2/VII-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-265

А.Д.Донков, Р.М.Ибадов, В.Г.Кадышевский,
М.Д.Матеев, М.В.Чижов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И НОВЫЙ УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАСШТАБ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Поля Дирака

Направлено в журнал "Nuclear Physics B"

1984

§I. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Настоящая статья продолжает цикл наших исследований /1,2/, посвященных разработке квантовой теории поля (КТП) с неевклидовым импульсным пространством. Напомним, что радиус кривизны M этого пространства – фундаментальная масса – определяет предельно допустимую величину массы элементарной частицы (ср. /3/) и одновременно выступает как новый универсальный масштаб в области больших энергий и импульсов. Таким образом, данная схема нацелена на то, чтобы углубить существующие представления о свойствах и взаимодействиях частиц и создать новую, возможно, более адекватную теоретическую основу для физики сверхвысоких энергий. Переход к стандартной КТП, оперирующей с малыми, по сравнению с M, энергиями и импульсами, формально осуществляется при $M\to\infty$ и называется плоским пределом.

В работе /1/ была построена скалярная модель новой неевклидовой КТП, в /2/ – развито соответствующее обобщение теории калибровочных векторных полей. Теперь речь пойдет об описании фермионных полей в новом подходе. При этом, сохраняя преемственность с /1,2/, мы будем исходить из евклидовой формулировки свободной теории Дирака. При ссылках на формулы из /1,2/ к их номерам будут добавляться римские цифры I или II.

Как будет видно из дальнейшего, теория фермионного поля, основанная на концепции фундаментальной массы, оказывается значительно более содержательной, чем ее "плоский прототип", что, возможно, открывает новые перспективы перед теорией элементарных частиц в целом.

§2. ЕВКЛИДОВА ФЕРМИОННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ФОРМУЛИРОВКЕ ШВИНГЕРА

Математически корректное описание евклидова ферми-поля, как давно отметил Швингер /4/, может быть достигнуто лишь в терминах 8-компонентных спиноров (см. также /5/). Требуемое удвоение числа спинорных компонент естественно возникает уже в релятивистской формулировке, если учесть антикоммутативность ферми-полей /6/:

$$\{\psi_\alpha, \psi_\beta\} = \{\psi^+_\alpha, \psi^+_\beta\} = \{\psi_\alpha, \psi^+_\beta\} = 0 . \tag{2.1}$$

Действительно, рассмотрим стандартное выражение для действия свободного поля Дирака

$$S_0 = \int d^4x\ \bar\psi(x)\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi(x) = \tag{2.2}$$

$$= 2\pi \int d^4p\ \bar\psi(p)\left(p_\mu\gamma^\mu - m\right)\psi(p) ,$$

где принято, что

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx}\, \psi(p)\, d^4p ,$$

$$\bar\psi(x) = \psi^+(x)\gamma^0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx}\, \bar\psi(p)\, d^4p , \tag{2.3}$$

а относительно γ-матриц предполагается, как обычно,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} , \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1 , \tag{2.4}$$

$$\gamma^{\mu +} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 .$$

Принимая во внимание (2.1), действие (2.2) можно представить в виде

$$S_0 = \pi \int \begin{pmatrix} \psi(-p) \\ \psi^+(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -[-p_\mu(\gamma^0\gamma^\mu)^T - m\gamma^{0T}] \\ p_\mu\gamma^0\gamma^\mu - m\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi^+(-p) \end{pmatrix} d^4p \tag{2.5}$$

(значок T соответствует операции транспонирования). Полагая в (2.5)

$$\psi(p) = \frac{\psi_1(p) + i\,\psi_2(p)}{\sqrt2} ,$$

$$\Psi^+(p) = \frac{\psi_1(-p) - i\,\psi_2(-p)}{\sqrt{2}}\ , \qquad (2.6)$$

получим после несложных преобразований:

$$S_0 = \pi\int \Psi^T(-p)\left\{\frac{p_\mu\gamma^0\gamma^\mu - m\gamma^0 + \left[p_\mu(\gamma^0\gamma^\mu)^T + m\gamma^{0T}\right]}{2}\otimes\sigma_0 - \right. \qquad (2.7)$$

$$\left. - \frac{p_\mu\gamma^0\gamma^\mu - m\gamma^0 - \left[p_\mu(\gamma^0\gamma^\mu)^T + m\gamma^{0T}\right]}{2}\otimes\sigma_2\right\}\Psi(p)\,d^4p\ ,$$

где

$$\Psi(p) = \begin{pmatrix}\psi_1(p)\\ \psi_2(p)\end{pmatrix},\quad \sigma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Если использовать обозначения

$$\frac{\gamma^0 - \gamma^{0T}}{2}\otimes\sigma_0 - \frac{\gamma^0 + \gamma^{0T}}{2}\otimes\sigma_2 = \Gamma^0,$$

$$\frac{\gamma^0\gamma^k + (\gamma^0\gamma^k)^T}{2}\otimes\sigma_0 - \frac{\gamma^0\gamma^k - (\gamma^0\gamma^k)^T}{2}\otimes\sigma_2 = \Gamma^0\Gamma^k,\quad k=1,2,3, \qquad (2.9)$$

то действие (2.7) можно записать так:

$$S_0 = \pi\int\Psi^T(-p)\left(p^0 - \vec{p}\,(\Gamma^0\vec{\Gamma}) - \Gamma^0 m\right)\Psi(p)\,d^4p =$$

$$= \frac{1}{2}\int\Psi^T(x)\,\Gamma^0\left(i\Gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\Psi(x)\,d^4x\ . \qquad (2.10)$$

Применяя (2.4), легко убедиться, что независимо от конкретного представления γ-матриц, (8x8)-матрицы $\Gamma^\mu = \{\Gamma^0, \vec{\Gamma}\}$ тоже удовлетво-

ряют соотношениям (2.4). Кроме того, с помощью (2.9) находим, что

$$(\Gamma^\mu)^T = -\Gamma^0\Gamma^\mu\Gamma^0\ .$$

Следовательно, в данном представлении для генераторов лоренцевских преобразований $M^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$ справедливо соотношение

$$(M^{\mu\nu})^T = -\Gamma^0 M^{\mu\nu}\Gamma^0,$$

которое гарантирует релятивистскую инвариантность действия S_0, записанного в форме (2.10).

Отметим также, что в силу (2.6) калибровочным $U(1)$-преобразованиям исходных четырехкомпонентных полей

$$\psi \to e^{ie\lambda}\psi\ ,$$

$$\psi^+ \to e^{-ie\lambda}\psi^+,\qquad (e\ \text{-электрический заряд})$$

отвечает следующее преобразование 8-компонентных спиноров Ψ и Ψ^T:

$$\Psi \to e^{-ie\lambda q}\,\Psi\ ,$$

$$\Psi^T \to \Psi^T e^{ie\lambda q}\ , \qquad (2.11)$$

где зарядовая матрица q имеет вид

$$q = -q^T = \begin{pmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & \sigma_0\end{pmatrix}\otimes\sigma_2\ . \qquad (2.12)$$

Выражение (2.10) для S_0 служит в [4] отправным пунктом при переходе к евклидовой формулировке теории Дирака. Необходимо подчеркнуть, что процедура "евклидова разворота"[6] в данном случае не сводится только к замене[*]

$$x^0 \to -i\,x^4\ ,$$

$$p^0 \to -i\,p^4\ , \qquad (2.13)$$

---

[*] Ко- и контравариантные компоненты евклидовых 4-векторов у нас отличаются знаком:

$$x^m = \{\vec{x}, x^4\} = g^{mn}x_n = -x_m\ ,\quad p^m = \{\vec{p}, p^4\} = g^{mn}p_n = -p_m\ ;$$

$$g^{mn} = g_{mn} = -\delta_{mn}\ .$$

Это связано с пятимерной трактовкой данного подхода[I,2], использующей пятимерную псевдоевклидову метрику с сигнатурой (----+).

но и предписывает некоторое матричное преобразование спинорных полей

$$\Psi \to V \Psi_E . \qquad (2.14)$$

С точностью до фазового множителя,

$$V = V^T = \exp\left\{ -\frac{i\pi}{4} (\Gamma^0 \Gamma^5) q \right\}, \qquad (2.15)$$

где q - зарядовая матрица (2.12), а

$$\Gamma^5 = -(\Gamma^5)^T = -(\Gamma^5)^+ = \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^3 .$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} V \cdot 1 \cdot V &= -i \Gamma^0 \Gamma^5 q \equiv -i \alpha_4 , \\ V \cdot \Gamma^0 \Gamma^k \cdot V &= \Gamma^0 \Gamma^k \equiv \alpha_k , \quad k = 1,2,3 \\ V \cdot \Gamma^0 \cdot V &= \Gamma^0 \equiv \alpha_5 , \end{aligned} \qquad (2.16)$$

приходим к следующему выражению для действия фермионного поля в евклидовой формулировке Швингера:

$$S_0^{(E)} = \pi \int \Psi_E^T(-p) \left[p^n \alpha_n + m \alpha_5 \right] \Psi_E(p) \, d^4 p = \qquad (2.17а)$$

$$= \frac{1}{2} \int \Psi_E^T(x) \left[-i \alpha_n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \alpha_5 \right] \Psi_E(x) \, d^4 x . \qquad (2.17б)$$

Матрицы α_n, α_5 , как нетрудно проверить, удовлетворяют соотношениям:

$$\{\alpha_m, \alpha_n\} = 2 \delta_{mn} , \quad m,n = 1,2,3,4 ,$$

$$\{\alpha_m, \alpha_5\} = 0 ,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 &= \alpha_5^2 = 1 , \\ \alpha_m^T = \alpha_m^* = \alpha_m^+ &= \alpha_m , \\ (\alpha_5)^T = -\alpha_5 = \alpha_5^* &= -\alpha_5^+ . \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Очевидно,

$$\left[p^n \alpha_n + m \alpha_5 \right]^2 = p_n^2 + m^2 . \qquad (2.19)$$

Отметим также, что в данном 8-компонентном формализме генераторы $SO(4)$-преобразований $L_{mn} = \frac{1}{4}[\alpha_m, \alpha_n]$ должным образом ведут себя при транспонировании и комплексном сопряжении*/:

$$L_{mn}^T = -L_{mn} , \quad L_{mn}^* = -L_{mn} .$$

Кроме α_n, α_5 существуют еще только две (8x8)-матрицы α_6 и α_7, такие, что

$$\begin{aligned} \{\alpha_L, \alpha_6\} = \{\alpha_L, \alpha_7\} &= \{\alpha_6, \alpha_7\} = 0 , \\ & L = 1,2,3,4,5 \\ \alpha_6^2 = \alpha_7^2 &= 1 . \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Указанные матрицы с необходимостью являются антисимметричными:

$$\alpha_6^T = -\alpha_6 , \quad \alpha_7^T = -\alpha_7 . \qquad (2.21)$$

С их помощью в /4/ записываются различные спинорные преобразования, не принадлежащие $SO(4)$, например, преобразования отражений координатных осей:

$$R_n = i \alpha_n \alpha_6 , \quad n = 1,2,3,4 . \qquad (2.22)$$

Ясно, что действие (2.17а) остается инвариантным при инверсии нечетного числа осей, скажем, $p^4 \to -p^4$, поскольку волновой оператор $\mathcal{K}(\vec{p}, p^4) = \alpha_n p^n + \alpha_5 m$ удовлетворяет соотношениям типа

---

*/Это обстоятельство играло важную эвристическую роль при поиске евклидовой формулировки /4/.

$$R_4\,\mathcal{H}(\vec{p},p^4)\,R_4 = \mathcal{H}(\vec{p},-p^4)\,. \tag{2.23}$$

В дальнейшем нами будет использовано следующее представление[ж/] для (8x8)-матриц $\alpha_1,\dots,\alpha_7$:

$$\alpha_1 = -\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & -\sigma_1\end{pmatrix}\otimes\sigma_0\,,\quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & -\sigma_2\end{pmatrix}\otimes\sigma_2\,,$$

$$\alpha_3 = -\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & -\sigma_3\end{pmatrix}\otimes\sigma_0\,,\quad \alpha_4 = -\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_0\\ i\sigma_0 & 0\end{pmatrix}\otimes\sigma_2\,,$$

$$\alpha_5 = -\begin{pmatrix}0 & \sigma_0\\ \sigma_0 & 0\end{pmatrix}\otimes\sigma_2\,,\quad \alpha_6 = \begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\otimes\sigma_1\,, \tag{2.24}$$

$$\alpha_7 = \begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\otimes\sigma_1\,,$$

($\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ - матрицы Паули). Если положить

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_1\\ -\sigma_1 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^2 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^3 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\ -\sigma_3 & 0\end{pmatrix},$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix}i\sigma_0 & 0\\ 0 & -i\sigma_0\end{pmatrix} \equiv i\gamma^0,\quad \gamma^5 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_0\\ \sigma_0 & 0\end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

то

$$\alpha_1 = \gamma^5\gamma^1\otimes\sigma_0\,,\quad \alpha_2 = -\gamma^5\gamma^2\otimes\sigma_2\,,\quad \alpha_3 = \gamma^5\gamma^3\otimes\sigma_0\,,$$

$$\alpha_4 = -\gamma^5\gamma^4\otimes\sigma_2\,,\quad \alpha_5 = -\gamma^5\otimes\sigma_2\,. \tag{2.26}$$

Заметим, что

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = i\,\alpha_6\alpha_7 = \begin{pmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & \sigma_0\end{pmatrix}\otimes\sigma_2 = q\,. \tag{2.27}$$

[ж/] Оно отличается от представления, применявшегося в /4/.

Легко видеть, что пять (4x4)-матриц γ^L (L = I,2,3,4,5) удовлетворяют соотношениям

$$\{\gamma^K,\gamma^L\} = 2g^{KL}\,,$$

$$(\gamma^L)^+ = \gamma^5\gamma^L\gamma^5\,,\quad K,L = 1,2,3,4,5\,, \tag{2.28}$$

где $g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = -g_{55} = -1$, g_{KL} = 0 при $K \neq L$. В связи с появлением здесь пятимерного метрического тензора $\| g_{KL} \|$ напомним, что в неевклидовой КТП в роли импульсного 4-пространства выступает поверхность 5-гиперболоида (см. (I.I.5), (I.3.6)) :

$$g_{KL}p^Kp^L = g^{KL}p_Kp_L =$$

$$= p_Lp^L = -p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 + p_5^2 = M^2 \tag{2.29}$$

(M - фундаментальная масса).

Нетрудно убедиться далее, что действие в форме (2.I7а) может быть получено с помощью уже известной нам процедуры антисимметризации (см. (2.5) - (2.I0)), если исходить из следующего выражения:

$$S_0^{(E)} = 2\pi\int \Psi^+(p)\left[p^n\gamma^5\gamma^n + m\gamma^5\right]\Psi(p)\,d^4p =$$

$$= 2\pi\int \bar{\Psi}(p)\left[\not{p} + m\right]\Psi(p)\,d^4p\,, \tag{2.30}$$

где Ψ и Ψ^+ суть четырехкомпонентные евклидовы спиноры, $\bar{\Psi}(p) = \Psi^+(p)\gamma^5$ и $\not{p} \equiv p^n\gamma^n$. Очевидно (ср. (2.I9)),

$$(p^n\gamma^5\gamma^n + m\gamma^n)^2 = p_n^2 + m^2\,, \tag{2.31}$$

или

$$(m + \not{p})\cdot(m - \not{p}) = p_n^2 + m^2\,. \tag{2.32}$$

Евклидову формулировку Швингера, кратко изложенную выше, мы примем за основу при обобщении теории фермионного поля на случай p -пространства постоянной кривизны (2.29). Другими словами, действию $S_0^{(E)}$, взятому в любой из двух эквивалентных форм (2.I7a) или (2.30), отводится та же роль, какую играли выражения (I.2.2) и (II.2.IIa) при построении неевклидовых версий теории скалярного поля и теории поля Максвелла.

Для нахождения неевклидова аналога $S_0^{(E)}$ естественно попытаться применить уже известный алгоритм (см. (I.7.I) и (II.2.I4)). Если действие $S_0^{(E)}$ задано, скажем, в виде (2.30), то неевклидово действие $S_0(M)$ в <u>четырехкомпонентной</u> формулировке должно получаться из (2.30) с помощью подстановки

$$
\begin{aligned}
&\psi(p) \to \psi(p, p_5)\,, \\
&\bar\psi(p) \to \bar\psi(p, p_5) = \psi^{+}(p, p_5)\gamma^5\,, \\
&d^4 p \to 2M\,\varepsilon(p_5)\,\delta(p_L p^L - M^2)\,d^5 p\,, \\
&\not p + m \to K(\vec p, p^4, p^5)\,,
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

где $K(\vec p, p^4, p^5)$ - неизвестная пока неевклидова волновая матрица 4x4. Производя процедуру антисимметризации, можно затем прийти к выражению для $S_0(M)$ в терминах восьмикомпонентных спиноров $\Psi(p, p_5)$ и $\Psi^T(p, p_5)$, которое в новой схеме будет играть роль швингеровского действия (2.I7a).

§3. ФУНКЦИОНАЛЫ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ НЕЕВКЛИДОВЫХ ФЕРМИ-ПОЛЕЙ

В силу (2.33) для построения неевклидова действия $S_0(M)$ необходимо лишь конкретизировать вид волновой (4x4)-матрицы $K(\vec p, p^4, p^5)$. По аналогии с (2.32) естественно полагать, что величина $K(\vec p, p^4, p^5)$ должна определяться из разложения на матричные множители неевклидова скалярного волнового оператора $2M(p_5 - M\cos\mu)$ (см. (I.7.I)).

Вводя в рассмотрение 5-вектор $V^L = (0,0,0,0,M)$, отвечающий началу четырехмерной системы координат на гиперболоиде (I.29) (см. (I.3.I4)), запишем $2M(p_5 - M\cos\mu)$ в $SO(1,4)$ -инвариантной форме:

$$
\begin{aligned}
2M(p_5 - M\cos\mu) &= 2(p_L V^L - M^2\cos\mu) = \\
&= 4M^2\sin^2\frac{\mu}{2} - (p_L - V_L)(p^L - V^L)\,, \quad \cos\mu = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\,.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Далее, с учетом (2.28), будем иметь

$$
\begin{aligned}
&4M^2\sin^2\frac{\mu}{2} - (p_L - V_L)(p^L - V^L) = \\
&= \left(2M\sin\frac{\mu}{2} - (p_L - V_L)\gamma^L\right)\left(2M\sin\frac{\mu}{2} + (p_K - V_K)\gamma^K\right),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

что эквивалентно

$$
\begin{aligned}
2M(p_5 - M\cos\mu) = &\left[2M\sin\frac{\mu}{2} + \not p - (p_5 - M)\gamma^5\right] \times \\
&\times \left[2M\sin\frac{\mu}{2} - \not p + (p_5 - M)\gamma^5\right].
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Таким образом, можно принять (ср. /7,8/)

$$
K(\vec p, p^4, p^5) = \not p - (p_5 - M)\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2}\,,
\tag{3.4}
$$

и затем, применяя алгоритм (2.33), построить следующее выражение для неевклидова действия свободного фермионного поля:

$$
\begin{aligned}
&S_0(M) = 4\pi M \int \varepsilon(p_5)\,\delta(p_L p^L - M^2)\,\bar\psi(p, p_5)\left[\not p - (p_5 - M)\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2}\right]\psi(p, p_5)\,d^5 p \\
&\bar\psi(p, p_5) = \psi^{+}(p, p_5)\gamma^5\,.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Антисимметризация (3.5) по $\psi(p, p_5)$ и $\psi^{+}(p, p_5)$ в духе (2.5)-(2.8) дает (ср. (2.I7a)):

$$
S_0(M) = 2\pi M \int \varepsilon(p_5)\,\delta(p_L p^L - M^2)\,\Psi^T(-p, p_5)\left[p^n\alpha_n + (p_5 - M)q + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5\right]\Psi(p, p_5)\,d^5 p,
\tag{3.6}
$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ – матрицы, определенные в (2.24), q – зарядовая матрица (2.12). Таким образом, неевклидовым аналогом волновой (8x8)-матрицы $\mathcal{K}(\vec{p}, p^4) = p^n\alpha_n + m\alpha_5$ является величина

$$\mathcal{K}(\vec{p}, p^4, p^5) = p^n\alpha_n + (p_5 - M)q + 2M\sin\frac{\mu}{2}\,\alpha_5 . \qquad (3.7)$$

Легко убедиться (ср. (2.19)), что

$$\left[p^n\alpha_n + (p_5 - M)q + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5\right]\cdot\left[p^n\alpha_n - (p_5 - M)q + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5\right] =$$

$$= 2M(p_5 - M\cos\mu) . \qquad (3.8)$$

Принципиальное отличие действия (3.6) от соответствующего "плоского" выражения (2.17а) проявляется в неинвариантности (3.6) относительно отражений координатных осей. В самом деле, вместо (2.23) мы имеем теперь

$$R_4\,\mathcal{K}(\vec{p}, p^4, p^5)\,R_4 = \mathcal{K}^{(R)}(\vec{p}, -p^4, p^5) , \qquad (3.9)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{K}^{(R)}(\vec{p}, p^4, p^5) \equiv p^n\alpha_n - (p_5 - M)q + 2M\sin\frac{\mu}{2}\,\alpha_5 . \qquad (3.10)$$

Заметим, что с учетом (3.7) и (3.10) соотношение (3.8) может быть записано как

$$\mathcal{K}(\vec{p}, p^4, p^5)\,\mathcal{K}^{(R)}(\vec{p}, p^4, p^5) = 2M(p_5 - M\cos\mu) .$$

Ясно, что матрица $\mathcal{K}^{(R)}$ могла бы оказаться на месте $\mathcal{K}$ в действии (3.6), если бы мы произвели в (3.2)-(3.3) подстановку

$$\gamma^5 \to -\gamma^5 , \qquad (3.11)$$

и вместо (3.4) использовали (4x4)-матрицу

$$\not{p} + (p_5 - M)\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2} \equiv K^{(R)}(\vec{p}, p^4, p^5). \qquad (3.12)$$

Дираковские частицы, которым соответствует такой формализм, будем называть R-фермионами, тем самым отличая их от "обычных" фермионов, описываемых действием (3.5)-(3.6). Разумеется, легко переформулировать теорию таким образом, чтобы волновые матрицы K и $K^{(R)}$ (соответственно, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^{(R)}$) входили в действие симметрично, обеспечивая его инвариантность относительно отражений. При этом обычные фермионы и R-фермионы выступали бы как компоненты одного спинорного поля. Последнее, однако, означает, что в плоском пределе $M \to \infty$ все фермионные состояния оказались бы двукратно вырожденными, что не наблюдается на опыте.

Таким образом, обычные и R-фермионы необходимо рассматривать порознь, примирившись с неинвариантностью свободного неевклидова действия относительно инверсий координатных осей. Ясно, что различия в физических свойствах этих частиц могут быть вскрыты лишь в теории взаимодействующих полей. Такие различия несомненно проявятся, если неинвариантность нашей схемы относительно отражений сохранится и после включения взаимодействия.

Оказывается, однако, что $K(\vec{p}, p^4, p^5)$ и $K^{(R)}(\vec{p}, p^4, p^5)$ не являются единственно возможными волновыми (4x4)-матрицами в неевклидовой теории фермионного поля. В самом деле, если вновь вернуться к $SO(1,4)$-инвариантной записи (3.1) скалярного волнового оператора и преобразовать ее к виду

$$2M(p_5 - M\cos\mu) =$$

$$= (p_L + V_L)(p^L + V^L) - 4M^2\cos^2\frac{\mu}{2} , \qquad (3.13)$$

то вместо (3.2) будем иметь

$$(p_L + V_L)(p^L + V^L) - 4M^2\cos^2\frac{\mu}{2} =$$

$$= \left[(p_L + V_L)\gamma^L - 2M\cos\frac{\mu}{2}\right]\left[(p_K + V_K)\gamma^K + 2M\cos\frac{\mu}{2}\right] ,$$

откуда, очевидно,

$$2M(p_5 - M\cos\mu) =$$

$$= \left[-\not{p} + (p_5 + M)\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2}\right]\cdot\left[-\not{p} + (p_5 + M)\gamma^5 + 2M\cos\frac{\mu}{2}\right] . \qquad (3.14)$$

Выберем теперь первый из матричных сомножителей, фигурирующих в правой части (3.14), в качестве новой волновой матрицы 4x4*/

*/ С равным успехом для этой цели можно было бы использовать второй матричный сомножитель из (3.14). Мы вернемся к обсуждению указанного произвола в следующей работе.

и назовем фермионы, соответствующие данному описанию, <u>экзотическими.</u> Таким образом,

$$-\not{p} + (p_s + M)\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2} \equiv K_{exotic}(\vec{p}, p^4, p^5) \tag{3.15}$$

и, следовательно (ср. (3.5)-(3.6)),

$$S_{exotic}(M) =$$

$$= 4\pi M \int \varepsilon(p_s)\delta(p_L p^L - M^2)\bar{\Psi}_{exotic}(p, p_s)\left[-\not{p} + (p_s + M)\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2}\right]\Psi_{exotic}(p, p_s)\,d^5p = \quad (3.16а)$$

$$= 2\pi M \int \varepsilon(p_s)\delta(p_L p^L - M^2)\Psi^T_{exotic}(-p, p_s)\left[-p^n\alpha_n - (p_s + M)q - 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_s\right]\Psi_{exotic}(p, p_s)\,d^5p\,. \quad (3.16б)$$

Производя в (3.15) замену (3.11), приходим к волновой матрице для <u>экзотических R -фермионов</u> :

$$K^{(R)}_{exotic}(\vec{p}, p^4, p^5) = -\not{p} - (p_s + M)\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2}\,, \tag{3.17}$$

с помощью которой можно построить соответствующее действие $S^{(R)}_{exotic}(M)$.

Итак, в неевклидовой КТП приходится иметь дело с целым спектром дираковских полей*/. Ниже мы сосредоточим внимание лишь на обычных и экзотических полях и не будем вовсе рассматривать R -поля, поскольку все соотношения для них можно будет получить из наших результатов с помощью подстановки (3.11).

Дальнейшее изложение следует уже известной схеме/1,2/ и поэтому местами будет лаконичным.

---

*/ Это нашло свое отражение и в заголовке настоящей работы.

§4. НЕЕВКЛИДОНЫ ФЕРМИ-ПОЛЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБЛАСТИ

Вернемся к действию $S_0(M)$ в форме (3.6). После интегрирования по p_5 , применяя наши стандартные обозначения (см. (1.3.1)-(1.3.2))

$$\Psi_1(p) = \Psi(p, M\varkappa)\,,$$

$$\Psi_2(p) = \Psi(p, -M\varkappa)\,, \quad \varkappa = \sqrt{1 + \frac{p^2}{M^2}}\,, \tag{4.1}$$

будем иметь (ср. (1.4.14))

$$S_0(M) = \pi\int\frac{d^4p}{\varkappa}\Big\{\Psi^T_1(-p)\left[p^n\alpha_n + (\varkappa - 1)Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_s\right]\Psi_1(p) -$$

$$-\Psi^T_2(-p)\left[p^n\alpha_n - (\varkappa + 1)Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_s\right]\Psi_2(p)\Big\}\,. \tag{4.2}$$

Далее, используя (4.2), построим по обычным правилам производящий Z -функционал :

$$Z_0[\eta_1, \eta_2] = \frac{\int e^{-S_0(M) + \pi\int\frac{d^4p}{\varkappa}\left\{\Psi^T_1(-p)\eta_1(p) - \eta^T_1(-p)\Psi_1(p) - \Psi^T_2(-p)\eta_2(p) + \eta^T_2(-p)\Psi_2(p)\right\}} D\Psi_1 D\Psi_2}{\int e^{-S_0(M)} D\Psi_1 D\Psi_2} \tag{4.3}$$

и определим с его помощью функции Швингера для полей $\Psi_1(p)$ и $\Psi_2(p)$ (ср. (1.6.13) и (1.6.15)):

$$\langle\Psi_1(p)\Psi^T_1(k)\rangle_0 = \frac{\delta^2 Z_0[\eta_1, \eta_2]}{4\pi^2\,\delta\eta^T_1(-p)\,\delta\eta_1(-k)}\Bigg|_{\eta_1 = \eta_2 = 0} =$$

$$= \frac{\int\Psi_1(p)\Psi^T_1(k)D\Psi_1 D\Psi_2 e^{-S_0(M)}}{\int D\Psi_1 D\Psi_2 e^{-S_0(M)}} =$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p, -k)}{2\pi}\;\frac{1}{p^n\alpha_n + (\varkappa - 1)Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_s} =$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p,-k)}{2\pi}\,\frac{p^n\alpha_n - (\varkappa-1)Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5}{2M^2(\varkappa-\cos\mu)}\,, \qquad (4.4а)$$

$$\langle \Psi_2(p)\,\Psi_2^T(k)\rangle_0 = \frac{\delta^2 Z_0[\eta_1,\eta_2]}{4\pi^2\,\delta\eta_2^T(-p)\,\delta\eta_2(-k)}\Bigg|_{\eta_1=\eta_2=0} =$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p,-k)}{2\pi}\,\frac{1}{-p^n\alpha_n + (\varkappa+1)Mq - 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5} = \qquad (4.4б)$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p,-k)}{2\pi}\,\frac{p^n\alpha_n + (\varkappa+1)Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5}{2M^2(\varkappa+\cos\mu)}\,.$$

Легко видеть, что в плоском пределе $M\to\infty$ выражение (4.4б) исчезает, а (4.4а) совпадает с обычной функцией Швингера, отвечающей действию (2.17а).

Если развернуть функции Швингера (4.4а)-(4.4б) в релятивистскую область (см. (2.13)-(2.16), а также §4 из [1]), то можно прийти к выводам, полностью аналогичным тем, которые были сделаны в скалярном случае. В частности, оказывается, что фермионное поле $\Psi_2(p_0,\vec p)$ в свободном виде не существует, т.к. выражение (4.4б) регулярно в области $p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec p^{\,2} \le M^2$ [*]. Функция Швингера (4.4а), напротив, имеет в рассматриваемой области полюс при $p_\mu p^\mu = m^2$ и в его окрестности может быть представлена в виде

$$\sim \frac{\delta^4(p+k)}{2\pi}\,\frac{U(\mu)\,V^{-1}\,[p^0 + \Gamma^0\vec\Gamma\vec p + \Gamma^0 m]\,V^{-1}\,U(\mu)}{m^2 - p_\mu p^\mu}\,, \qquad (4.5)$$

где $V = e^{-\frac{i\pi}{4}\alpha_4}$ (см. (2.15)-(2.16)), а матрица $U(\mu)$ определяется формулой

$$U(\mu) = U^T(\mu) = \frac{\cos\frac{\mu}{4} + \alpha_5 q\sin\frac{\mu}{4}}{\sqrt{\cos\frac{\mu}{2}}}\,. \qquad (4.6)$$

[*] Поскольку M – предельно возможное значение массы частицы, то отсутствие свободных Ψ_2-частиц в области $p_\mu p^\mu \le M^2$ означает, что они вообще отсутствуют.

Следовательно, принимая во внимание (2.10), мы вправе заключить, что 8-компонентное спинорное поле

$$\Phi_1(\vec p, p^4) \equiv U^{-1}(\mu)\,\Psi_1(\vec p,p^4)\,,$$

$$U^{-1}(\mu) = \frac{\cos\frac{\mu}{4} - \alpha_5 q\sin\frac{\mu}{4}}{\sqrt{\cos\frac{\mu}{2}}}\,, \qquad (4.7)$$

будучи развернуто в релятивистскую область (см. (2.13)-(2.14)), описывает свободную дираковскую частицу с массой m при условии, что $0\le m\le M$.

Подчеркнем, что без дополнительного U-преобразования нельзя получить дираковскую форму массового члена в числителе (4.5). В плоском пределе $\mu\approx\frac{m}{M}\ll 1$ матрица (4.6), очевидно, превращается в единичную.

Если бы в этом параграфе вместо (3.6) мы рассматривали действие (3.16б) для экзотических фермионов, то выражение (4.2) пришлось бы заменить следующим:

$$S_{exotic}(M) =$$

$$= \pi\int\frac{d^4p}{\varkappa}\Big\{\Psi^T_{1\,exotic}(-p)\big[-p^n\alpha_n - (\varkappa+1)Mq - 2M\cos\tfrac{\mu}{2}\alpha_5\big]\Psi_{1\,exotic}(p) - \qquad (4.8)$$

$$- \Psi^T_{2\,exotic}(-p)\big[-p^n\alpha_n + (\varkappa-1)Mq - 2M\cos\tfrac{\mu}{2}\alpha_5\big]\Psi_{2\,exotic}(p)\Big\}\,.$$

Соответственно, вместо (4.4а)-(4.4б) возникли бы функции Швингера для экзотических полей:

$$\langle\Psi_{1exotic}(p)\,\Psi^T_{1exotic}(k)\rangle_0 =$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p,-k)}{2\pi}\,\frac{1}{-p^n\alpha_n - (\varkappa+1)Mq - 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_5} = \qquad (4.9а)$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p,-k)}{2\pi}\,\frac{p^n\alpha_n - (\varkappa+1)Mq + 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_5}{2M^2(\varkappa-\cos\mu)}\,,$$

$$\langle \Psi_{2exotic}(p)\, \Psi^{T}_{2exotic}(k)\rangle_0 =$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p,-k)}{2\pi}\; \frac{1}{p^n\alpha_n - (\varkappa-1)Mq + 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_s} = \tag{4.9б}$$

$$= \frac{\delta^{(4)}(p,-k)}{2\pi}\; \frac{p^n\alpha_n + (\varkappa-1)Mq + 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_s}{2M^2(\varkappa+\cos\mu)} .$$

Видно, что в плоском пределе $M\to\infty$ функция (4.9б) исчезает (ср. с (4.4б)), тогда как для (4.9а) такой предел не существует:

$$\lim_{M\to\infty} \langle \Psi_{1exotic}(p)\, \Psi^{T}_{1exotic}(k)\rangle_0 =$$

$$= \frac{\delta^{4}(p+k)}{2\pi}\; \frac{2Mq(1-\alpha_s q)}{p^2+m^2} . \tag{4.10}$$

Другими словами, при $M\to\infty$ поле $\Psi_{1exotic}(p)$ растет как $\sqrt{M}$ (ср.(4.17)).

Разумеется, резкое отличие в поведении при $M\to\infty$ обычных и экзотических полей, заданных на верхней поле гиперболоида (2.29), прослеживается и в рамках 4-компонентного формализма. Сравним хотя бы выражения для волновых (4x4)-матриц (3.4) и (3.15) при $p_5 = M\varkappa > 0$, вычисленные в плоском приближении:

$$K(\vec{p}, p^4, M\varkappa) \approx \not{p} + m , \tag{4.11а}$$

$$K_{exotic}(\vec{p}, p^4, M\varkappa) \approx 2M(\gamma^5 - 1) . \tag{4.11б}$$

Таким образом, если ψ – произвольный четырехкомпонентный спинор, то

$$\lim_{M\to\infty} \frac{-K_{exotic}(\vec{p}, p^4, M\varkappa)}{4M}\psi = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi . \tag{4.12}$$

Применяя к экзотическим функциям Швингера (4.9а)-(4.9б) операцию релятивистского разворота, можно убедиться, что здесь возникает, в принципе, та же ситуация, что и в случае обычных полей. Функция (4.9б) регулярна в области $p_\mu p^\mu \leq M^2$ и поэтому на массовой поверхности $\Psi_{2exotic}(p_0, \vec{p}) \equiv 0$. Что касается (4.9а), то при $p_\mu p^\mu = m^2$ эта функция имеет полюс, в окрестности которого она аппроксимируется выражением (ср. (4.5)):

$$\sim \frac{\delta^4(p+k)}{2\pi}\; \frac{U_{exotic}(\mu)\, V^{-1}\left[p^0 + \Gamma^0\vec{\Gamma}\vec{p} + \Gamma^0 m\right] V^{-1}\, U_{exotic}(\mu)}{m^2 - p_\mu p^\mu} . \tag{4.13}$$

Здесь по-прежнему $V = e^{-\frac{i\pi}{4}\alpha_4}$, а матрица $U_{exotic}(\mu)$ определяется как

$$U_{exotic}(\mu) = U^{-1}(\pi-\mu) = \frac{\cos\frac{\pi-\mu}{4} - \alpha_s q \sin\frac{\pi-\mu}{4}}{\sqrt{\sin\frac{\mu}{2}}} . \tag{4.14}$$

Полагая (ср. (4.7))

$$\Psi_{1exotic}(\vec{p}, p^4) = U_{exotic}(\mu)\, \Phi_{1exotic}(\vec{p}, p^4) , \tag{4.15}$$

мы вправе сделать вывод, что релятивистски развернутое поле $\Phi_{1exotic}(\vec{p}, p^4)$, подобно полю (4.7), тоже описывает свободную дираковскую частицу с массой m, но при этом $0 < m \leq M$. Случай нулевой массы требует особого рассмотрения, т.к. матрица $U_{exotic}(\mu)$ в точке $m=0$ сингулярна.

В плоском приближении $\mu \approx \frac{m}{M} \ll 1$ имеем из (4.14)

$$U_{exotic}(\mu) \approx \frac{1-\alpha_s q}{\sqrt{\mu}} + \frac{\sqrt{\mu}}{4}(1+\alpha_s q) \tag{4.16}$$

и, следовательно, в силу (4.15)

$$\Psi_{1exotic} \approx \sqrt{\frac{M}{m}}\,(1-\alpha_s q)\, \Phi_{1exotic} . \tag{4.17}$$

Резюмируем теперь результаты данного параграфа:

I. Неевклидовы ферми-поля

$$\Psi_2(p)\,,\ \Psi_{2\,exotic}(p)\,,\ \Psi_2^{(R)}(p)\,,\dots,$$

заданные на нижней поле́ $p_5 < 0$ гиперболоида (2.29), при развороте в релятивистскую область исчезают на массовой поверхности $p_\mu p^\mu = m^2$ (ср. (I.6.30) и (II.2.27)).

2. Неевклидовы ферми-поля

$$\Psi_1(p)\,,\ \Psi_{1\,exotic}(p)\,,\ \Psi_1^{(R)}(p)\,,\dots,$$

заданные на верхней поле́ $p_5 > 0$ гиперболоида (2.29), при развороте в релятивистскую область порождают обычные дираковские поля ($m_{exotic} \neq 0$). При этом операции разворота должно предшествовать преобразование рассматриваемых полей к новым полям :

$$\Phi_1(p)\,,\ \Phi_{1\,exotic}(p)\,,\ \Phi_1^{(R)}(p)\,,\dots$$

(ср. (4.7) и (4.15)) с помощью матриц U , U_{exotic} , . . . , чтобы массовый член в релятивистском действии приобрел дираковский вид.

3. Экзотические ферми-поля нулевой массы являются существенно неевклидовыми, т.к. матрица $U_{exotic}(\mu)$ в этом случае не существует и, следовательно, массовый член в релятивистском действии обязательно сохраняет зависимость от фундаментальной массы M.

§5. ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ И 5-МЕРНОЕ КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Покажем, что развитое в §§ 3-4 описание неевклидовых ферми-полей допускает локальную формулировку, подобную той, которая была рассмотрена в /I,2/ применительно к неевклидовым бозонным полям.

Если в действии (4.2) перейти к новым полям*/ :

---

*/Обратим внимание, что все фигурирующие здесь спинорные поля имеют каноническую размерность :

$$[\Psi_1(p)] = [\Psi_2(p)] = [\Psi(p)] = [X(p)] = (\text{масса})^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Psi(p) = \frac{\Psi_1(p) + \Psi_2(p)}{\varkappa}\,,$$

$$X(p) = \Psi_1(p) - \Psi_2(p)\,, \qquad (5.1)$$

то оно примет вид

$$S_0(M) = \frac{\pi}{2}\int dp\Big\{\Psi^T(-p)\Big[p^n\alpha_n - Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\,\alpha_5\Big]X(p) +$$

$$+ X^T(-p)\Big[p^n\alpha_n - Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\,\alpha_5\Big]\Psi(p) + \qquad (5.2)$$

$$+\Big(1 + \frac{p^2}{M^2}\Big)\Psi^T(-p)\,Mq\,\Psi(p) + X^T(-p)\,Mq\,X(p)\Big\}.$$

Следующие далее разложения Фурье столь часто нами использовались в /I,2/, что не требуют разъяснений (ср. (I.5.II), (II.3.9)):

$$\Psi(x,\tau) = \frac{2M}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{-ip_L x^L} d^5p\,\delta(p_\kappa p^\kappa - M^2)\,\Psi(p,p_5) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{ipx} d^4p\,\frac{e^{-i\varkappa\tau}\Psi_1(p) + e^{i\varkappa\tau}\Psi_2(p)}{\varkappa}\,, \qquad (5.3а)$$

$$x^L = \Big(x^\ell, \frac{\tau}{M}\Big) = (x^\ell, x^5)$$

$$\Psi(x,0) \equiv \Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{ipx} d^4p\,\Psi(p)\,; \qquad (5.3б)$$

$$i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{ipx} d^4p\Big[e^{-i\varkappa\tau}\Psi_1(p) - e^{i\varkappa\tau}\Psi_2(p)\Big], \qquad (5.4а)$$

$$i\frac{\partial\Psi(x,0)}{\partial\tau} \equiv X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{ipx} d^4p\,X(p)\,. \qquad (5.4б)$$

Очевидно также (ср. (I.5.I2), (П.3.I0а)):

$$\left(M^2 \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + M^2\right)\Psi(x,\tau) = 0 \quad . \tag{5.5}$$

С учетом (5.3а) и (5.4а) действие (5.2) можно представить в виде интеграла по четырехмерному евклидову x-пространству:

$$S_0(M) = \int L_0(x,\tau;M)\, d^4x \ , \tag{5.6}$$

где лагранжева плотность $L_0(x,\tau;M)$ является величиной, локальной в <u>конфигурационном</u> <u>5-пространстве</u> (ср. (I.5.9), (П.3.I4)):

$$L_0(x,\tau;M) = \frac{1}{4}\left\{\Psi^T(x,\tau)\left[-i\alpha_n \frac{\partial}{\partial x^n} - Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_s\right]\left(i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau}\right) + \right.$$

$$+ \left(i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau}\right)^T\left[-i\alpha_n\frac{\partial}{\partial x^n} - Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_s\right]\Psi(x,\tau) +$$

$$+ \Psi^T(x,\tau)\, Mq\, \Psi(x,\tau) + \frac{1}{M}\frac{\partial\Psi^T(x,\tau)}{\partial x^n}\, q\, \frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial x^n} + \tag{5.7}$$

$$\left. + \left(i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau}\right)^T Mq \left(i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau}\right)\right\} .$$

Как и в бозонном случае/I,2/, функционал (5.6) не зависит от "времени" τ :

$$\frac{\partial S_0(M)}{\partial\tau} = 0 \quad , \tag{5.8}$$

поскольку представляет собой интеграл движения уравнения (5.5). Вычисляя его при $\tau = 0$, будем иметь с учетом (5.3б) и (5.4б):

$$S_0(M) = \int L_0(x,0;M)\, d^4x \equiv \int L_0(x;M)\, d^4x =$$

$$= \frac{1}{4}\int d^4x \left\{\Psi^T(x)\left[-i\alpha_n\frac{\partial}{\partial x^n} - Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_s\right]X(x) + \right.$$

$$+ X^T(x)\left[-i\alpha_n\frac{\partial}{\partial x^n} - Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_s\right]\Psi(x) +$$

$$+ \Psi^T(x)\, Mq\, \Psi(x) + \frac{1}{M}\frac{\partial\Psi^T(x)}{\partial x^n}\, q\, \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x^n} + \tag{5.9}$$

$$\left. + X^T(x)\, Mq\, X(x)\right\} .$$

Это выражение равносильно представлению действия $S_0(M)$ как функционала <u>расширенных</u> полей (см./I/, Приложение, а также (П.3.29)–(П.3.32)):

$$S_0(M) = \int d^4x\, L_0(x;M) = M\int \delta(\tau)\, d^5x\, \hat{L}_0(x,\tau;M) , \tag{5.10}$$

где $\hat{L}_0(x,\tau;M)$ – лагранжева плотность (5.7), в которой произведена подстановка :

$$\Psi(x,\tau) \to \hat{\Psi}(x,\tau) \ . \tag{5.11}$$

Подчеркнем, что расширенное спинорное поле $\hat{\Psi}(x,\tau)$, в отличие от $\Psi(x,\tau)$, не подчиняется уравнению (5.5) и поэтому может быть подвергнуто локальному калибровочному преобразованию, зависящему от <u>всех</u> <u>пяти</u> <u>координат</u> (ср. (П.3.35)):

$$\hat{\Psi}(x,\tau) \to S(x,\tau)\,\hat{\Psi}(x,\tau) \ . \tag{5.12}$$

Рассмотрим теперь производящий функционал (4.3) и перейдем в нем к новым грассмановым переменным интегрирования (5.I). Полагая одновременно

$$\frac{\eta_1(p) + \eta_2(p)}{\varkappa} = \eta(p) \quad , \quad \eta_1(p) - \eta_2(p) = \xi(p) \ , \tag{5.13}$$

получим:

$$Z_0[\eta,\xi] =$$

$$= \frac{\int e^{-S_0[\Psi,X] + \frac{\pi}{2}\int d^4p \left\{\Psi^T(-p)\xi(p) - \xi^T(-p)\Psi(p) + X^T(-p)\eta(p) - \eta^T(-p)X(p)\right\}} D\Psi DX}{\int e^{-S_0[\Psi,X]} D\Psi DX}, \tag{5.14}$$

где посредством $S_0[\Psi,X]$ обозначено действие (5.2).

С помощью (5.14) легко найти функции Швингера для локальных полевых переменных Ψ и X (ср. (1.6.10)):

$$\langle \Psi(p)\Psi^T(k)\rangle_0 =$$

$$= \frac{\delta^4(p+k)}{2\pi}\, \frac{p^n\alpha_n + (1-\cos\mu)Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5}{p^2+m^2} = \tag{5.15a}$$

$$= \frac{\delta^4(p+k)}{2\pi}\, \frac{U(\mu)\,(p^n\alpha_n + m\alpha_5)\,U(\mu)}{p^2+m^2}\ ;$$

$$\langle \Psi(p)X^T(k)\rangle_0 = \frac{\delta^4(p+k)}{2\pi}\left[-\frac{1}{M}q + \cos\mu\,\frac{U(\mu)(p^n\alpha_n + m\alpha_5)U(\mu)}{p^2+m^2}\right]; \tag{5.15б}$$

$$\langle X(p)X^T(k)\rangle_0 = \frac{\delta^4(p+k)}{2\pi}\left(1+\frac{p^2}{M^2}\right)\frac{U(\mu)(p^n\alpha_n + m\alpha_5)U(\mu)}{p^2+m^2}\ . \tag{5.15в}$$

Отметим, что аналитические свойства выражений (5.15) по переменной p^4 таковы, что эти функции могут быть продолжены во всю релятивистскую область с фейнмановским правилом обхода полюса на массовой поверхности $p_\mu p^\mu = m^2$.

Если в (5.14) произвести интеграцию по грассмановым спинорам X и X^T, то Z_0-функционал примет вид

$$Z_0[\eta,\xi] = \frac{\int e^{-S_{eff}[\Psi] + \mathcal{B}[\Psi,\eta,\xi]} D\Psi}{\int e^{-S_{eff}[\Psi]} D\Psi}\ , \tag{5.16}$$

где введены следующие обозначения:

$$S_{eff}[\Psi] =$$

$$= \pi\int d^4p\, \Psi^T(-p)\left[p^n\alpha_n - (1-\cos\mu)Mq + 2M\sin\frac{\mu}{2}\alpha_5\right]\Psi(p)\ , \tag{5.17}$$

$$\mathcal{B}[\Psi,\eta,\xi] = \frac{\pi}{2M}\int \eta^T(-p)\,q\,\eta(p)\,d^4p\ +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\int d^4p\,\Psi^T(-p)\left\{\xi(p) + \eta(p) - \frac{1}{M}\left[p^n\alpha_n + \frac{m\alpha_5}{\cos\frac{\mu}{2}}\right]q\,\eta(p)\right\} - \tag{5.18}$$

$$- \frac{\pi}{2}\int d^4p\left\{\xi^T(-p) + \eta^T(-p) - \frac{1}{M}\eta^T(-p)\,q\left[p^n\alpha_n + \frac{m\alpha_5}{\cos\frac{\mu}{2}}\right]\right\}\Psi(p)\ .$$

Легко видеть, что функционал (5.17), который естественно называть эффективным свободным действием, в плоском пределе $M\to\infty$ совпадает с действием Швингера (2.17а). Более того, с помощью U -преобразования (см. (4.6)-(4.7)) величина S_{eff} сводится к (2.17а) и при конечном M , поскольку

$$S_{eff} = \pi\int d^4p\left(U^{-1}(\mu)\Psi(-p)\right)^T(p^n\alpha_n + m\alpha_5)\left(U^{-1}(\mu)\Psi(p)\right). \tag{5.19}$$

Линейная по Ψ и Ψ^T неоднородная форма (5.18), очевидно, исчезает при выключении внешних спинорных источников. В плоском пределе $M\to\infty$ это выражение принимает вид

$$\mathcal{B}[\Psi,\eta,\xi] \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{2}\int d^4p\left\{\Psi^T(-p)\left[\xi(p)+\eta(p)\right] - \left[\xi^T(-p)+\eta^T(-p)\right]\Psi(p)\right\} \approx \tag{5.20}$$

$$\approx \pi\int d^4p\left[\Psi^T(-p)\eta_1(p) - \eta_1^T(-p)\Psi(p)\right],$$

где учтено соотношение (5.13).

Таким образом, мы убедились в следующем. Квантовая теория невзаимодействующих 8-компонентных фермионных полей $\Psi_1(p)$ и $\Psi_2(p)$, описываемая производящим функционалом (4.3), при переходе от импульсного пространства постоянной кривизны (2.29) к плоскому импульсному

4-пространству становится полностью эквивалентной евклидовой теории <u>одного</u> 8-компонентного поля $\Psi(p)$ в швингеровской формулировке. При этом $\Psi(p)$ есть плоский предел поля $\Psi_1(p)$, заданного на <u>верхней</u> поле́ гиперболоида (2.29):

$$\Psi(p) \approx \Psi_1(p) \quad , \quad |p| \ll M \; . \tag{5.2I}$$

Вспоминая, что в свободном виде Ψ_2-частицы не существуют (см. § 4), и исходя из аналогии со скалярной моделью[I], можно заключить, что назначение вспомогательного поля $\Psi_2(p)$ состоит в том, чтобы внести существенные "коррективы" в динамику полей в области сверхбольших импульсов $|p| \gtrsim M$. Вместе с тем, необходимо ясно понимать, что без введения $\Psi_2(p)$ (и подобных ему полей $\varphi_2(p)$ и $A_L^{(2)}(p)$ в[I,2]) <u>локальная</u> формулировка развиваемой теории в терминах полевых переменных $\Psi(p)$ и $\chi(p)$ (соответственно, $\varphi(p)$, $\chi(p)$ и $A_L(p)$, $\chi_L(p)$ в[I,2]) была бы невозможной.

Нет необходимости доказывать, что весь рассматриваемый в этом параграфе формализм может быть применен для описания экзотических и R-фермионных полей. Ниже мы приведем без вывода "экзотические" аналоги двух соотношений – (5.7) и (5.I7):

$$\begin{aligned}
L_{0_{exotic}}(x,\tau;M) = \frac{1}{4}\Big\{ & \Psi^T_{exotic}(x,\tau)\left[i\alpha_n\frac{\partial}{\partial x^n} - Mq - 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_5\right] i\frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau} + \\
& + i\frac{\partial\Psi^T_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau}\left[i\alpha_n\frac{\partial}{\partial x^n} - Mq - 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_5\right]\Psi_{exotic}(x,\tau) - \\
& - \Psi^T_{exotic}(x,\tau)\, Mq\, \Psi_{exotic}(x,\tau) - \frac{1}{M}\frac{\partial\Psi^T_{exotic}(x,\tau)}{\partial x^n} q \frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial x^n} - \\
& - \left(i\frac{\partial\Psi^T_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau}\right) Mq \left(i\frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau}\right)\Big\} ,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
S^{eff}_{exotic} = \\
= \pi\int d^4p\, \Psi^T_{exotic}(-p)\left[p^n\alpha_n + (1+\cos\mu)Mq + 2M\cos\frac{\mu}{2}\alpha_5\right]\Psi_{exotic}(p) .
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Если масса m экзотического фермиона отлична от нуля, то (ср.(5.I9))

$$S^{eff}_{exotic} = \pi\int d^4p \left(U^{-1}_{exotic}(\mu)\Psi_{exotic}(-p)\right)^T (p^n\alpha_n + m\alpha_5)\left(U^{-1}_{exotic}(\mu)\Psi_{exotic}(p)\right) , \tag{5.24}$$

где $U^{-1}_{exotic}(\mu) = \dfrac{\cos\frac{\pi-\mu}{4} + \alpha_5 q \sin\frac{\pi-\mu}{4}}{\sqrt{\sin\frac{\mu}{2}}}$ есть обращение матрицы (4.I4).

В случае $m = 0$ из (5.23) имеем

$$S^{eff}_{exotic} = \pi\int d^4p\, \Psi^T_{exotic}(-p)\left[p^n\alpha_n + 2(1+\alpha_5 q)Mq\right]\Psi_{exotic}(p) . \tag{5.25}$$

Заканчивая данный параграф, мы хотели бы отметить, что локальная формулировка теории неевклидовых ферми-полей может быть развита и в терминах 4-компонентных спиноров. Другими словами, если в действии (3.5) произвести интеграцию по p_5 и затем перейти к новым переменным (ср. (5.II))

$$\begin{aligned}
\Psi(p) &= \frac{\Psi(p, M\varkappa) + \Psi(p, -M\varkappa)}{\varkappa} , \\
\chi(p) &= \Psi(p, M\varkappa) - \Psi(p, -M\varkappa) ,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

то в результате будем иметь (ср. (5.2)):

$$\begin{aligned}
S_0(M) = \pi\int d^4p \Big\{ & \bar\Psi(p)\left(\not p + M\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2}\right)\chi(p) + \\
& + \bar\chi(p)\left(\not p + M\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2}\right)\Psi(p) - \\
& - \left(1+\frac{p^2}{M^2}\right)\bar\Psi(p) M\gamma^5\Psi(p) - \bar\chi(p)M\gamma^5\chi(p)\Big\} , \\
\bar\Psi(p) = \Psi^+(p)\gamma^5 \quad & , \quad \bar\chi(p) = \chi^+(p)\gamma^5 .
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Используя далее фурье-разложения типа (5.3)-(5.4), легко воспроизвести в рассматриваемом 4-компонентном формализме все соотношения, выражающие локальность теории в пяти измерениях. Не вызывает затруднений и построение соответствующего производящего функционала (ср.(4.3) и (5.I4)). Ниже мы просто приведем некоторые характерные выражения, возникающие при 4-компонентной трактовке обычных и экзотических ферми-полей.

I. <u>Свободное действие для обычных ферми-полей</u> (ср. (5.6)-(5.7) и (5.9)-(5.I0)):

$$S_0(M) = \int L_0(x,\tau;M)\, d^4x =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^4x \Big\{ \bar\Psi(x,\tau)\Big(-i\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n} + M\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2}\Big) i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau} + \\
&+ \overline{\Big(i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)}\Big(-i\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n} + M\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2}\Big)\Psi(x,\tau) - \\
&- \bar\Psi(x,\tau)M\gamma^5\Psi(x,\tau) - \frac{1}{M}\frac{\partial\bar\Psi(x,\tau)}{\partial x^n}\gamma^5\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial x^n} - \qquad (5.28)\\
&- \overline{\Big(i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)} M\gamma^5\Big(i\frac{\partial\Psi(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)\Big\} = \\
&= \int L_0(x,0;M)\,d^4x = M\int d^5x\,\delta(\tau)\,\hat L_0(x,\tau;M) ,
\end{aligned}
$$

где $\hat L_0(x,\tau;M)$ есть лагранжева плотность $L_0(x,\tau;M)$, в которой спинорное поле $\Psi(x,\tau)$ заменено расширенным полем $\hat\Psi(x,\tau)$.

2. Свободное действие для экзотических ферми-полей (ср. (3.I6а) и (5.22)):

$$
\begin{aligned}
S_{0_{exotic}}(M) &= \pi\int d^4p\,\Big\{ \bar\Psi_{exotic}(p)\Big(-\not p + M\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2}\Big)\chi_{exotic}(p) + \\
&+ \bar\chi_{exotic}(p)\Big(-\not p + M\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2}\Big)\Psi_{exotic}(p) + \\
&+ \Big(1+\frac{p^2}{M^2}\Big)\bar\Psi_{exotic}(p)M\gamma^5\Psi_{exotic}(p) + \\
&+ \bar\chi_{exotic}(p)M\gamma^5\chi_{exotic}(p)\Big\} = \int L_{0_{exotic}}(x,\tau;M)\,d^4x = \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\,\Big\{\bar\Psi_{exotic}(x,\tau)\Big(i\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n} + M\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2}\Big) i\frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau} + \qquad (5.29)\\
&+ \overline{\Big(i\frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)}\Big(i\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n} + M\gamma^5 - 2M\cos\frac{\mu}{2}\Big)\Psi_{exotic}(x,\tau) + \\
&+ \bar\Psi_{exotic}(x,\tau)M\gamma^5\Psi_{exotic}(x,\tau) + \frac{1}{M}\frac{\partial\bar\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial x^n}\gamma^5\frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial x^n} + \\
&+ \overline{\Big(i\frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)} M\gamma^5\Big(i\frac{\partial\Psi_{exotic}(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)\Big\} .
\end{aligned}
$$

3. Эффективное свободное действие для обычных полей (ср. (5.I7) и (5.I9)):

$$
\begin{aligned}
S_{eff} &= 2\pi\int\bar\Psi(p)\Big[\not p + (1-\cos\mu)M\gamma^5 + 2M\sin\frac{\mu}{2}\Big]\Psi(p)\,d^4p = \\
&= 2\pi\int\bar\varphi(p)(\not p + m)\varphi(p)\,d^4p , \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

где

$$
\varphi(p) = \frac{\cos\frac{\mu}{4} + \gamma^5\sin\frac{\mu}{4}}{\sqrt{\cos\frac{\mu}{2}}}\Psi(p) \equiv U^{-1}(\mu)\Psi(p) . \qquad (5.3I)
$$

4. Эффективное свободное действие для экзотических полей (ср. (5.23) - (5.25)):

$$
\begin{aligned}
S^{eff}_{exotic} &= 2\pi\int\bar\Psi_{exotic}(p)\Big[\not p - (1+\cos\mu)M\gamma^5 + 2M\cos\frac{\mu}{2}\Big]\Psi_{exotic}(p)\,d^4p = \qquad (5.32)\\
&= 2\pi\int\bar\varphi_{exotic}(p)(\not p + m)\varphi_{exotic}(p)\,d^4p ,
\end{aligned}
$$

где

$$
\varphi_{exotic}(p) = \frac{\cos\frac{\pi-\mu}{4} - \gamma^5\sin\frac{\pi-\mu}{4}}{\sqrt{\sin\frac{\mu}{2}}} \equiv U^{-1}_{exotic}(\mu)\Psi_{exotic}(p) . \qquad (5.33)
$$

$$\frac{m}{M} = \sin\mu \neq 0$$

Если $m = 0$, то

$$
S^{eff}_{exotic} = 2\pi\int\bar\Psi_{exotic}(p)\big[\not p + 2M(1-\gamma^5)\big]\Psi_{exotic}(p)\,d^4p . \qquad (5.34)
$$

§6. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

I. В неевклидовой теории поля, развиваемой на базе импульсного пространства постоянной кривизны, существует несколько равноправных выражений для волнового оператора Дирака и, соответственно, несколько типов фермионных полей.

2. Особый интерес представляют "экзотические" ферми-поля. Матричные преобразования $u(p), U(p)$ и $u_{exotic}(p), U_{exotic}(p)$, с помощью которых массовые члены в выражениях для эффективного свободного действия обычного и экзотического полей сводятся к каноническому дираковскому виду, существенно отличаются друг от друга в плоском пределе $M \to \infty$. При наличии взаимодействия это позволит даже в области низких энергий $|p| \ll M$ установить различия в физических свойствах обычных и экзотических частиц.

3. Экзотическое фермионное поле нулевой массы оказывается сугубо неевклидовым, т.е. не имеющим плоского аналога.

4. Квантовая теория неевклидовых ферми-полей строится по той же схеме, что и соответствующие бозонные теории /1,2/, и подобно им может быть представлена в локальной пятимерной форме.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.Н.Боголюбову, А.Н.Лезнову, А.А.Логунову, М.А.Мествиришвили, Р.М.Мир-Касимову, М.В.Савельеву и М.П.Чавлейшвили за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадышевский В.Г., Матеев М.Д. ОИЯИ, Р2-83-844, Дубна, 1983.
2. Донков А.Д. и др. ОИЯИ, Р2-84-109, Дубна, 1984.
3. Markov M.A.Supplement of the Progress of Theoretical Physics.Commemoration Issue for 30-th Anniversary of Meson Theory by Dr.H.Yukawa, 1965, p.85; Марков М.А. ЖЭТФ, т.51, с.878, 1966.
4. Schwinger J. Phys.Rev., 1959, vol.115, No.3, p.721.
5. Osterwalder K., Schrader R.Helvetica Physica Acta,1973,vol.46,p.289.
6. Васильев А.И. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1976.
7. Волобуев И.П. и др. ТМФ, 1979, т. 40, с. 363.
8. Kadyshevsky V.G. N cl.Phys., 1978, B141, p.477.

Донков А.Д. и др. Р2-84-265
Квантовая теория поля и новый универсальный масштаб в области высоких энергий. Поля Дирака

Показано, что в рамках теории поля с неевклидовым импульсным пространством существует несколько равноправных выражений для волнового оператора Дирака, параметрически зависящих от фундаментальной массы M. В результате возникает необходимость рассмотрения фермионных полей различных типов, в том числе экзотических полей, растущих в плоском пределе $M \to \infty$ как $\sqrt{M}$.

Описание всех фермионных полей строится по схеме, принятой в предыдущих работах /1,2/ данной серии. При этом сохраняется важнейшая особенность развиваемого подхода - локальность теории в конфигурационном пространстве пяти измерений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Donkov A.D. et al. P2-84-265
Quantum Field Theory and a New Universal High Energy Scale. Dirac Fields

It is shown that in the framework of field theory with non-Euclidean momentum space there exist several forms for the Dirac wave operator, which depend on the fundamental mass M as a parameter and can be treated on equal footing. As a result, it becomes necessary to consider fermion fields of different types including the so-called exotic fields growing in the flat limit $M \to \infty$ as $\sqrt{M}$.

All fermion fields are described by the scheme adopted in previous papers /1,2/ of this series. The crucial property of the developed approach, locality of the theory in the configurational space of 5 dimensions, is maintained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984