{n}_k\mathrm{sh}\chi_k; \qquad /2.22/$$

$$\vec{n}_p=\mathring{\vec{p}}/|\mathring{\vec{p}}|; \qquad \vec{n}_k=\mathring{\vec{k}}/|\mathring{\vec{k}}|$$

и $\mathrm{ch}y \to \mathrm{ch}\,y/2$.

В выбранной нами системе координат:

$$V^{1/2}_{1/2}=V^{-1/2}_{-1/2} = \frac{2V_0(\mathring{\vec{k}}(-)\mathring{\vec{p}})}{\sqrt{2m_1(\Delta_0+m_1)}}\{[\mathring{p}_0(\mathring{p}_0+\tilde{\mathring{p}}_0+\mathring{k}_0+\tilde{\mathring{k}}_0)-2m^2]\times \qquad /2.23/$$

$$\times(m+\Delta_0)+(\mathring{\vec{p}}\mathring{\vec{\Delta}})(\mathring{p}_0+\tilde{\mathring{p}}_0+\mathring{k}_0+\tilde{\mathring{k}}_0)\} \equiv V_1+V_2,$$

$$V^{-1/2}_{1/2} = -V^{1/2}_{-1/2} = \frac{2V_0(\mathring{\vec{k}}(-)\mathring{\vec{p}})}{\sqrt{2m_1(\Delta_0+m_1)}}(\tilde{\mathring{p}}_0+\mathring{p}_0+\mathring{k}_0+\tilde{\mathring{k}}_0)\eta_2 = V_3. \qquad /2.24/$$

Интегралы, с которыми мы сталкиваемся при вычислении коэффициентов $V^J_{\ell\ell'}$, имеют структуру

$$A = -\frac{4m^2g_v^2}{\sqrt{2m\mathring{k}\mathring{p}}}\int_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx\cdot\frac{x^2}{x^2-1}P_\ell(\gamma-\beta x^2), \qquad /2.25/$$

$$B = \frac{m^2g_v^2}{\sqrt{2m\mathring{k}\mathring{p}}}\cdot\int_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx\,\frac{2\mathring{p}_0x^2-\mathring{p}_0-\mathring{k}_0}{x^2-1}P_\ell(\gamma-\beta x^2), \qquad /2.26/$$

$$C_{n,m} = -\sqrt{2m}\, g_v^2 \int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx \frac{\sqrt{1-(\gamma-\beta x^2)^2}}{x^2-1} P_n^m(\gamma-\beta x^2), \qquad /2.27/$$

$$n=\ell,\ \ell\pm 1;\ m=\pm 1$$

где

$$\gamma = \frac{\mathring{k}_0\mathring{p}_0 + m^2}{\mathring{k}\mathring{p}};\quad \beta = \frac{2m}{kp}, \qquad /2.28/$$

а $P_\ell(z)$ - полином Лежандра I рода.

Результат интегрирования /2.26/-/2.28/ имеет вид полинома и дан в Приложении. Используя обозначения /2.26/-/2.28/, можно записать:

$$V_{\ell\ell}^{\ell+1/2} = 2\pi(\ell+1)\Big\{\frac{2[\mathring{p}_0(\mathring{p}_0+\mathring{\tilde{p}}_0+\mathring{k}_0+\mathring{\tilde{k}}_0)-2m_1^2]}{m_1\sqrt{2m_1}}A +$$

$$+\frac{(\mathring{p}_0+\mathring{\tilde{p}}_0+\mathring{k}_0+\mathring{\tilde{k}}_0)}{m_1\sqrt{2m_1}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}C_{n=\ell,\,m=1} - \sqrt{\ell(\ell+1)}C_{n=\ell,\,m=-1} + 2B\Big)\Big\}, \qquad /2.29/$$

$$V_{\ell,\ell+1/2}^{\ell+1/2} = 2\pi\Big\{\frac{\mathring{p}_0+\mathring{\tilde{p}}_0+\mathring{k}_0+\mathring{\tilde{k}}_0}{m_1\sqrt{2m_1}}\big(C_{n=\ell+1,\,m=1}+(\ell+1)(\ell+2)C_{n=\ell+1,\,m=-1}\big) \qquad /2.30/$$

$$V_{\ell\ell}^{\ell-1/2} = 2\pi\ell\Big\{\frac{2[\mathring{p}_0(\mathring{p}_0+\mathring{\tilde{p}}_0+\mathring{k}_0+\mathring{\tilde{k}}_0)-2m_1^2]}{m_1\sqrt{2m_1}}A -$$

$$-\frac{(\mathring{p}_0+\mathring{\tilde{p}}_0+\mathring{k}_0+\mathring{\tilde{k}}_0)}{m_1\sqrt{2m_1}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}C_{n=\ell,\,m=1} - \sqrt{\ell(\ell+1)}C_{n=\ell,\,m=-1} - 2B\Big)\Big\},- \qquad /2.31/$$

$$V_{\ell,\ell-1}^{\ell-1/2} = -2\pi\Big\{\frac{\mathring{p}_0+\mathring{\tilde{p}}_0+\mathring{k}_0+\mathring{\tilde{k}}_0}{m_1\sqrt{2m_1}}\big(C_{n=\ell-1,\,m=1}+\ell(\ell-1)C_{n=\ell-1,\,m=-1}\big)\Big\}. \qquad /2.32/$$

При подстановке /2.29/-/2.32/ в /2.18/ мы получаем искомую систему парциальных уравнений. В нерелятивизме /точнее, квазирелятивизме, так как мы используем разложение квазипотенциала до порядка v^2/c^2 /, коэффициенты /2.32/ переходят в следующие выражения:

$$V_{\ell\ell}^{\ell+1/2} = 2\pi(\ell+1)\Big\{\frac{2}{c^2}\Big(1-\frac{m_2}{2m_1}\Big)A - 2\Big[4m_1m_2+(\mathring{p}^2+\mathring{k}^2)\Big(2+\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_2}{m_1}\Big)\frac{1}{c^2}\Big]B-$$

$$-2\Big(1+\frac{m_2}{m_1}\Big)\frac{1}{c^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}C_{n=\ell,\,m=1} - \sqrt{\ell(\ell+1)}C_{n=\ell,\,m=-1}\Big)\Big\}, \qquad /2.33/$$

$$V_{\ell,\ell+1}^{\ell+1/2} = 2\pi\Big\{-2\Big(1+\frac{m_2}{m_1}\Big)\frac{1}{c^2}\big[C_{n=1+\ell,\,m=1}+(\ell+1)(\ell+2)C_{n=\ell+1,\,m=-1}\big]\Big\}, \qquad /2.34/$$

$$V_{\ell,\ell}^{\ell-1/2} = 2\pi\ell\Big\{\frac{2A}{c^2}\Big(1-\frac{m_2}{2m_1}\Big) - 2\Big[4m_1m_2+(\mathring{p}^2+\mathring{k}^2)\Big(2+\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_2}{m_1}\Big)\frac{1}{c^2}\Big]B +$$

$$+2\Big(1+\frac{m_2}{m_1}\Big)\frac{1}{c^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}C_{n=\ell,\,m=1} - \sqrt{\ell(\ell+1)}C_{n=\ell,\,m=-1}\Big)\Big\}, \qquad /2.35/$$

$$V_{\ell,\ell-1}^{\ell-1/2} = 2\pi\Big\{2\Big(1+\frac{m_2}{m_1}\Big)\frac{1}{c^2}\big(C_{n=\ell,\,m=1}+C_{n=\ell,\,m=-1}\sqrt{\ell(\ell+1)}\big)\Big\}. \qquad /2.36/$$

Величины A, B, C определены выражениями:

$$A = \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, P_\ell(\cos\theta) = \delta_{\ell 0}\cdot 2, \qquad /2.37/$$

$$B = \frac{1}{\mathring{k}\mathring{p}}\int_{-1}^{1} d\cos\theta \frac{P_\ell(\cos\theta)}{\gamma_{nonrel}-\cos\theta} = \frac{2}{\mathring{k}\mathring{p}}Q_\ell(\gamma_{nonrel}), \qquad /2.38/$$

$$C = \int_{-1}^{1} d\cos\theta \frac{\sin\theta}{\gamma_{nonrel}-\cos\theta}P_n^m(\cos\theta)\quad (n=\ell,\ \ell=\pm1,\ m=\pm1) = \qquad /2.39/$$

$$\begin{cases} -2(\gamma_{nonrel}^2-1)^{1/2}\, Q_n^1(\gamma_{nonrel}), & m=1, \\ -2(\gamma_{nonrel}^2-1)^{1/2}\, Q_n^{-1}(\gamma_{nonrel}), & m=-1. \end{cases}$$

Здесь $Q_n^m(x)$ - функция Лежандра II рода. Для численного решения уравнения /2.15/ осуществим, следуя [11], переход к параметризации через переменные быстроты /2.22/. Очевидно, по определению, что

$$|m_1 \mathrm{sh}\chi_p| = |m_2 \mathrm{sh}\tilde{\chi}_p|. \qquad /2.40/$$

Используя затем методику, предложенную в [8,9], получаем следующую систему уравнений для ВФ:

$$\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2}+\mathrm{sh}^2\chi_p}\left(\frac{M}{m_1}-\mathrm{ch}\chi_p-\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2}+\mathrm{sh}^2\chi_p}\right)\Phi_1(\chi_p)=$$

$$=\frac{\ell+1}{(2\pi)^2}V_0\left(2m_1\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)\left[2m_1\mathrm{sh}\chi_p\left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p}{2}-\mathrm{sh}\chi_p\mathrm{ch}\chi_p\right)\times\right.$$

$$\left.\times m_1\mathrm{ch}^2\left(\frac{\chi_p}{2}\right)+\frac{m_1^2\mathrm{sh}^2(\chi_p/2)+m_2^2}{m_2}-2m_1^2\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\mathrm{sh}\chi_p\right]\times$$

$$\times\int_0^\infty d\chi_k\,\chi_k P_\ell\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi}\right)\Phi_1(\chi_k)+$$

$$+\frac{\ell+1}{(2\pi)^2}V_0\left(2m_1\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)\left[4\left(m_1\mathrm{ch}^2\frac{\chi_p}{2}+\frac{m_1^2\mathrm{sh}^2(\chi_p/2)+m_2^2}{m_2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\int_0^\infty d\chi_k\,\chi_k\left[\frac{\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}(\chi_p/2)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}P_\ell^1\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)-\right.\qquad /2.41/$$

$$\left.-\sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}(\chi_p/2)}\,P_\ell^{-1}\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)\right]\Phi_1(\chi_k)+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}V_0\left(2m_1\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)\left[4\left(m_1\mathrm{ch}^2\left(\frac{\chi_p}{2}\right)+\frac{m_1^2}{m_2}\cdot\mathrm{sh}^2\left(\frac{\chi_p}{2}\right)+m_2\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\int_0^\infty\chi_k\,d\chi_k\left[\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)}P_{\ell+1}^1\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)}(\ell+1)(\ell+2)P_{\ell+1}^{-1}\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_p-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)\right]\Phi_2(\chi_k);$$

$$\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2}+\mathrm{sh}^2\chi_p}\left(\frac{M}{m_1}-\mathrm{ch}\chi_p-\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2}+\mathrm{sh}^2\chi_p}\right)\Phi_3(\chi_p)=$$

$$=\frac{\ell}{(2\pi)^2}V_0\left(2m_1\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)\left[2m_1\mathrm{ch}\chi_p\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)-\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(m_1\mathrm{ch}^2\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)+\frac{m_1^2\mathrm{sh}^2(\chi_p/2)+m_2^2}{m_2}\right)-2m_1^2\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\mathrm{sh}\chi_p\right]\times$$

$$\times\int\chi_k\,d\chi_k P_\ell\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)\Phi_3(\chi_k)+$$

$$+\frac{\ell}{(2\pi)^2}V_0\left(2m_1\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)\left[4\left(m_1\mathrm{ch}^2\frac{\chi_p}{2}+\frac{m_1^2\mathrm{sh}^2(\chi_p/2)+m_2^2}{m_2}\mathrm{sh}\frac{\chi_p}{2}\right]\times$$

$$\times\int_0^\infty d\chi_k\,\chi_k\left[P_\ell^1\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)\frac{\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}(\chi_p/2)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)}\sqrt{\ell(\ell+1)}\,P_\ell^{-1}\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)\right]\Phi_3(\chi_k)+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}V_0\left(2m_1\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right)\left[4\left(m_1\mathrm{ch}^2\left(\frac{\chi_p}{2}\right)+\frac{m_1^2}{m_2}\mathrm{sh}^2\left(\frac{\chi_p}{2}\right)+m_2\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\right]\times\qquad /2.42/$$

$$\times\int_0^\infty d\chi_k\,\chi_k\left[\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)}P_{\ell-1}^1\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\mathrm{ch}\chi_p\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)}\,\ell(\ell-1)P_{\ell-1}^{-1}\left(\mathrm{cth}\chi_p\,\mathrm{cth}\chi_k-\frac{\mathrm{cth}\chi_p}{\mathrm{sh}\chi_k}\right)\right]\Phi_4(\chi_k).$$

Здесь

$$\Psi_{\ell+1/2,\ell}(m_1\mathrm{ch}\chi_k)=\Phi_1(\chi_k),\quad\Psi_{\ell+1/2,\ell+1}(m_1\mathrm{ch}\chi_2)=\Phi_2(\chi_k),$$
$$\Psi_{\ell-1/2,\ell}(m_1\mathrm{ch}\chi_k)=\Phi_3(\chi_k),\quad\Psi_{\ell-1/2,\ell-1}(m_1\mathrm{ch}\chi_k)=\Phi_4(\chi_k).\qquad /2.43/$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе нами получено парциальное релятивистское одновременное уравнение для описания $(\pi\mu)$-атома и других составных систем, образованных из частиц со спином 1/2 и спина 0. Наличие довольно громоздких составляющих этого уравнения предполагает использование численных методов решения.

Авторы выражают благодарность В.И.Саврину, А.В.Сидорову и Ю.Н.Тюхтяеву за интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы обычным способом интегрирования алгебраических функций вычислим интегралы /2.25/-/2.27/:

$$\int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx\frac{x^2}{x^2-1}P_\ell(\gamma-\beta x^2) = \int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx\{\frac{(2\ell-1)(2\ell-3)\ldots3\cdot1}{\ell!}\times$$

$$\times[\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k+1}\cdot C_\ell^k\cdot\gamma^k\beta^{\ell-k}(\sum_{p=0}^{\ell-k}x^{2\ell-2k-2p})+$$

$$+\sum_{s=\ell-2,\ell-4,\ldots}\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\ell-k+1}B_\ell^sC_\ell^k\gamma^k\beta^{\ell-k}(\sum_{p=0}^{\ell-k}x^{2\ell-2k-2p})+$$

$$+\sum_{s=\ell-2,\ell-4\ldots}(B_\ell^s+1)\frac{1}{1-x^2}]\} =$$

$$=\int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx\,A_\ell\cdot\sum_{s=\ell,\ell-2,\ell-4\ldots}\{[1+B_\ell^s(\delta_{\ell,s}-1)]\times$$

$$\times[(\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\ell-k+1}C_\ell^k\cdot\gamma^k\beta^{\ell-k}\cdot\sum_{p=0}^{\ell-k}x^{2\ell-2n-2p})+\frac{1}{1-x^2}]\} = \qquad /П.1/$$

$$=A_\ell\sum_{s=\ell,\ell-2\ldots}(1-B^s(\delta_{\ell s}-1))\cdot\{[\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\ell-k+1}C_\ell^k\gamma^k\beta^{\ell-k}\times$$

$$\times\sum_{p=0}^{\ell-x}\frac{x^{2\ell-2k-2p+1}}{(2\ell-2k-2p+1)}]+\arcsin x\}\Big|_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} =$$

$$=A_\ell\sum_{s=\ell,\ell-2,\ldots}(1-B_\ell^s(\delta_{\ell s}-1))\{[\sum_{k=1}^{s}(-1)^{\ell-k+1}C_\ell^k\gamma^k\beta^{\ell-k}\times$$

Здесь

$$A_\ell=\frac{(2\ell-1)!_{(нечетн.)}}{\ell!};\quad B_n^m=\frac{n!(2n-m)!}{(n-m)!\,m!_{(четн.)}(2n-1)!_{(нечетн)}}. \qquad /П.2/$$

Можно увидеть, что второй интеграл /2.26/ весьма похож на /2.25/. Результат его интегрирования также похож на выражение /П.1/

$$B=-8p_0A+4(p_0+k_0)A'. \qquad /П.3/$$

Здесь A - результат интегрирования /2.25/, определенный /П.1/, A′ отличается от A лишь тем, что сумма по p идет от 1 до $\ell-k$.

Наконец, /2.27/ можно записать в виде следующего полинома:

$$m=-1:\quad \int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}}\frac{dx}{x^2-1}\sqrt{1-(\gamma-\beta x^2)^2}\,P^{-1}(\gamma-\beta x^2)= \qquad /П.4/$$

$$=\frac{(2n)!}{2\cdot n!(n-m)!}\times\int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx\frac{1}{x^2-1}F_n^{-1}(\gamma-\beta x^2),$$

где

$$F_n^{-1}(y)=y^{n+1}-\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}y^{n-1}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}y^{n-3}\ldots. \qquad /П.5/$$

Следовательно, интеграл в /П.4/ можно записать в виде:

$$\int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} dx\sum_{k=\ell+1,\ell-1,\ldots}\{\sum_{r=0}^{k}\cdot\sum_{s=0}^{2k-2r}\cdot\sum_{p=1}^{2k-2r-2s}(-1)^{3k-r+p+1}\cdot D_k\cdot C_k^r\times$$

$$\times C_{2k-2r}^s\beta^{4k-4r-2s}\gamma^s x^{4k-4r-2s-2p}+\frac{(-1)^{r+p+1}}{1-x^2}D_k\}=$$

$$=\sum_{k=n+1,n-1,\ldots}\{\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{2k-2r}\sum_{p=1}^{2k-2r-2s}(-1)^{3k-r+p+1}D_kC_k^rC_{2k-2n}^s\beta^{4k-4r-2s}\times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\ell-k} \frac{\left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}\right)^{2\ell-2k-2p+1} - \left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}\right)^{2\ell-2k-2p+1}}{(2\ell-2k-2p+1)} \Big] +$$

$$+ \arcsin\left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}\right) - \arcsin\left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}\right).$$

$$+\gamma^s \frac{\left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}\right)^{4k-4r-2s-2p+1} - \left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}\right)^{4k-4r-2s-2p+1}}{(4k-4r-2s-2p+1)} + (-1) \qquad D$$

/П.6/

$$+ (-1)^{r+p+1} D_k \left[\arcsin\left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}\right) - \arcsin\left(\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}\right)\right],$$

а для $m=1$ необходимо сосчитать интеграл:

$$\int\limits_{\mathrm{ch}\frac{\chi_p-\chi_k}{2}}^{\mathrm{ch}\frac{\chi_p+\chi_k}{2}} \frac{dx}{x^2-1}\left[1-(\gamma-\beta x^2)^2\right] F_h^1(\gamma-\beta x^2), \qquad /П.7/$$

где

$$F_n^1(y) = y^{\ell-1} - \frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2(2\ell-1)} y^{\ell-3} + \frac{(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)(\ell-4)}{2\cdot 4\cdot(2\ell-1)(2\ell-3)} y^{\ell-5} - \ldots$$

/П.8/

Вновь мы видим, что /П.7/ похоже на интеграл /П.4/ и может представиться в виде разности двух выражений, первое из которых отличается от /П.6/ тем, что сумма по k идет от $\ell-1$ и D_k заменяется на E_k, определенные выражением /П.10/, а второе полностью совпадает по своему виду с /П.6/. Везде выше:

$$D_k = \begin{cases} 1; & k=n+1 \\ \frac{(n+1)n}{2(2n-1)}; & k=n-1 \\ \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}; & k=n-3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \qquad /П.9/$$

$$E_k = \begin{cases} 1; & k=n-1 \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}; & k=n-3 \\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}; & k=n-5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \qquad /П.10/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов-Угрюмов В.Г., Никитин Ю.П., Сергеев Ф.М. Атомы и мезоны. Атомиздат, М., 1980; Бети С.Дж. ЭЧАЯ, 1982, т.13, № 1, с.164.
2. Wheeler L.A. Phys.Rev., 1947, vol.71, p.320; Fermi E., Teller E. Phys.Rev., 1947, vol.72, p.399.
3. Schwartz M. In: Proc. of XVIII Int. Conf. on High Energy Physics. Tbilisi, 1976. JINR, D1,2-14000, Dubna, 1977, vol.1, p.A7-30; Coames R. et al. Phys.Rev.Lett., 1976, vol.37, p.249.
4. Неменов Л.Л. В сб.: Труды Межд. школы молодых ученых по физике высоких энергий. Гомель, 1971. ОИЯИ, 2-6371, Дубна, 1972; ЯФ, 1972, т.15, № 5, с.1047; ЯФ, 1972, т.16, № 1, с.125.
5. Bar-Gadda V., Cho C.F. Phys.Lett., 1973, 46B, p.95; Cho C.F. Nuovo Cim., 1974, 23A, p.557.
6. Каримходжаев А., Фаустов Р.Н. ОИЯИ, Р2-11746, Дубна, 1978; ЯФ, 1979, т.29, № 2, с.463.
7. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, vol.29, p.380.
8. Линкевич А.Д., Саврин В.И., Скачков Н.Б. ЯФ, 1983, т.37, с.391.
9. Линкевич А.Д. и др. ОИЯИ, Р2-82-563, Дубна, 1982.
10. Скачков Н.Б. ТМФ, 1975, т.25, с.313.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. "Наука", М., 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1984 года.

Двоеглазов В.В., Скачков Н.Б. P2-84-383
Релятивистское ковариантное одновременное уравнение для описания $(\pi\mu)$-атома

Рассматривается релятивистское трехмерное квазипотенциальное уравнение, описывающее связанное состояние скалярной частицы /например, π-мезон/ и фермиона /мюон/. Изучена спиновая структура квазипотенциала взаимодействия в этой системе, найден вид парциального разложения такого квазипотенциала.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Dvoeglazov V.V., Skachkov N.B. P2-84-383
Relativistic Covariant Single-Time Equation for $(\pi\mu)$ Atom

A relativistic three-dimensional quasipotential equation is considered, which describes the bound state of a scalar particle (e.g., the pion) and a fermion (muon). The spin structure of the interaction quasipotential in such a system is studied, and the corresponding partial expansion is obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984