

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-84-329

С.В.Михайлов, А.В.Радюшкин

ЯДРО ЭВОЛЮЦИИ  
ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ПИОНА  
В СКАЛЯРНОЙ  $\varphi_{(6)}^3$  МОДЕЛИ:  
ДВУХПЕТЛЕВОЙ РАСЧЕТ

Направлено в журнал "Nuovo Cimento A"

1984

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Ядра эволюции играют важную роль при анализе как инклюзивных<sup>1,2/</sup>, так и эксклюзивных<sup>3/</sup> жестких процессов. Они описывают зависимость функций распределения партонов  $f(x, \mu^2)^{1,2/}$  и партоновых волновых функций  $\phi(x, \mu^2)^{3,4/}$  от ренормировочного параметра  $\mu$ . Хорошо известно, что для последовательного учета радиационных поправок необходимо знать эволюционные ядра по крайней мере в двухпетлевом приближении. Для инклюзивных процессов двухпетлевые расчеты были выполнены несколько лет тому назад<sup>5,6/</sup>. Вычисление ядер эволюции для эксклюзивных процессов является более сложной задачей и первый /пока единственный/ результат - двухпетлевое ядро эволюции для волновой функции пиона  $V(x, y)$  - был получен совсем недавно<sup>7-9/</sup>. Для последующих приложений к задаче о формфакторе пиона необходимо знать также и явный вид решений уравнения эволюции. Известно, что в низшем приближении эта задача сводится к нахождению собственных функций ядра  $V(x, y, g)$ , которыми, как оказалось, являются полиномы Гегенбауэра  $x \cdot (1-x) \times x C_n^{3/2}(2x-1)$ . Было обнаружено, однако, что в следующем порядке это утверждение несправедливо<sup>8,9/</sup>. Этот результат на самом деле был предсказан<sup>10/</sup> до того, как были выполнены расчеты<sup>7-9/</sup>. Предсказание основано на тесной связи между собственными функциями ядра  $V(x, y)$ , т.е. мультипликативно-перенормируемыми операторами и конформными операторами<sup>10-12/</sup>. Поскольку конформная инвариантность нарушается процедурой перенормировки /константы связи, например/, нет никаких оснований ожидать, что являющиеся конформно-инвариантными для свободных полей операторы окажутся мультипликативно-перенормируемыми на двухпетлевом уровне.

В настоящей работе нашей главной целью является изучение структуры вкладов, нарушающих мультипликативную перенормируемость конформных операторов в модели, основанной на теории  $\phi_{(6)}^3$  в пространстве-времени 6 измерений. Эта теория имеет много общего с более интересной в физическом отношении теорией - КХД в 4 измерениях. В частности, теория  $\phi_{(6)}^3$  перенормируема, а ее  $\beta$ -функция имеет структуру, сходную со структурой  $\beta_{\text{КХД}}$ . Кроме того, собственными функциями соответствующего 1-петлевого ядра эволюции  $V_0(x, y)$  являются те же полиномы  $C_n^{3/2}(2x-1)$ , что и в КХД. Правда, модель  $\phi_{(6)}^3$  не относится к калибровочным теориям, но в нашем случае это скорее ее достоинство, чем недостаток. Во-первых, число диаграмм, которые необходимо вычислять, меньше чем в КХД, во-вторых, вычисление каждой из них проще, и поэтому можно легко проследить происхождение каждого конкретного вклада.

Кроме того, в модели  $\phi_{(6)}^3$  мы можем исследовать эффекты, обусловленные перенормировками, в чистом виде, не осложненном нарушением конформной инвариантности калибровочными полями. В КХД эти два типа эффектов могут проявляться одновременно, и опыт, приобретенный при анализе теории  $\phi_{(6)}^3$ , может оказаться весьма полезным при их разделении.

Изложение материала построено следующим образом. В разделах 2, 3 описан метод расчета ядер эволюции. Метод является довольно общим и для применения его к КХД требуются лишь небольшие видоизменения. Поэтому материал этих разделов, как мы надеемся, представляет интерес и сам по себе, как педагогическое введение в методику расчета ядер эволюции. В разделе 4 обсуждается связь между ядрами для эксклюзивных и инклюзивных процессов. В пятом разделе обсуждается структура двухпетлевого ядра эволюции и решение уравнения эволюции. В заключении сформулированы основные выводы. Результаты расчетов для конкретных диаграмм вынесены в Приложение А. В Приложении Б собраны формулы перехода от "эксклюзивных" ядер к "инклюзивным".

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Модель. Рассмотрим вариант модели  $\phi_{(6)}^3$ , в которой  $N_f$  типов скалярных "кварков"  $\psi_i$  взаимодействуют /в пространстве-времени 6 измерений/ посредством обмена вещественным скалярным "глюонным" полем  $\phi$ :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g \sum_{i=1}^{N_f} \psi_i^* \psi_i \phi. \quad (2.1)$$

Эта модель, в частности, использовалась ранее при анализе формфакторов связанных состояний<sup>13/</sup>, а также в исследованиях аномальных размерностей и ядер, связанных с глубоконеупругим рассеянием<sup>14-17/</sup>. Теория с лагранжианом взаимодействия /2.1/ перенормируема, а при  $N_f=1$  и асимптотически свободна. Ее  $\beta$ -функция дается выражением

$$\beta(g) = \mu^2 \frac{dg^2}{d\mu^2} = -b_0 \cdot \frac{g^4}{(4\pi)^3} + O(g^6), \quad (2.2)$$

где  $b_0 = (2 - N_f)/3$ .

2.2. Волновая функция и ее эволюция. "Пионом" в рассматриваемой модели будем называть связанное состояние двух кварков  $\psi_i, \psi_j^*$  разных типов. Последнее требование соответствует тому, что в КХД  $\pi^+$ -мезон есть состояние  $\bar{d}u$  ( $\bar{u}d$ ). Для таких состояний запрещен переход в чисто глюонные состояния  $g, gg, ggg, \dots$ , что уменьшает число диаграмм, дающих вклад в  $V(x, y)$ , и упрощает

структуру  $V(x, y)$ . Заметим, что в данном случае  $N_f$  формально должно быть не меньше 2. Но поскольку в наших конкретных расчетах  $N_f$  фигурирует лишь как множитель, ассоциируемый с кварковыми петлями, ничто не мешает нам трактовать  $N_f$  как "свободный параметр", принимающий произвольные значения. Поэтому мы будем считать всегда, что либо  $b_0 > 0$ , либо /там, где это особо оговорено/  $b_0 = 0$ .

Волновую функцию  $\Phi(x, \mu^2)$  определим следующим образом /4.11/:

$$a_N(\mu^2) \equiv \int \Phi(x, \mu^2) x^N dx = \frac{i^N}{2(P_n)N} \langle 0 | \psi_2^* (\partial \vec{\partial})^N \psi_1 | P \rangle, \quad /2.3/$$

где  $\nu$  - некоторый светоподобный вектор ( $\nu^2 = 0$ ), обеспечивающий выделение симметричной бесследовой части локального оператора  $\psi_2^* \vec{\partial}_{\nu_1} \dots \vec{\partial}_{\nu_N} \psi_1$ ,  $|P\rangle$  - однопionное состояние с импульсом  $P$ , а  $\mu$  - ренормировочный параметр для составных операторов. Переменная  $x$  имеет смысл доли продольного импульса пиона, приходящейся в системе бесконечного импульса на кварк  $\psi_1$ .

Зависимость моментов  $a_N(\mu^2)$  от  $\mu^2$  описывается уравнением ренормгруппы /4.11/:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} a_N(\mu^2) = \sum_{k=0}^N Z_{Nk} a_k(\mu^2), \quad /2.4/$$

где  $Z_{Nk}$  - матрица аномальных размерностей.

Напомним, что матричные элементы операторов, соответствующие обкладкам с разными импульсами, например,  $\langle 0 | O^{(N)} | P \rangle$ , при перенормировке смешиваются с матричными элементами операторов, являющихся полными производными  $\partial^{N-k} O^{(k)}$  операторов  $\psi_2^* (\partial \vec{\partial})^k \psi_1$  /4.11/.

Объединяя выражения /2.3/, /2.4/, нетрудно получить уравнение эволюции для волновой функции пиона

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \Phi(x, \mu^2) = \int_0^1 V(x, y, g) \Phi(y, \mu^2) dy, \quad /2.5/$$

где  $V(x, y, g)$  - эволюционное ядро, связанное с матрицей  $Z_{Nk}$  соотношением

$$\int_0^1 V(x, y, g) x^N dx = \sum_{k=0}^N Z_{Nk}(g) \cdot y^k. \quad /2.6/$$

**2.3. Ядра эволюции для рассеяния вперед.** Более простыми объектами являются ядра Липатова-Алтарелли-Паризи /1,2/, описывающие эволюцию функций  $f(x, \mu^2)$ , связанных с матричными элементами, соответствующими рассеянию вперед. Функция  $f(x, \mu^2)$  определяется соотношением, аналогичным /2.3/:

$$M_N(\mu^2) \equiv \int_0^1 f(x, \mu^2) x^N dx = \frac{i^N}{2(P_n)N} \langle \vec{P} | \psi_2^* (\partial \vec{\partial})^N \psi_1 | P \rangle, \quad /2.7/$$

где  $|\vec{P}\rangle$  - состояние, также имеющее импульс  $P$ . В этом случае  $\langle \vec{P} | \partial^K O | P \rangle = 0$  и, следовательно, смешивание упомянутого выше типа отсутствует. Уравнение ренормгруппы имеет вид

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} M_N(\mu^2) = \gamma_N(g) M_N(\mu^2), \quad /2.8/$$

а эволюционное уравнение, вытекающее из /2.7/, /2.8/, можно записать как

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f(x, \mu^2) = \int \frac{P(x)}{y} \cdot f(y, \mu^2) \frac{dy}{y}, \quad /2.9/$$

где  $P(z)$  - функция, связанная с  $\gamma_N$  соотношением

$$\int_0^1 P(z) \cdot z^N \cdot dz = \gamma_N. \quad /2.10/$$

Используя тот факт, что  $Z_{NN} = \gamma_N$ , и формулы /2.6/, /2.10/, нетрудно вывести "редукционную формулу"

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} dN z^{-N-1} \left\{ \frac{1}{N!} \left( \frac{d}{dy} \right)^N \Big|_{y=0} \int_0^1 V(x, y) x^N dx \right\}, \quad /2.11/$$

АП

связывающую два типа эволюционных ядер. Символом "АП" в /2.11/ обозначена процедура аналитического продолжения в комплексную плоскость.

Формула /2.11/ дает возможность проверки результатов расчета для ядер  $V(x, y)$ , которые, как правило, гораздо труднее вычислить, чем  $P(z)$ . Для подобной проверки приходится одновременно вычислять  $V(x, y)$  и  $P(z)$ , поэтому в данной работе мы будем обсуждать двухпетлевой расчет как для  $V(x, y)$ , так и для  $P(z)$ . На самом деле используемый нами метод нетрудно сформулировать таким образом, чтобы он был применим к обоим ядрам.

**2.4. Диагонализация ядра  $V(x, y, g)$ .** В низшем /1-петлевом/ приближении уравнение эволюции /2.5/ имеет следующий вид /3.11/:

$$\phi_n(x, \mu^2) = a_n \left( \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n^{(0)}/b_0} x \cdot (1-x) \cdot C_n^{3/2}(2x-1), \quad /2.12/$$

где  $\gamma_n^{(0)}$  - коэффициент перед  $g^2/(4\pi)^2$  в аномальной размерности

$\gamma_n(g) = \gamma_n^{(0)} \cdot g^2/(4\pi)^2 + O(g^4)$ , а  $x \cdot (1-x) \cdot C_n^{3/2}(2x-1)$  - собственные функции 1-петлевого ядра, т.е. решения уравнения

$$\int_0^1 V_0(x, y) \phi_n(y) dy = \lambda_n \phi_n(x). \quad /2.13/$$

Пользуясь явным видом ядра  $V_0(x, y)$ /см. ниже, формула /3.6//, легко установить, что комбинация  $\vec{v}(x, y) = y \cdot (1-y) \cdot V_0(x, y)$

симметрична относительно замены  $x \leftrightarrow y$ :  $\bar{v}(x, y) = \bar{v}(y, x)$ . Отсюда следует, что функции  $\phi_n(y)/y \cdot (1-y)$  должны быть взаимно ортогональны на отрезке  $[0, 1]$  с весом  $y \cdot (1-y)$ , а таковыми являются полиномы Гегенбауэра  $C_n^{3/2}(2y-1)^{1/2}$ . Это означает, что гегенбауэровские моменты

$$G_N(\mu^2) = \int_0^1 \Phi(x, \mu^2) \cdot C_N^{3/2}(2x-1) dx, \quad /2.14/$$

в отличие от простых моментов /2.3/, в низшем приближении по  $g^2$  не смешиваются друг с другом. Иными словами, мультипликативно-перенормируемы в однопетлевом приближении являются операторы

$$C_n = \psi_2^* (\partial_+^*)^n C_n^{3/2} (\partial_+^* / \partial_+^*) \psi_1, \quad /2.15/$$

где  $\partial^* = \partial - \bar{\partial}$ ,  $\partial_+^* = \partial + \bar{\partial}$ . Известно также, что эти же операторы являются конформными в приближении свободных полей /12/. Учет взаимодействия, вообще говоря, нарушает конформную инвариантность. Но для теорий с фиксированной точкой /для которых  $g(\mu) \rightarrow g_\infty = \text{const} \neq 0$  при  $\mu \rightarrow \infty$ / конформные операторы известны и имеют вид  $C_n^{3/2 + O(g^2)}(2x-1)^{1/2}$ . Насколько нам известно, построением конформных тензоров или их обобщений для асимптотически свободных моделей теории поля пока никто не занимался. Неясно также, будут ли обладать свойством двухпетлевой мультипликативной перенормируемости операторы, являющиеся конформными операторами в 1-петлевом приближении. Иными словами, вопрос в том, сохраняется ли в высших порядках замеченный в низшем приближении параллелизм между конформной инвариантностью и мультипликативной перенормируемостью составных операторов.

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Расчет ядер эволюции в принципе совершенно аналогичен расчету аномальных размерностей /см., напр., /14,15,19/. Основное отличие заключается в замене фактора  $(kn)^N \rightarrow \delta(x - \frac{kn}{Pn})$  в вершине, сопоставляемой составному оператору, где  $k$  - импульс, по которому идет интегрирование. Дальнейшие этапы вычислений проиллюстрируем на простейших примерах.

**3.1. Однопетлевая треугольная диаграмма.** Рассмотрим диаграмму, показанную на рис.1. Соответствующий ей размерно-регуляризованный фейнмановский интеграл имеет следующий вид:

$$I_\epsilon(x, y, \rho, \mu^2) = i \int (\mu^2)^\epsilon \frac{d^{6-2\epsilon} k}{(2\pi)^{6-2\epsilon}} \frac{\delta(x - kn/Pn)}{k^2 \cdot (k-y \cdot P)^2 \cdot (k-\rho \cdot P)^2}, \quad /3.1/$$

где  $\rho=0$  для рассеяния вперед /т.е. для вклада в  $P(x/y)$  / и  $\rho=1$  для вклада в  $V(x,y)$ .

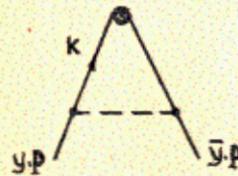


Рис.1. Однопетлевая треугольная диаграмма.

Для вычисления интеграла по  $k$  воспользуемся  $\alpha$ -представлением /11,20/:

$$\frac{1}{k_j^2 + i \cdot \epsilon} = -i \int_0^\infty d\alpha_j \exp\{i\alpha_j (k_j^2 + i \cdot \epsilon)\} \quad /3.2/$$

для всех пропагаторов, фигурирующих в /3.1/.

Аналогичное представление запишем и для вершинной  $\delta$ -функции:

$$\delta(x - \frac{kn}{Pn}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\alpha \exp\{i\alpha \cdot (x - \frac{kn}{Pn})\}. \quad /3.3/$$

Возникающие в результате интегралы по  $k$  имеют гауссовский вид и берутся стандартным образом. Вычисляя затем интегралы по  $\alpha$  и по  $\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  и дифференцируя результат по  $\ln \mu^2$ , получаем:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} I_\epsilon(x, y, \rho, \mu^2) = \alpha_s \cdot \int_0^1 \{d\beta_2 d\beta_3\} \cdot \delta(x - (y \cdot \beta_2 + \rho \cdot \beta_3)), \quad /3.4/$$

где  $\alpha_s = \frac{g^2}{(4\pi)^3}$ ,  $\{d\beta_2 d\beta_3\} = d\beta_2 d\beta_3 \theta(\beta_2 + \beta_3 \leq 1)$ .

Интегралы по  $\beta_j$  легко снимаются, и в результате мы получаем вклады диаграммы /рис.1/ в  $P(z)$  и  $V(x,y)$ :

$$P^{(1)}(z) \equiv \alpha_s \cdot P_0(z) = \alpha_s \cdot (1-z) \cdot \theta(0 \leq z \leq 1), \quad /3.5/$$

$$V^{(1)}(x, y) = \alpha_s \cdot V_0(x, y) = \alpha_s \cdot \left\{ \frac{x}{y} \cdot \theta(x < y) + \frac{1-x}{1-y} \cdot \theta(x > y) \right\}. \quad /3.6/$$

Для часто встречающихся в дальнейшем комбинаций  $1-x$ ,  $1-y$  мы будем пользоваться обозначениями  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ .

**3.2. Двухпетлевая перекрестно-лестничная диаграмма.** Теперь рассмотрим диаграмму, изображенную на рис.2а. Ее расчет упро-

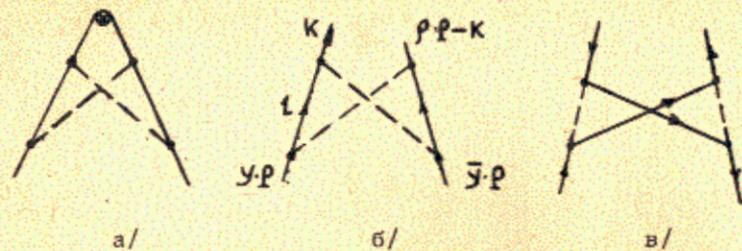


Рис.2. а/ Двухпетлевая перекрестно-лестничная диаграмма, вклад которого дается интегралом /3.7/. б/ Подграф, вклад которого дается интегралом /3.7/. в/ Альтернативная форма графического представления для диаграммы б/.

щается тем обстоятельством, что внутри нее нет расходящихся подграфов - она расходится только как целое. В связи с этим имеет смысл представить ее вклад в форме, наиболее близкой к вкладу диаграммы 1, т.е. трактовать  $D(k, \rho P - k, y \cdot P, (\rho - y) \cdot P)$  вклад подграфа, показанного на рис.2б, как эффективный пропагатор:

$$D(k, \rho \cdot P - k, y \cdot P, (\rho - y) \cdot P) = \frac{g^2}{(2\pi)^6} \cdot \int \frac{d^4 f}{\ell^2 (\ell - y \cdot P)^2 \cdot (\ell - k + (\rho - y) \cdot P)^2 \cdot (k - \ell)^2} \quad /3.7/$$

Используя  $\alpha$ -представление /3.2/ или фейнмановскую параметризацию, нетрудно получить, что

$$D(k, \rho \cdot P - k, y \cdot P, (\rho - y) \cdot P) = -i a_s \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta [(k - \omega \cdot P)^2]^{-1}, \quad /3.8/$$

где  $\omega = \xi \cdot y + \eta(\rho - y)$ . Это означает, что вклады диаграммы 2а/ в  $V(x, y)$  и  $P(z)$  даются формулами

$$V^{(2a)}(x, y) = a_s \cdot \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta V^{(1)}(x, \omega), \quad /3.9a/$$

$$P^{(2a)}(x/y) = a_s \cdot \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \frac{y}{\omega} P^{(1)}(x/\omega). \quad /3.9б/$$

Используя затем тождества

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \delta(\omega - \xi \cdot y - \eta \cdot \bar{y}) = V_0(\omega, y) + V_0(\omega, \bar{y}), \quad /3.10a/$$

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \delta(\omega - (\xi - \eta)/y) = \frac{1}{y} \cdot (P_0(\frac{\omega}{y}) + P_0(-\frac{\omega}{y})), \quad /3.10б/$$

можно представить  $V^{(2a)}$  и  $P^{(2a)}$  в виде суммы свертки 1-петлевых ядер  $V_0, P_0$ :

$$V^{(2a)}(x, y) = \int_0^1 d\omega V_0(x, \omega) [V_0(\omega, y) + V_0(\omega, \bar{y})] = V_0 \otimes V_0 + V_0 \otimes \bar{V}_0, /3.11a/$$

$$P^{(2a)}(\frac{x}{y}) = \int \frac{dv}{|x/y|} \cdot P_0(v) \cdot [P_0(\frac{x}{v \cdot y}) + P_0(-\frac{x}{v \cdot y})] = P_0 * P_0 + P_0 * \bar{P}_0, /3.11б/$$

где, по определению,  $\bar{V}_0(\omega, y) = V_0(\omega, \bar{y})$ ,  $\bar{P}_0(z) = P_0(-z)$ .

Нетрудно показать, что если ядро  $A(x, y)$  обладает тем свойством, что  $A(x, y) \cdot y \cdot \bar{y} = A(y, x) \cdot x \cdot \bar{x}$ , то и свертка  $B = A \otimes A$  также обладает этим свойством. Кроме того, если  $A(x, y) = A(\bar{x}, \bar{y})$  /как это имеет место для  $V_0(x, y)$  /, то упомянутым свойством обладает и свертка  $A \otimes \bar{A}$ . Это означает, что вклад  $V^{(2a)}(x, y)$  не нарушает мультипликативную перенормируемость операторов /2.15/.

Отметим также, что согласно /3.11б/, вклад диаграммы 2а в  $P(z)$  отличен от нуля как при положительных, так и при отрицательных  $z$ . Этот факт хорошо известен /5,19/ и природа его выяснена. Дело в том, что поскольку кварк с отрицательным импульсом можно трактовать как антикварк, отрицательно-частотную часть  $P^{(2a)}(z)$  вклада  $P^{(2a)}(z) = P^{(2a)}(z) \cdot \theta(z > 0) + P^{(2a)}(z) \cdot \theta(z < 0)$  естественно интерпретировать как вероятность нахождения антикварка  $\bar{q}$  в кварке  $q$  того же типа. Эта интерпретация становится особенно наглядной, если перерисовать диаграмму 2б так, как показано на рис.2в.

3.3. Диаграммы с собственно-энергетическими вставками. Следующая по сложности модификация глюонного пропагатора обусловлена собственно-энергетической вставкой в глюонную линию /рис.3/.



Рис.3. Двухпетлевая диаграмма с собственно-энергетической вставкой в глюонный пропагатор.

В этом случае, однако, необходимо аккуратно провести вычитание ультрафиолетовых расходимостей, поскольку диаграмма содержит расходящийся подграф. Необходимо, в частности, выбрать определенную ренормировочную схему. Мы будем придерживаться  $\overline{MS}$ -схемы /21/, наиболее часто используемой в двухпетлевых расчетах. По причинам, которые станут понятными ниже, в нашем случае удобно сначала выполнить все интегрирования и только потом провести перенормировку. Для этого нужно, чтобы расходимости, обусловленные интегрированием по  $\ell$ , можно было отличить от бесконечностей, связанных с интегрированием по  $k$  /обозначения даны на рис.3/. Это достигается, если параметры размерной регуляризации  $\delta, \epsilon$  для этих интегралов взять разными:

$$d^6 k \rightarrow N(\mu^2, \epsilon) d^{6-2\epsilon} k; \quad d^6 \ell \rightarrow N(\mu^2, \delta) d^{6-2\delta} \ell,$$

где  $N(\mu^2, \epsilon) \equiv (\pi \cdot \mu^2 e^{\gamma_E})^\epsilon$  - фактор, свойственный  $\overline{MS}$ -схеме<sup>/21/</sup>, а  $\gamma_E$  - константа Эйлера. Вычисляя регуляризованный интеграл по  $l$ , получим, что

$$\frac{1}{(k-y \cdot P)^2} \rightarrow \frac{K(\delta)}{\delta} \cdot \frac{(\mu^2)^\delta}{[(k-y \cdot P)^2]^{1+\delta}}; K(\delta) = -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{8}{3}\delta\right). \quad /3.12/$$

Иными словами, возникает зависящий от  $\delta$  фактор, а степенное поведение глюонного пропагатора претерпевает лишь небольшое изменение. В технике  $\alpha$ -представления это изменение может быть легко учтено, поскольку

$$\frac{1}{(k^2 + i\epsilon)^{1+\delta}} = \frac{(-i)^{1+\delta}}{\Gamma(1+\delta)} \cdot \int_0^\infty \alpha_j^\delta \cdot \exp[i\alpha_j (k_j^2 + i\epsilon)] d\alpha_j \quad /3.13/$$

/ср. с /3.12//, и вычисление регуляризованного вклада  $I_{\epsilon\delta}$  осуществляется стандартным образом. В результате

$$I_{\epsilon\delta} = \left(\frac{\mu^2}{P^2 x \bar{x}}\right)^{\epsilon+\delta} \frac{K(\delta)}{\delta(\epsilon+\delta)} e^{\gamma_E \cdot \epsilon} \frac{\Gamma(1+\epsilon+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} \int_0^1 \{d\beta_2 d\beta_3\} \beta_2^\delta \cdot \delta(x - (\beta_2 \cdot y + \beta_3 \cdot \rho)). \quad /3.14/$$

Заметим, что  $I_{\epsilon\delta}$  имеет вид  $I_{\epsilon\delta} = \mathcal{F}(\epsilon, \delta)/\delta$ , где  $\mathcal{F}(\epsilon, \delta)$  регулярно при  $\delta=0$ . Теперь необходимо вычистить полюс по  $\delta$ :

$$I_{\epsilon\delta} \rightarrow (\mathcal{F}(\epsilon, \delta) - \mathcal{F}(\epsilon, 0))/\delta \quad /3.15/$$

и затем положить  $\delta = \epsilon$ . Удвоенный коэффициент при  $1/\epsilon$  в разложении получившегося выражения в ряд Лорана и дает окончательный результат для вклада диаграммы 3 в  $P(x/y)/y$  /при  $\rho = 0$ / или в  $V(x, y)$  /при  $\rho = 1$ /. Отметим, что вклады, пропорциональные  $\ln(\mu^2/P^2 \cdot f(x, y))$  /возникающие из разложения множителя  $(\mu^2/P^2 \cdot f(x, y))^{\epsilon+\delta}$ /, сокращаются и не дают вклада в коэффициент при  $1/\epsilon$ . Этот факт является частным случаем известной теоремы<sup>/22,23/</sup>, гласящей, что все константы ренормировки в  $\overline{MS}$ -схемах<sup>/24/</sup> представляют собой полиномы по импульсным и массовым параметрам, членов типа  $\ln(\mu^2/P^2)$  они не содержат. Поэтому в нашем случае фактор  $(\mu^2/P^2 \cdot f(x, y))^{\epsilon+\delta}$  вполне можно заменить единицей.

Представляют интерес также и явные выражения для интеграла по  $\beta$ -параметрам в /3.14/. При  $\rho = 1$  этот интеграл равен

$$I_\delta(x, y, \rho = 1) = \int_0^1 \{d\beta_2 d\beta_3\} \cdot \beta_2^\delta \cdot \delta(x - \beta_2 \cdot y - \beta_3) = \frac{1}{1+\delta} \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1+\delta} \cdot \theta(x < y) + x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y} \right], \quad /3.16/$$

а при  $\rho = 0$

$$I_\delta(x, y, \rho = 0) = \int_0^1 \{d\beta_2 d\beta_3\} \cdot \beta_2^\delta \cdot \delta(x - \beta_2 \cdot y) = \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\delta \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \theta(x < y). \quad /3.17/$$

Заметим, что из формул /3.16/, /3.17/ следует соотношение

$$V^{(3)}(x, y) = \theta(x < y) \cdot \int_0^{x/y} \frac{P^{(3)}(z)}{1-z} dz + (x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}). \quad /3.18/$$

позволяющее вычислить  $V^{(3)}(x, y)$  при условии, что вклад  $P^{(3)}(z)$  известен. Подчеркнем, что соотношение /3.18/ выполняется только благодаря тому, что рецепт перенормировки для обоих ядер /V и P/ один и тот же, а коэффициент перед интегралом по  $\beta_j$  в формуле /3.14/ зависит от  $\rho$  только через фактор  $(\mu^2/P^2 \cdot f(x, y, \rho))^{\epsilon+\delta}$ , не влияющий на величину  $V^{(3)}(x, y)$  и  $P^{(3)}(x/y)$ .

Следует отметить также, что соотношение /3.18/ выполняется на самом деле для треугольной диаграммы с произвольной /многопетлевой/ собственно-энергетической вставкой в глюонный пропагатор. Действительно, все изменения для такой диаграммы в формулах /3.12/-/3.14/ сводятся к замене  $\delta$  на сумму параметров  $\delta_j$ , соответствующих внутренним петлям собственно-энергетического подграфа, а функция  $K(\delta)$  заменяется некоторой функцией параметров  $\delta_j$ . Фактор  $(\mu^2/P^2 \cdot f(x, y, \rho))^{\epsilon+\sum \delta_j}$  можно в силу теоремы<sup>/22,23/</sup> заменить единицей, после чего регуляризованные выражения будут, очевидно, удовлетворять формуле /3.18/. Кроме того, поскольку рецепт извлечения ядер из соответствующих регуляризованных выражений не зависит от  $\rho$ , формула /3.18/ будет справедлива и для самих ядер.

Вернемся к формуле /3.16/. После того как произведены необходимые вычитания /см. /3.15//, из /3.16/ появляются вклады, пропорциональные ядру V'

$$V'(x, y) = \left[ \frac{x}{y} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \theta(x < y) + \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \cdot \ln\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \cdot \theta(x > y) \right], \quad /3.19a/$$

являющемуся производной по  $\delta$  от ядра  $V_\delta(x, y)$  при  $\delta=0$

$$V_\delta(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1+\delta} \theta(x < y) + \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right)^{1+\delta} \theta(x > y). \quad /3.19b/$$

Легко убедиться, что комбинация  $V'(x, y) \cdot \bar{y} \cdot y$  несимметрична относительно замены  $x \leftrightarrow y$ , и, следовательно, вклад диаграммы 3, т.е. перенормировка глюонного пропагатора в 1-петлевом приближении, нарушает мультипликативную перенормируемость операторов /2.15/.

Логарифмические факторы  $\ln(x/y)$ ,  $\ln(\bar{x}/\bar{y})$  в /3.19/, очевидно, находятся в однозначном соответствии с фактором  $\ln[(k-y \cdot P)^2/\mu^2]$ , имеющимся в перенормированном глюонном пропагаторе /3.12/. Такие факторы, в свою очередь, генерируют бегущую константу связи:

$$g^2(\mu^2) \rightarrow \bar{g}^2(q^2) = g^2(\mu^2) \cdot \left\{ 1 - \frac{g^2(\mu^2)}{(4\pi)^3} \cdot b_0 \cdot \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) + \dots \right\}, \quad /3.20/$$

где  $q^2 = (k-y \cdot P)^2$ . Отметим, что диаграмма, изображенная на рис. 3,

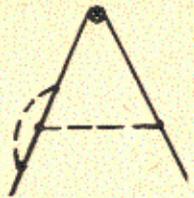


Рис.4. Двухпетлевая диаграмма, связанная с перенормировкой кварк-глюонной вершины.

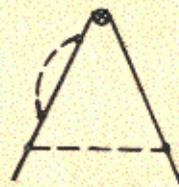


Рис.5. Двухпетлевая диаграмма с собственно-энергетической вставкой в кварковый пропагатор.

дает, очевидно, только пропорциональную  $N_f$  часть полного вклада. Другие члены из  $b_0$  даются диаграммами, связанными с перенормировкой кварк-глюонной вершины /рис.4/ и кваркового пропагатора /рис.5/. Эти диаграммы также содержат члены типа  $\ln(k-y \cdot P)^2$ , дающие вклады, пропорциональные  $V(x, y)$ . Их вычисление совершенно аналогично расчету диаграммы 3 и основано, по существу, на формуле для обобщенной треугольной диаграммы:

$$\int \frac{d^N k \cdot \delta(x - kn/Pn)}{(k^2 - m_1^2)^{n_1} \cdot [(k-a \cdot P)^2 - m_2^2]^{n_2} \cdot [(k-b \cdot P)^2 - m_3^2]^{n_3}} =$$

$$= i \frac{\Gamma(n_1 + n_2 + n_3 - N/2)}{\Gamma(n_1) \cdot \Gamma(n_2) \cdot \Gamma(n_3)} (-\pi)^{N/2} \int_0^1 \{d\beta_2 d\beta_3 (1 - \beta_2 - \beta_3)^{n_1-1} \beta_2^{n_2-1} \beta_3^{n_3-1} \times$$

$$\times \delta(x - a \cdot \beta_2 - b \cdot \beta_3) \cdot A^{(N/2 - n_1 - n_2 - n_3)}, \quad /3.21/$$

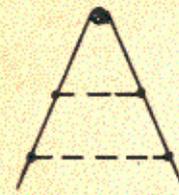
где  $A = P^2 \cdot [\beta_2 \cdot a + \beta_3 \cdot b - (\beta_2 \cdot a + \beta_3 \cdot b)^2] - \beta_2 \cdot m_2^2 - \beta_3 \cdot m_3^2 - (1 - \beta_2 - \beta_3) \cdot m_1^2$ , а массы  $m_1, m_2, m_3$  осуществляют инфракрасную регуляризацию интеграла в случаях, когда это необходимо.

Для диаграмм с собственно-энергетическими вставками в кварковый пропагатор /рис.5/ также существует соотношение между их вкладами в  $V(x, y)$  и  $P(z)$ :

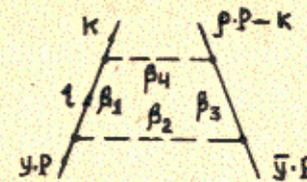
$$V^{(6)}(x, y) = \frac{1}{2} \theta(x < y) \cdot [P(x) \frac{1}{y} + P(\bar{x}) \frac{1}{y} - P(\frac{x}{y}) \frac{1}{y}] + \left( \begin{matrix} x \leftrightarrow \bar{x} \\ y \leftrightarrow \bar{y} \end{matrix} \right), \quad /3.22/$$

выполняющееся во всех порядках разложения по  $g^2$ . Его вывод аналогичен выводу формулы /3.18/. Заметим, что вклад простейшей треугольной диаграммы /3.5/, /3.6// удовлетворяет и интегральному /3.18/, и алгебраическому /3.22/ соотношениям.

3.4. Двухпетлевая лестничная диаграмма /рис.6/. Эта диаграмма внешне весьма похожа на диаграмму 2а. Она, однако, содержит расходящийся подграф. Поэтому для ее вычисления необходимо ком-



а/



б/

Рис.6. а/ Двухпетлевая лестничная диаграмма. б/ Фейнмановская параметризация для нижнего подграфа.

бинировать приемы, описанные в разд.3.2 и 3.3. Сначала вычисляется интеграл по  $\ell$ , регуляризованный  $\epsilon$ -сдвигом. Вводя фейнмановские параметры  $\beta_j$  как показано на рис.6б, и используя замену  $\beta_j = \lambda \cdot \gamma_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , находим следующее интегральное представление для нижнего подграфа, аналогичное /3.8/:

$$D(k, P - k, y \cdot P, \bar{y} \cdot P) = -i \Gamma(1 + \epsilon) \cdot \int_0^1 \{dy_2 dy_3\} \int_0^1 \frac{d\lambda \cdot \lambda^{1-\epsilon}}{[\bar{\lambda} \cdot (k - z \cdot P)^2 + m^2]^{1+\epsilon}}, \quad /3.23/$$

где  $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ ,  $z = \rho \cdot \gamma_2 + y \cdot \gamma_3$ . Чтобы избежать инфракрасных расходимостей, пропагаторы линий 1-3 взяты массивными, с одинаковой массой  $m$ . Оставшийся интеграл по  $k$ , регуляризованный  $\delta$ -сдвигом, вычисляется по формуле /3.21/, интеграл по  $\lambda$  дает фактор  $B(\delta, 2 - \epsilon)$  и в результате

$$I(\epsilon, \delta) = \frac{B(2 - \epsilon, \delta)}{(\epsilon + \delta) \cdot (1 - \delta)} \cdot \int_0^1 \{dy_2 dy_3\} \int_0^1 dz \cdot \delta(z - (\rho \cdot \gamma_2 + y \cdot \gamma_3)) \times$$

$$\times \left[ \left(\frac{x}{z}\right)^{1-\delta} \theta(x < z) + \left(\frac{\bar{x}}{z}\right)^{1-\delta} \theta(x > z) \right]. \quad /3.24/$$

Сделав необходимые вычитания и используя формулы /3.4/, /3.6/, /3.19/, /3.24/, можно представить вклад диаграммы 6а в  $V(x, y)$  в виде суммы двух свертки:

$$V^{(6a)}(x, y) = - \int_0^1 dz (V_0(x, z) + V'(x, z)) \cdot V_0(z, y) = -V_0 \otimes V_0 - V' \otimes V_0.$$

Вклад  $V_0 \otimes V_0$ , как мы установили при обсуждении диаграммы 2а, не нарушает мультипликативную перенормируемость операторов /2.15/, а вклад  $V' \otimes V_0$  - нарушает. Это нарушение обусловлено, очевидно, расходимостью верхнего подграфа диаграммы 6а, т.е. перенормировкой составного оператора.

#### 4. СВЯЗИ МЕЖДУ ДВУМЯ ТИПАМИ ЯДЕР

4.1. "Редукционные" формулы. Явные вычисления, как правило, все же довольно громоздки. Поэтому всегда полезно иметь способ проверки, позволяющий убедиться в правильности конечного резуль-

тата. Один из таких способов основан на формуле /2.11/, по которой из ядра  $V(x, y)$  можно вычислить ядро  $P(z)$ . Последнее можно вычислить независимым способом /эта процедура, естественно, проще, чем вычисление  $V(x, y)$ / и сравнить результаты, полученные двумя путями. Кроме того, некоторые ядра  $P(z)$  или их моменты  $y_N$  вычислялись ранее другими авторами /16, 17/.

Формула /2.11/, на первый взгляд, не выглядит удобной. Однако во многих случаях нет никакой необходимости проделывать все фигурирующие в ней операции. Рассмотрим простой пример:

$$v(x, y) = \mathcal{C}[\theta(x < y) \cdot f(\frac{x}{y}) / \bar{y}], \quad /4.1/$$

где  $\mathcal{C}$  обозначает операцию  $1 + (x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y})$ , а  $f(z)$  - некоторая функция. Представляя  $N$ -й момент по  $x$  функции  $v(x, y)$  в виде

$$\int_0^1 v(x, y) x^N dx = \frac{1}{\bar{y}} \cdot \int_0^y f(\frac{x}{y}) x^N dx + \frac{1}{y} \cdot \int_y^1 f(\frac{\bar{x}}{y}) x^N dx, \quad /4.2/$$

нетрудно установить, что первый член в правой части формулы /4.2/ не дает вклада в коэффициент при  $y^N$ , а вклад второго содержит член

$$-y^N \int_0^1 f(z) \cdot z^N dz, \quad /4.3/$$

откуда следует, что вкладу  $\mathcal{C}[\theta(x < y) \cdot f(x/y) / \bar{y}]$  в  $V(x, y)$  соответствует вклад  $-f(z)$  в  $P(z)$ . Аналогичным образом можно получить и другие редукционные формулы, приведенные в Приложении Б. Используя эти формулы, например, для вклада диаграммы ж/см. Приложение А/, получаем

$$\mathcal{C}[\theta(x < y) \cdot (\frac{1}{2} \frac{\bar{x}}{y} \cdot \ln^2(\bar{x}) - \frac{1}{2} \frac{x}{y} \cdot \ln^2 y + \frac{\bar{x}}{y} \cdot \ln(\bar{x}) + \frac{x}{y} \cdot \ln y + \frac{x}{y} \cdot \ln x \cdot \ln y + \frac{x}{y})] \Rightarrow 2\bar{z} + 2 \ln z + \frac{1}{2}(1+z) \cdot \ln^2 z, \quad /4.4/$$

т.е. вклад этой диаграммы в  $P(z)$ .

Для свертки типа  $A \otimes B$ , появляющихся во вкладах диаграмм 2а, 6а, редукционная формула имеет следующий вид:

$$A \otimes B \Rightarrow a * b, \quad /4.5/$$

где  $A \Rightarrow a, B \Rightarrow b$ /ср. с /3.11//.

4.2. "Нестандартные"  $\theta$ -функции. Обычно  $\theta$ -функции, присутствующие в  $V(x, y)$ , имеют форму  $\theta(x < y)$  и  $\theta(x > y)$ . Однако в перекрестно-лестничной диаграмме /рис.2а/ имеются "нестандартные"  $\theta(\bar{x} < y)$  и  $\theta(\bar{x} > y)$  вклады, обусловленные сверткой  $V_0 \otimes \bar{V}_0$  в /3.11а/. Присутствие подобных вкладов приводит к появлению в  $P(z)$  членов, пропорциональных  $(-)^N$ , которые сигнализируют, очевидно, о наличии "отрицательно-частотной" компоненты  $\theta(z < 0) \cdot P_{qq}(|z|)$  в  $P(z)$ :

$$P(z) = P_{qq}(z) \cdot \theta(z > 0) + P_{qq}(|z|) \cdot \theta(z < 0). \quad /4.6/$$

Таким образом, вклады со "стандартными"  $\theta$ -функциями редуцируются к ядру  $P_{qq}(z)$ , а с "нестандартными" - к ядру  $P_{qq}(|z|)$ . В последнем случае редукцию удобно выполнить следующим образом. Пусть вкладу

$$w(x, y) = \mathcal{C}[\theta(x < \bar{y}) \cdot v(x, y)] \quad /4.7/$$

соответствует матрица аномальных размерностей  $Z_{NK}$ . Определим функцию  $\bar{v}(x, y)$  соотношением  $\bar{v}(x, \bar{y}) = v(x, y)$ , а соответствующую ей матрицу аномальных размерностей обозначим  $\bar{Z}_{NK}$ :

$$\mathcal{C}[\theta(x < y) \bar{v}(x, y)] \rightarrow \bar{Z}_{NK}. \quad /4.8/$$

Тогда  $N$ -й момент по  $x$  от  $w(x, y)$  дается рядом по  $\bar{y}$ :

$$\int_0^1 \mathcal{C}[\theta(x < \bar{y}) \cdot \bar{v}(x, \bar{y})] x^N dx = \sum_{k=0}^N \bar{Z}_{NK} (\bar{y})^k, \quad /4.9/$$

откуда следует, что  $Z_{NN} = (-)^N \bar{Z}_{NN}$  и поэтому редукция от  $w(x, y)$  к  $P_{qq}$  задается редукционными формулами для ядра  $\mathcal{C}[\theta(x < y) \cdot \bar{v}(x, y)]$ , содержащего стандартные  $\theta$ -функции /ср. /3.11//.

## 5. ЯДРО В ДВУХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ И ПРОБЛЕМА ДИАГОНАЛИЗАЦИИ

5.1. Структура результата. Окончательное выражение для вклада, соответствующего сумме всех диаграмм Приложения А, имеет вид

$$V(x, y) = a_s \cdot [V(x, y) - \gamma_\psi \cdot \delta(y - x)] + a_s^2 \cdot V_1(x, y), \quad /5.1/$$

$$V_1(x, y) = \mathcal{C}[\theta(x < y) \cdot \{ \frac{x}{y} \cdot (\frac{13}{9} - \frac{5}{9} N_f) + \frac{1}{2} \ln(x) \cdot (\frac{\bar{x}}{y} + \frac{2}{3} \frac{\bar{x}}{y}) + \frac{1}{2} \ln y \cdot (\frac{x}{y} + \frac{2}{3} \frac{\bar{x}}{y}) - \frac{1}{3} \frac{y-x}{y \cdot \bar{y}} \cdot \ln(y-x) + [(b_0 + \gamma_\psi) \frac{x}{y} \cdot \ln(\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} \frac{x}{y} \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} \frac{x}{y} \cdot \ln^2(\frac{x}{y}) + \frac{1}{2} \frac{\bar{x}}{y} \cdot \ln^2(\bar{x})] \} -$$

$$- \mathcal{C}[\theta(x < \bar{y}) \cdot (\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cdot \ln(\bar{y}) + \frac{\bar{x}}{y} \cdot \ln(\bar{x})) + \delta(y - x) \cdot (\frac{25}{216} + \frac{7}{36} \cdot N_f)],$$

где  $\gamma_\psi = 1/8$  - коэффициент, определяющий аномальную размерность кварка  $\gamma(g)$  в 1-петлевом приближении:  $\gamma(g) = a_s \cdot \gamma_\psi$ .

Члены, нарушающие  $x \leftrightarrow y$  симметрию комбинации  $y \cdot \bar{y} \cdot V_1(x, y)$ , имеются только во вкладе с  $\theta(x < y)$ ; они заключены в квадратные скобки. При этом вклад, пропорциональный  $x/y \cdot \ln(x/y)$ , обусловлен аномальными размерностями кварковых и глюонных пропагаторов

/см. разд. 3.4/, т.е. диаграммами г)-е). Приложения А. Отметим, что поскольку перенормировка внешних линий /диагр. з), и), к)/ не дает  $\ln(x/y)$ -вкладов, суммарный коэффициент перед  $x/y \cdot \ln(x/y)$  в /5.2/ равен  $b_0 + \gamma_\psi$ , а не  $b_0$ . Остальные, нарушающие симметрию, члены обусловлены вкладом свертки  $V_0' \otimes V_0$  из диагр. ж)/см. разд. 3.5/. Таким образом,  $V(x, y)$  имеет следующую структуру:

$$V = \alpha_s \cdot V - \gamma(a) \cdot \delta(y-x) + \alpha_s^2 \cdot [V_1^{\text{СИММ}} + (b_0 + \gamma_\psi) \cdot V' - V' \otimes V_0]. \quad /5.3/$$

5.2. Решение уравнения эволюции с симметричным ядром. Рассмотрим сначала фиктивную ситуацию, когда в 2-петлевом ядре отсутствуют  $V'$  и  $V' \otimes V_0$  вклады. В этом случае функции

$$\Psi_n = x\bar{x} \cdot C_n^{3/2} (x - \bar{x}) \quad /5.4/$$

являются собственными функциями как 1-петлевого ядра  $V_0(x, y)$ , так и двухпетлевого  $V_1^{\text{СИММ}}(x, y)$ , и решение уравнения эволюции можно найти методом разделения переменных. Действительно, подставляя в /2.5/ комбинацию

$$\Phi_n(x, \mu^2) = A_n(L) \cdot \Psi_n(x), \quad /5.5/$$

где  $L = \ln(\mu^2/\Lambda^2)$ , приходим к уравнению

$$\frac{d}{dL} A_n = (\alpha_s(L) \cdot \gamma_n^{(0)} + \alpha_s^2(L) \cdot \gamma_n^{1(s)}) \cdot A_n(L), \quad /5.6/$$

решение которого в виде разложения по  $1/L$  хорошо известно /21/:

$$A_n(L) = a_n \cdot L^{-\gamma_n^{(0)}/b_0} \left[ 1 + \frac{1}{b_0 L} \cdot \left[ \frac{\gamma_n^{1(s)}}{b_0} - \frac{b_1}{b_0^2} \gamma_n^{(0)} \cdot (1 + \ln L) \right] + O\left(\frac{1}{L^2}\right) \right]. \quad /5.7/$$

При выводе /5.7/ было использовано разложение  $\alpha_s(L)$  по  $1/L$ :

$$\alpha_s(L) = \frac{1}{b_0 L} - \frac{b_1}{b_0^2} \frac{\ln L}{L^2} + O\left(\frac{1}{L^2}\right), \quad /5.8/$$

где  $b_1$  - второй коэффициент  $\beta$ -функции. Из /5.7/ с учетом /2.12/ и /5.5/ находим, что

$$\Phi_n = \phi_n + \frac{1}{b_0 L} \cdot \left[ \frac{1}{b_0} V_1^{\text{СИММ}} - \frac{b_1}{b_0^2} (1 + \ln L) \cdot V_0 \right] \otimes \phi_n = (1 + S(L)) \otimes \phi_n. \quad /5.9/$$

Выражение /5.9/ означает, что в рассматриваемом случае решения уравнения эволюции в 2-петлевом приближении получаются из 1-петлевого решения  $\phi_n$  действием на  $\phi_n$  некоторого универсального, не зависящего от  $n$  оператора  $(1 + S(L))$ . Отсюда следует,

что и для произвольного решения  $\Phi(x, \mu^2)$  уравнения эволюции /1.5/ в случае симметричного ядра  $V_1(x, y)$  справедливо соотношение

$$\Phi(x, \mu^2) = (1 + S(L)) \otimes \phi(x, \mu^2), \quad /5.10/$$

где  $\phi(x, \mu^2)$  - решение этого уравнения в 1-петлевом /т.е. главном логарифмическом/ приближении.

Заметим, однако, что представление /5.9/ ценно не столько тем, что оно вообще существует, а тем, что  $S(L)$  простым образом связано с известными ядрами  $V_1, V_0$ . На самом деле любая последовательность функций  $\psi_n(x)$ , разложимых в ряд по полной системе ортогональных полиномов  $\phi_n(x)$ :

$$\psi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \phi_k(x), \quad /5.11/$$

представима в виде свертки типа /5.9/, /5.10/:

$$\psi_n(x) = \int_0^1 w(x, y) \cdot \phi_n(y) dy, \quad /5.12/$$

где  $w(x, y)$  - ядро, формально определяемое суммой

$$w(x, y) = \sum_{i,k} a_{ik} \bar{\phi}_i(y) \cdot \phi_k(x). \quad /5.13/$$

Здесь  $\bar{\phi}_i(y)$  полиномы, сопряженные  $\tilde{\phi}_i(x)$ :

$$\int_0^1 \bar{\phi}_i(x) \phi_n(x) dx = \delta_{ni}. \quad /5.14/$$

В нашем случае  $\tilde{\phi}_i(x) = C_i^{3/2} (x - \bar{x}) \cdot 4 \cdot (2i + 3) / (i + 1)(i + 2)$ .

5.3. Учет несимметричных членов. Вклад в /5.7/, пропорциональный  $\ln L/L$ , обусловлен, очевидно,  $O(\ln L/L^2)$  членом разложения /5.8/ для  $\alpha_s(L)$ , а поправки к  $\phi_n(x, \mu^2)$ , связанные собственно с 2-петлевым ядром, пропорциональны  $1/L$ . Исходя из этого, будем искать решение уравнения эволюции для ядра /5.3/ в виде

$$\Phi_n = (1 + S(L) + \frac{1}{b_0 L} \cdot W) \otimes \phi_n. \quad /5.15/$$

Подставляя /5.15/ в /2.5/, получаем следующее уравнение для ядра  $W$ :

$$b_0 W + [V_0, W] + V^{\text{NS}} = 0, \quad /5.16/$$

где  $V^{\text{NS}} = (b_0 + \gamma_\psi) V' - V' \otimes V_0$ . Знак  $\otimes$  здесь и в дальнейшем будем опускать, подразумевая, что умножение ядер задается формулой /3.25/. Формальное решение уравнения /5.16/ можно записать в виде:

$$W = W(V^{NS}) = \int_0^{\infty} e^{-(b_0 + V_0)t} V^{NS} e^{V_0 t} dt. \quad /5.17/$$

Представление /5.17/ справедливо, очевидно, и для ядер, коммутирующих с  $V_0$ . Заменяя, например,  $V^{NS} \rightarrow V_1^{SIMM}$  в /5.17/, получим  $W^S = V_1^{SIMM}/b_0$ , т.е. вклад, уже учтенный в  $S(L)$ . Специфика  $V^{NS}$  именно в том, что  $[V_0, V^{NS}] \neq 0$ . Чтобы выделить эту специфику в "чистом" виде, представим  $V^{NS}$  в виде суммы  $V^{NS} = V_D^{NS} + V_{ND}$ , где  $V_D^{NS}$  - ядро, коммутирующее с  $V_0$  и имеющее те же собственные значения, что и  $V^{NS}$ . В терминах матриц  $Z_{nk}$  в базисе  $\Psi_n$  /5.4/ это соответствует разбиению матрицы  $Z_{nk}$  на диагональную  $Z_{nk}^{(D)} = Z_{nn} \cdot \delta_{nk}$  и недиагональную  $Z_{nk}^{(ND)} = Z_{nk}(1 - \delta_{nk})$  части. После такого разбиения /5.17/ переходит в

$$W = \frac{V_D^{NS}}{b_0} + W(V_{ND}^{NS}). \quad /5.18/$$

Поскольку все собственные значения ядра  $W(V_{ND}^{NS})$  равны нулю, его роль сводится к "повороту" базиса /5.4/. Заметим далее, что  $V_{ND}^{NS} = (b_0 + \gamma\psi) V_{ND}' - V_{ND}' V_0$  и, следовательно, характер поворота определяется ядром  $V_{ND}'$ . Для этого ядра, исходя из того, что  $[V_0, V_{ND}'] = [V_0, V']$ , находим представление, аналогичное /5.17/:

$$V_{ND}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t} e^{-V_0 t} [V_0, V'] e^{V_0 t} dt. \quad /5.19/$$

5.4. Решение уравнения эволюции в случае  $b_0 = 0$ . К сожалению, для практических приложений представления /5.17/, /5.19/ не очень удобны: нахождение явного вида ядер  $W(V^{NS})$ ,  $V_{ND}'$  из /5.17/, /5.19/ является довольно сложной задачей. Тем не менее, техника, развитая выше, позволяет найти решения уравнения эволюции в методически важном случае  $b_0 = 0$ , т.е. в ситуации, когда нет перенормировки заряда:  $\alpha_s = \text{const}$ .

В случае, когда матрица  $Z_{nk}^{(1)}$  диагональна в  $\Psi_n$ -базисе, решение уравнения /5.6/ при  $\alpha_s = \text{const}$  имеет следующий вид:

$$\Phi_n^{(s)}(x, \mu^2) = a_n(\mu_0^2) \cdot \left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)^{\alpha_s \cdot \gamma_n^{(0)} + \alpha_s^2 \cdot \gamma_n^{(1)}} \Psi_n(x). \quad /5.20/$$

Для ядра с недиагональной матрицей  $Z_{nk}^{(1)}$  будем искать решение в виде

$$\Phi_n(x, \mu^2) = (1 + \alpha_s \cdot W) \Phi_n^{(s)}(x, \mu^2). \quad /5.21/$$

Подставляя /5.21/ в уравнение эволюции и принимая во внимание /5.3/, находим, что  $W$  должно удовлетворять уравнению

$$[V_0, W] - V_{ND}' \cdot (V_0 - \gamma\psi) = 0. \quad /5.22/$$

Используем теперь тот факт, что ядро  $V'$  представляет собой производную по  $\nu$  от ядра  $V_\nu$  /3.196/, собственными функциями которого являются функции

$$\Psi_n^\nu(x) = (\bar{x}\bar{x})^{1+\nu} \cdot C_n^{3/2+\nu}(x-\bar{x}) \equiv \Psi_n(x) + \nu \cdot \Psi_n'(x) + O(\nu^2) = (1+\nu \cdot w) \Psi_n + O(\nu^2). \quad /5.23/$$

Этот факт следует из того, что комбинация  $v_\nu(x, y) = (y\bar{y})^{1+\nu} \cdot V_\nu(x, y)$  симметрична относительно замены  $x \leftrightarrow y$ . Введенное в /5.23/ ядро  $w$  генерирует сдвиг верхнего индекса функций  $\Psi_n^\nu$ . Записав для ядра  $V_\nu$  уравнение на собственные значения с точностью до членов  $O(\nu^2)$ :

$$(V_0 + \nu V') (1 + \nu \cdot w) \Psi_n = (\lambda_n^{(0)} + \nu \cdot \lambda_n^{(1)}) \cdot (1 + \nu \cdot w) \Psi_n. \quad /5.24/$$

находим уравнение на  $w$ :

$$([V_0, w] + V' - \lambda_n^{(1)}) \Psi_n = 0. \quad /5.25/$$

Выделяя из  $V'$  диагональную /в  $\Psi_n$ -базисе/ часть, получаем окончательное уравнение для  $w$ :

$$[V_0, w] + V_{ND}' = 0. \quad /5.26/$$

Сравнивая /5.22/ и /5.26/, получаем, что

$$(1 + \alpha_s \cdot W) \Psi_n = (1 - \alpha_s \cdot (\gamma_n^{(0)} - \gamma\psi) \cdot w) \Psi_n = (\bar{x}\bar{x})^{1-\alpha_s \cdot \gamma_0} C_n^{3/2-\alpha_s \cdot \gamma_0}(x-\bar{x}), \quad /5.27/$$

где  $\alpha_s \cdot \gamma_0 = \alpha_s \cdot (1/(n+1) \cdot (n+2) - 1/6)$  - 1-петлевая аномальная размерность оператора  $\hat{O}_n$  /2.15/.

Из /5.27/ следует, что при  $b_0 = 0$  мультипликативно-перенормируемыми будут операторы

$$\hat{O}_N = \psi_2^*(n\partial_+)^N C_N^{3/2-\alpha_s \cdot \gamma_0 N} (n\vec{\partial}/n\partial_+) \psi_1. \quad /5.28/$$

Подчеркнем, что конформно-инвариантные операторы /12/ имеют аналогичную структуру с единственным отличием: вместо  $\alpha_s \cdot \gamma_0 N$  в них фигурирует не зависящая от  $N$  константа  $\alpha_s \cdot \gamma\psi$  - аномальная размерность кваркового поля. Таким образом, в первом порядке по  $\alpha_s$  в теории, где  $b_0 = 0$ , требования конформной инвариантности и мультипликативной перенормируемости удовлетворяются различными наборами операторов: эквивалентность этих требований, наблюдавшаяся в низшем приближении, более не имеет места.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на примере модели  $\phi_{(6)}^3$  описана методика расчета эволюционных ядер  $V(x, y)$  и  $R(z)$ . Многие из предложенных в работе приемов применимы и в КХД при расчете эволюционных

ядер, проверке полученных результатов и выделении структур, нарушающих  $x \leftrightarrow y$  симметрию комбинации  $\bar{y} \cdot V(x, y)$ . В частности, все редукционные формулы /см. Приложение Б/ применимы для проверки КХД-расчетов. Для обобщенно-треугольных диаграмм в КХД, как и в модели  $\phi^3$ , справедливы формулы типа /3.18/, /3.22/, выражающие  $V(x, y)$  через  $P(z)$ .

Одним из основных результатов работы является нахождение явного вида /5.28/ мультипликативно-перенормируемых операторов для случая  $b_0 = 0$ . Важной задачей на будущее является обобщение этого результата на случай  $b_0 \neq 0$ , а также нахождение явного вида ядер  $V'_{ND}$  /5.19/ и  $W(V'_{ND})$  /5.17/. Решение этой задачи позволит вплотную подойти к главной задаче - применению развитого в данной работе аппарата к анализу 2-петлевого ядра эволюции в КХД.

Мы благодарны Ф.-М.Диттесу за полезные обсуждения на ранних стадиях работы. Один из нас /А.Р./ признателен Н.С.Крейги и В.К.Добреву за обсуждение свойств конформных тензоров.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом приложении приведены результаты для вкладов отдельных диаграмм в  $V(x, y)$ ,  $P(z)$  и  $\gamma_n$  /"З.С" означает "зеркально-сопряженный"/.

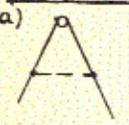
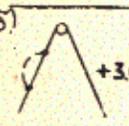
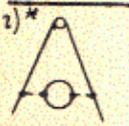
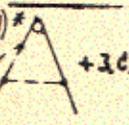
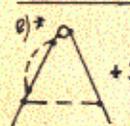
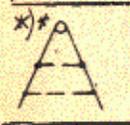
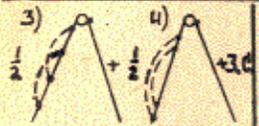
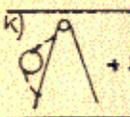
Диаграмма	$V(x, y)$	$P(z)$	$\gamma_n$
	$C[\theta(x < y) \cdot \frac{x}{y}]$	$\bar{z}$	$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
	$+\frac{1}{6} \delta(y-x)$	$-\frac{1}{6} \delta(1-x)$	$-\frac{1}{6}$
	$-C[\theta(x < y) \cdot (\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \ln y + \frac{x}{y} \ln \bar{x})]$	$-(2\bar{z} + (1+z) \ln z)$	$\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$
	$-C[\theta(x < y) \cdot \frac{N_f}{3} \cdot \frac{x}{y} \cdot (\frac{x}{y} + \ln(\frac{x}{y}))]$	$-\frac{N_f}{3} \bar{z} \cdot (\frac{x}{y} + \ln \bar{z})$	$-\frac{N_f}{3} \cdot (\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2})$
	$\frac{1}{2} C[\theta(x < y) \cdot [4 \frac{x}{y} + 2 \frac{x}{y} \ln(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y} \ln y + \frac{x}{y} \ln \bar{x} - \frac{x}{y} \cdot (1 - \frac{x}{y}) \cdot \ln(1 - \frac{x}{y})]]$	$3\bar{z} + \bar{z} \ln \bar{z} + \ln z$	$\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} - \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{S_1(n)}{n+2} - \frac{S_1(n)}{n+1}$

Диаграмма	$V(x, y)$	$P(z)$	$\gamma_n$
	$\frac{1}{6} C[\theta(x < y) \cdot (\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \ln x + \frac{x}{y} \ln \bar{x} - \frac{x}{y} \cdot (1 - \frac{x}{y}) \cdot \ln(1 - \frac{x}{y}))]$	$-\frac{1}{3} \bar{z} \cdot (\frac{x}{y} + \ln \bar{z})$	$-\frac{1}{3} [\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{S_1(n+2)}{n+2} - \frac{S_1(n+1)}{n+1}]$
	$C[\theta(x < y) \cdot (\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \ln y + \frac{x}{y} \ln \bar{x} - \frac{x}{2y} \ln^2 \bar{x})]$	$2\bar{z} + 2 \ln z + \frac{1}{2} (1+z) \ln^2 z$	$\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$
	$\frac{25}{216} \delta(y-x)$	$\frac{25}{216} \delta(1-x)$	$\frac{25}{216}$
	$+\frac{N_f}{36} \delta(y-x)$	$+\frac{N_f}{36} \delta(1-x)$	$+\frac{N_f}{36}$

Здесь  $S_1(n) = n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+n)}$

x/ Результат для  $P(z)$  не согласуется с соответствующим результатом работы /16/.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Ниже приведены редукционные формулы для перехода  $V(x, y) \rightarrow P(z)$ , позволяющие осуществить проверку результатов для диаграмм Приложения А.

- $C[\theta(x < y) p(\frac{x}{y})] \rightarrow p(z) \cdot \bar{z}$ ,
- $C[\frac{1}{y} p(x)] \rightarrow p(z)$ ;  $C[\frac{1}{y} p(x)] \rightarrow p(\bar{z})$ ,
- $C[\theta(x < y) \frac{1}{y} p(\frac{x}{y})] \rightarrow -p(z)$ ,
- $C[\theta(x < y) \frac{x}{y} \cdot f(\bar{x})] \rightarrow z \cdot f(z)$ ; если  $f(\bar{x}) = x$  при малых  $x$ ,
- $C[\theta(x < y) \frac{x}{y} \ln x \cdot \ln y] \rightarrow \bar{z} \cdot (\ln \bar{z} - 1) - \int \frac{dt}{t} \ln(1-t)$ ,
- $-C[\theta(x < y) \cdot \frac{x}{y} \cdot \ln^2 y] \rightarrow \ln^2 z + 2 \cdot \int \frac{dt}{t} \ln(1-t) + 2\bar{z}(\ln z - \ln \bar{z} + 1)$ ,
- $C[\theta(x < y) \cdot \frac{x}{y} \cdot \ln y] \rightarrow \bar{z} + \ln z$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Липатов Л.Н. ЯФ, 1974, 20, с.181.
2. Altarelli G., Parisi G. Nucl.Phys., 1977, B126, p.298.
3. Brodsky S.J., Lepage G.P. Phys.Lett., 1979, 87B, p.359.
4. Радюшкин А.В. ОИЯИ, P2-10717, Дубна, 1977.
5. Curci G., Furmanski W., Petronzio R. Nucl.Phys., 1980, B175, p.27.
6. Floratos E.G., Lacaze R., Kounnas C. Phys.Lett., 1981, 98B, p.89.
7. Sarmadi M.H. PITT-82-10, Pittsburgh, 1982.
8. Dittes F.-M., Radyushkin A.V. Phys.Lett., 1984, 134B, p.359.
9. Михайлов С.В., Радюшкин А.В. ОИЯИ, P2-83-721, Дубна, 1983.
10. Migdal A.A. Ann.of Phys., 1977, 109, p.365.
11. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. ТМФ, 1980, 42, с.147; Efremov A.V., Radyushkin A.V. Phys.Lett., 1980, 94B, p.245.
12. Craigie N.S., Dobrev V.K., Todorov I.T. ICTP IC/83/55, Trieste, 1983.
13. Efremov A.V., Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. Nuovo Cim., 1983, 76A, p.122.
14. Kazakov D.I. et al. JINR, E2-8085, Dubna, 1974.
15. Macfarlane A.J., Woo G. Nucl.Phys., 1974, B77, p.91.
16. Baulieu L., Floratos E.G., Kounnas C. Nucl.Phys., 1980, B166, p.322.
17. Kubota T. Nucl.Phys., 1980, B165, p.277.
18. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill, NY, 1953, vol.2.
19. Ross D.A., Sachrajda C.T. Nucl.Phys., 1979, B149, p.497.
20. Chisholm R. Proc.Cambr.Phys.Soc., 1952, 48, p.300.
21. Bardeen W.A. et al. Phys.Rev.D, 1978, 18, p.3938.
22. Speer E. J.Math.Phys., 1974, 15, p.1.
23. Collins J.C. Nucl.Phys., 1974, B80, p.341.
24. 't Hooft G. Nucl.Phys., 1973, B61, p.455.

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 мая 1984 года.

Михайлов С.В., Радюшкин А.В.

P2-84-329

Ядро эволюции для волновой функции пиона  
в скалярной  $\phi^3(\theta)$  модели: двухпетлевой расчет

На примере модели  $\phi^3(\theta)$  исследована структура ядер эволюции  $V(x,y)$  и  $P(x)$  в 2-петлевом приближении. В случае  $b_0 = 0$  /соответствующем отсутствию перенормировки заряда в 1-петлевом приближении/ найден явный вид мультипликативно-перенормируемых составных операторов. Показано, что последние не совпадают с конформными тензорами, хотя и имеют сходную структуру.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Михайлов С.В., Радюшкин А.В.

P2-84-329

