объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-84-250

Е.А.Иванов, С.О.Кривонос

N=4 СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Направлено в журнал "Journal of Physics A: Mathematical and General: Letters to Editor"; Оргкомитет XXII Международной конференции по физике высоких энергий, ГДР, Лейпциг, 1984 г.

1984

1. Суперсимметричные расширения двумерного уравнения Лиувилля

$$u_{+-} = m^2 e^{-2u} \qquad /1/$$

$\left(u_{+-} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^+ \partial x^-} u,\ x^{\pm} = x^0 \pm x^1,\ [m] = L^{-1}\right)$ интересны ввиду их возможной связи с теорией суперструн и четырехмерными суперкалибровочными теориями [1-3].

Простейшее $N = 1$ - расширение уравнения /1/ обсуждалось с разных точек зрения в [3,4]. Суперполевая классическая теория $N = 2$ - уравнения Лиувилля /лагранжиан, представление нулевой кривизны, общее решение/ была построена в нашей работе [5]. Мы показали, в частности, что аналогом дилатона $u(x)$ в случае $N = 2$ является комплексное скалярное $N = 2$ - суперполе, удовлетворяющее грассмановым условиям Коши-Римана. На нем реализована бесконечномерная конформная супергруппа, алгебра которой совпадает с супералгеброй $U(1)$ -струны [6] /с точностью до с-числовых центральных зарядов, имеющих квантовую природу/. $N = 2$ - уравнение обладает калибровочной внутренней $U_+(1) \times U_-(1)$ симметрией.

В настоящей работе построено $N = 4$ - суперсимметричное расширение уравнения Лиувилля, обладающее неабелевой калибровочной группой внутренней симметрии $SU_+(2) \times SU_-(2)$. Это расширение уникально в том смысле, что соответствующий супермультиплет /4+4 физических компоненты на массовой оболочке/ является в двумерии максимально возможным, если не привлекать полей с аномальными конформными размерностями. Основным объектом теории оказывается вещественное кватернионное $N = 4$-суперполе, подчиненное условиям неприводимости типа гипермультиплетных в $D = 4$ [7]. Как условия неприводимости, так и динамические уравнения следуют из представления нулевой кривизны на супералгебре $su(1,1|2)$. В бозонном секторе наряду с дилатоном $u(x)$ присутствуют три скалярных поля $\phi^i(x)$, параметризующих однородное пространство $SU_+(2) \times SU_-(2) / SU(2)$. В пределе исчезающих фермиполей $\phi^i(x)$ удовлетворяют модифицированному варианту уравнений соответствующей нелинейной σ-модели. Полной группой симметрии теории является $SU(2)$-суперрасширение двумерной конформной супергруппы, имеющее своей алгеброй супералгебру $SU(2)$ -струны /без с-числовых центральных членов/.

2. Как и при выводе $N = 2$-уравнения Лиувилля [5], мы используем общий теоретико-групповой подход, оперирующий с нелинейными

реализациями бесконечномерных симметрий. Подробное его изложение на простом примере обычного $N = 0$ уравнения Лиувилля /1/ можно найти в нашей работе [8], поэтому мы не будем здесь входить в детали этого метода. Обозначения и терминология - в основном те же, что и в [5, 8].

Ключевые моменты нашего метода заключаются в выборе бесконечномерной /супер/ алгебры $\mathfrak{G}$, для которой строится нелинейная реализация, и двух ее подалгебр: алгебры стабильности вакуума $\mathfrak{H}$ и алгебры представления нулевой кривизны $\mathfrak{G}_0$. В данном случае в качестве $\mathfrak{G}$ берется прямая сумма двух контактных супералгебр $K^A_\pm(1|2)$ со следующими коммутационными соотношениями [6]*:

$$
\begin{aligned}
& i[L^n_\pm, L^m_\pm] = (n-m) L^{n+m}_\pm , \\
& \{G^r_{a\pm}, \bar{G}^{s\beta}_\pm\} = -2\delta^\beta_a L^{r+s}_\pm + 2(r-s)(\sigma^k)^\beta_a T^{r+s}_{k\pm} , \\
& [T^p_{k\pm}, T^\ell_{i\pm}] = \epsilon_{kij} T^{p+\ell}_{j\pm} , \\
& i[L^n_\pm, G^r_{a\pm}] = \left(\frac{n}{2} - r\right) G^{r+n}_{a\pm} , \\
& i[L^n_\pm, T^p_{k\pm}] = -pT^{p+n}_{k\pm} , \\
& i[T^p_{k\pm}, G^r_{a\pm}] = -\frac{1}{2}(\sigma_k)^\beta_a G^{r+p}_{\beta\pm} , \\
& \{G^r_{a\pm}, G^s_{\beta\pm}\} = \{\bar{G}^{ra}_\pm, \bar{G}^{sa}_\pm\} = 0
\end{aligned}
\qquad /2/
$$

/ $n,m = -1,0,1,\ldots$; $r, s = -1/2, 1/2, 3/2,\ldots$; $p, \ell = 0,1,2,\ldots$; $a, \beta = 1,2$; $i, j, k = 1,2,3$/. Супералгебра /2/ содержит в своем четном секторе, наряду с алгеброй двумерной конформной группы $K_\pm(1) = \{L^n_\pm\}$, две калибровочные алгебры $\{T^p_{k\pm}\}$ с локальной частью $su_+(2) \oplus su_-(2) = \{T^0_{k\pm}\}$. Алгебра $su_+(2) \oplus su_-(2)$ является алгеброй автоморфизмов спинорных зарядов плоской $N = 4$ супералгебры Пуанкаре, порождаемой генераторами $U = L^0_+ - L^0_-$ /лоренцевы псевдовращения/, $L^{-1}_\pm$ /трансляции/ и $G^{-1/2}_{a\pm}, \bar{G}^{-1/2\,a}_\pm$ /супертрансляции/.

Далее по супералгебре $\mathfrak{G}$ строится /формально/ бесконечномерная супергруппа G и рассматривается нелинейная реализация G в ее

---

*Полная супералгебра $SU(2)$ -струны [6] отличается от /2/ тем, что содержит генераторы всех отрицательных конформных размерностей, а также с-числовые центральные заряды.

некотором фактор-пространстве G/H. Фактор-пространство с минимальным числом существенных параметров /т.е. таких, через которые ковариантно выражаются все остальные/ получается, если выбрать $H = SO(1,1) \times SU(2)$ с генераторами U, $T^0_k = T^0_{k+} + T^0_{k-}$. Существенными параметрами являются координаты $N = 4$-суперпространства $x^\pm$, $\theta^{\pm a}$, $\bar{\theta}^\pm_a$, связанные с генераторами $L^{-1}_\pm$, $G^{-1/2}_{\pm a}$, $\bar{G}^{-1/2\,a}_\pm$, и суперполя $u(x,\theta,\bar\theta)$, $\phi^i(x,\theta,\bar\theta)$, отвечающие генератору дилатаций $L^0_+ + L^0_-$ и генераторам $T^0_{k+} - T^0_{k-} \in su_+(2) \times su_-(2)/su(2)$.

Следующий этап - построение формы Картана Ω на супералгебре $\mathfrak{G}$ и ковариантная редукция Ω к 1-форме Ω^{Red}_0, удовлетворяющей условию нулевой кривизны на некоторой супералгебре $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$

$$d^{ext}\,\Omega^{Red}_0 - \Omega^{Red}_0 \wedge \Omega^{Red}_0 = 0 . \qquad /3/$$

Эта редукция, как и в $N = 0$, $N = 1$ и $N = 2$ случаях [5, 8], осуществляется приравниванием нулю той части Ω, которая лежит вне $\mathfrak{G}_0$. Представление нулевой кривизны для Ω^{Red}_0 гарантированно следует из этих условий редукции и кинематического уравнения Маурера-Картана для исходной 1-формы Ω. В качестве $\mathfrak{G}_0$ мы выберем $N = 4$ - расширение алгебры представления нулевой кривизны $N = 0$ - уравнения Лиувилля $s\ell(2,R)$ -супералгебру $su(1,1|2)$, порождаемую следующими линейными комбинациями генераторов /2/

$$
\begin{aligned}
& R_\pm = L^{-1}_\pm + m^2 L^1_\mp , && Q_{a\pm} = G^{-1/2}_{a\pm} \pm m G^{1/2}_{a\mp} , \qquad /4/ \\
& U,\ T^0_i , && \bar{Q}^a_\pm = \bar{G}^{-1/2\,a}_\pm \pm m \bar{G}^{1/2\,a}_\mp .
\end{aligned}
$$

В дальнейшем нам понадобятся в явном виде лишь спинорные компоненты 1-формы Ω^{Red}_0 /разд.5/.

3. Условие ковариантной редукции

$$\Omega = \Omega^{Red}_0 \in su(1,1|2) \qquad /5/$$

эквивалентно бесконечной системе уравнений Пфаффа, выражающих параметры-суперполя фактор-пространства G/H через существенные суперполя $u(x,\theta,\bar\theta)$, $\phi^i(x,\theta,\bar\theta)$ и приводящих, в силу /3/, к динамическим связям на последние. Эти связи и есть искомое $N = 4$ - расширение уравнения Лиувилля:

$$D^{(a}_- q^{\beta)}_\gamma = 0, \quad \bar{D}_{+(a} q^\beta_{\gamma)} = 0 ; \qquad /6/$$

$$
\begin{aligned}
& D^a_-(q D^\gamma_+ q^{-1})_\gamma{}^\beta = 0 , \qquad /7/ \\
& D^a_+(q^{-1} \bar{D}_{-\gamma}\, q)^\gamma_\beta = -4im\bar{q}^a_\beta ,
\end{aligned}
$$

где u и ϕ^i объединены в одно вещественное кватернионное суперполе

$$q^\beta_a \equiv (e^{-u-i\phi\cdot\sigma})^\beta_a, \quad \bar{q}^a_\beta = (e^{-u+i\phi\cdot\sigma})^a_\beta = -\epsilon_{\beta\gamma}\epsilon^{a\delta} q^\gamma_\delta , \qquad /8/$$

и введены $N = 4$ - спинорные ковариантные производные:

$$D^{\alpha}_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\pm}_{\alpha}} + i\theta^{\alpha\pm}\frac{\partial}{\partial x^{\pm}}, \quad \bar{D}_{\pm\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha\pm}} + i\bar{\theta}^{\pm}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\pm}}, \tag{9}$$

$$\{D^{\alpha}_{\pm}, \bar{D}_{\pm\beta}\} = 2i\delta^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\pm}}.$$

Соотношения /6/ есть условия неприводимости суперполя q^{α}_{β}, непосредственно обобщающие условия грассмановой аналитичности случая $N = 2$[5]. Легко проверяется их совместность с динамическими уравнениями /7/. С учетом вещественности q^{α}_{β} соотношения /6/ выполняются и для сопряженных спинорных производных. Связи такого типа хорошо известны в $D = 4$: они выделяют там простейшее представление $N = 2$ - суперсимметрии, гипермультиплет [7]. Это соответствие легко понять, если учесть, что рассматриваемая $N = 4$ - суперсимметрия двумерия связана размерной редукцией с $N = 2$ - суперсимметрией в $D = 4$.

Неприводимый состав суперполя q^{α}_{β} насчитывает 8 бозонов

$$(q_0)^{\alpha}_{\beta} = q^{\alpha}_{\beta}|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \quad C_1 = D_{-\alpha}D^{\beta}_{+}q^{\alpha}_{\beta}|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \quad C_2 = \bar{D}_{-\alpha}D^{\beta}_{+}q^{\alpha}_{\beta}|_{\theta=\bar{\theta}=0} \tag{10}$$

и 8 фермионов

$$\Psi^{\alpha}_{-} = -(\bar{q}D^{\beta}_{-}\bar{q}^{-1})^{\alpha}_{\beta}|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \quad \chi^{\alpha}_{+} = (D^{\beta}_{+}qq^{-1})^{\alpha}_{\beta}|_{\theta=\bar{\theta}=0}. \tag{11}$$

Поля C_1, C_2 - вспомогательные, поэтому на массовой поверхности q^{α}_{β} содержит 4+4 компоненты, что точно соответствует составу гипермультиплета [7].

Уравнения в компонентах можно получить последовательным применением к /7/ спинорных производных и выделением не зависящих от $\theta, \bar{\theta}$ членов в возникающих соотношениях. Таким путем находим

$$C_1(x) = -(\chi_+ q_0 \Psi^-), \quad C_2(x) = 4im\,\mathrm{Sp}\,(q_0\bar{q}_0) + (\chi_+ q_0 \bar{\Psi}_-), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \partial_+(q_0^{-1}\partial_- q_0)^{\beta}_{\alpha} &= -m^2(\bar{q}_0 q_0)^{\beta}_{\alpha} - \frac{im}{8}[\delta^{\beta}_{\alpha}(\Psi_-\bar{q}_0\bar{\chi}_+) - (\bar{q}_0\chi_+)_{\alpha}\bar{\Psi}^{\beta}_{-} - \\ &\qquad - \Psi_{-\alpha}(\bar{\chi}_+ q_0)^{\beta}], \\ \partial_+\Psi^{\alpha}_{-} &= -m\chi^{\beta}_{+}q^{\ \alpha}_{0\beta}, \\ \partial_-\chi^{\alpha}_{+} &= m\Psi^{\beta}_{-}\bar{q}^{\ \alpha}_{0\beta}. \end{aligned} \tag{13}$$

Бозонный сектор системы /13/ в пределе исчезающих фермионных полей описывается уравнением

$$\partial_+(q_0^{-1}\partial_- q_0)^{\beta}_{\alpha} = -m^2(\bar{q}_0 q_0)^{\beta}_{\alpha}. \tag{14}$$

После выделения обычного уравнения Лиувилля на поле $u(x) = u(x,\theta,\bar{\theta})|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\ln(\bar{q}_0 q_0)$, соответствующего шпуровой части /14/, остается три уравнения

$$\partial_+\mathrm{Sp}(q_0\sigma^i\partial_- q_0^{-1}) = \partial_+\mathrm{Sp}(g^{-1}\sigma^i\partial_- g) = 0; \quad g = e^{i\phi\cdot\sigma} \in SU(2). \tag{15}$$

Уравнение /15/ отличается от стандартного уравнения нелинейной σ-модели для главного поля на группе SU(2) отсутствием члена с переставленными ∂_+ и ∂_-. Это отличие оказывается весьма существенным. Во-первых, оно обеспечивает наличие у /15/ калибровочной группы $SU_+(2)\times SU_-(2)$:

$$g(x) \to e^{ia(x^+)}\, g(x)\, e^{ib(x^-)}, \tag{16}$$

где $a(x^+)$, $b(x^-)$ - произвольные функции со значениями в алгебре su(2) /преобразования /16/ в инфинитезимальной форме дают реализацию генераторов $\{T^p_{k\pm}\}$, входящих в супералгебру /2//. Благодаря /16/ уравнение /15/ легко интегрируется в общем виде:

$$g(x) = g_1(x^+)\cdot g_2(x^-). \tag{17}$$

Во-вторых, уравнение /15/ и вместе с ним вся система /13/ являются нелагранжевыми /по крайней мере, в тех переменных, в которых они записаны/. Более подробно свойства уравнений /15/, в частности, вопрос о возможности перехода к лагранжевым переменным, обсуждаются в другой нашей работе.

4. По самому способу их вывода уравнения /6/, /7/ обладают бесконечномерной симметрией относительно преобразований суперконформной группы G, построенной по супералгебре /2/ и реализованной левыми сдвигами на фактор-пространстве G/H. Прямое вычисление дает инфинитезимальную реализацию этих преобразований на координатах $N = 4$ - суперпространства и суперполе q^{β}_{α}:

$$\delta x^{\pm} = e^{i(\theta^{\pm}\bar{\theta}^{+})\partial_{\pm}}(\frac{1}{2}f^{\pm} + i\theta^{\pm}\bar{\zeta}^{\pm}) + e^{-i(\theta^{\pm}\bar{\theta}^{+})\partial_{\pm}}(\frac{1}{2}f^{\pm} - i\zeta^{\pm}\bar{\theta}^{\pm}), \tag{18}$$

$$\delta\theta^{\alpha\pm} = e^{i(\theta^{+}\bar{\theta}^{+})\partial_{\pm}}[\zeta^{\alpha\pm} + \frac{1}{2}f^{\pm\prime}\theta^{\alpha\pm} + 2i(\theta^{\pm}\bar{\zeta}^{\pm\prime})\theta^{\alpha\pm} + \frac{i}{2}a^{k\pm}(\theta^{\pm}\sigma^{k})^{\alpha}], \tag{19}$$

$$\delta q = \omega_+ q + q\omega_- ,$$

$$\omega_{+a}^{\ \beta} = \frac{1}{2}(D_+^{\beta}\,\delta\bar\theta_a^{+} - \bar D_{+a}\,\delta\theta^{\beta+} - \delta_a^{\beta} D_+^{\lambda}\,\delta\bar\theta_\lambda^{+}), \qquad /20/$$

$$\omega_{-a}^{\ \beta} = \frac{1}{2}(\bar D_{-a}\,\delta\theta^{\beta-} - D_-^{\beta}\,\delta\bar\theta_a^{-} - \delta_a^{\beta}\bar D_{-\rho}\,\delta\theta^{-\rho}),$$

где $f^{\pm}(x^{\pm})$, $\zeta^{a\pm}(x^{\pm})$, $a^{k\pm}(x^{\pm})$ - инфинитезимальные параметры-функции конформных, локальных суперсимметричных и локальных $SU_{\pm}(2)$ -преобразований. Координатные преобразования /18/ в эквивалентной записи через комплексные переменные $\xi^{\pm} = x^{\pm} + i\theta^{\pm}\bar\theta^{\pm}$ или $(\xi^{\pm})^{+}$ совпадают с полученными в [2]. Нетрудно убедиться в том, что ковариантные дифференциалы $\Delta x^{\pm} = dx^{\pm} + i(\theta^{\pm a} d\bar\theta_a^{\pm} - d\theta^{\pm a}\bar\theta_a^{\pm})$ при этих преобразованиях просто умножаются на некоторую суперфункцию, в согласии с общим определением контактных супералгебр [9].

5. То обстоятельство, что система /6/, /7/ эквивалентна условию нулевой кривизны 1 - формы Ω_0^{Red} /3/, означает, что она является условием совместности некоторой линейной задачи в $N=4$-суперпространстве. Однако минимальная задача пишется через спинорные компоненты 1-формы Ω_0^{Red} /3/:

$$\Omega_0^{Red} = d\theta^{\pm a}\,\bar\Omega_{\pm a} + d\bar\theta_a^{\pm}\,\Omega_{\pm}^{a} + \Delta x^{\pm}\,\Omega_{\pm}^{x}, \qquad /21/$$

где

$$\Omega_+^{a} = -\frac{i}{4}(qD_+^{\beta}q^{-1})_{\beta}^{a}\,U + i(\bar q D_+^{a}\bar q^{-1}\sigma^k)T_0^k + (\bar{\bar q})_{\beta}^{a}\bar Q^{+\beta},$$

$$\bar\Omega_{-a} = -\frac{i}{4}(q^{-1}\bar D_{-\beta}q)_a^{\beta}\,U + i(\bar q^{-1}\bar D_{-a}\bar q\sigma^k)T_0^k + (\bar{\bar q})_a^{\beta}Q_{\bar\beta},$$

$$\bar\Omega_{+a} = \frac{i}{4}(\bar q^{-1}\bar D_{+\beta}\bar q)_a^{\beta}\,U + i(\bar q\bar D_{+a}\bar q^{-1}\sigma^k)T_0^k + (\bar q)_a^{\beta}Q_{\beta}^{+},$$

$$\Omega_-^{a} = \frac{i}{4}(\bar q D_-^{\beta}\bar q^{-1})_{\beta}^{a}\,U + i(\bar q^{-1}D^{-a}\bar q\sigma^k)T_0^k + (\bar q)_{\beta}^{a}\bar Q^{-\beta},$$

$$\bar q_a^{\ \beta} = (\exp(-\frac{1}{2}(u + i\phi\cdot\sigma)))_a^{\beta} .$$

Образуем удлиненные спинорные производные

$$\nabla_{\pm}^{a} = D_{\pm}^{a} + \Omega_{\pm}^{a}, \quad \bar\nabla_{\pm a} = \bar D_{\pm a} + \bar\Omega_{\pm a} . \qquad /23/$$

Нетрудно проверить, что система /6/, /7/ эквивалентна связям

$$\{\nabla_-^{a}, \nabla_-^{\beta}\} = \{\nabla_-^{a}, \bar\nabla_{+\beta}\} = \{\nabla_-^{a}, \nabla_+^{\beta}\} = 0 . \qquad /24/$$

За исключением антикоммутаторов, определяющих удлиненную векторную производную,

$$\{\nabla_{\pm}^{a}, \bar\nabla_{\pm\beta}\} = 2i\delta_{\beta}^{a}\nabla_{\pm}^{x} = 2i\delta_{\beta}^{a}(\partial_{\pm}^{x} + \Omega_{\pm}^{x}), \qquad /25/$$

все остальные коммутаторы и антикоммутаторы исчезают как следствие /24/. Иными словами, полное представление нулевой кривизны для 1-формы $\Omega_0^{Red} \subset su(1,1|2)$ индуцируется таким представлением для ее спинорных компонент. Заметим, что для вычисления /24/ нет необходимости знать структурные соотношения всей супералгебры $su(1,1|2)$ /4/. Операторы $\nabla_-^{a}, \bar\nabla_{+\beta}$ заданы на ее градуированной подалгебре $\{U, T_0^k, Q_{a+}, \bar Q_-^{\beta}\}$, а ∇_+^{a} - на сопряженной подалгебре $\{U, T_0^k, Q_{a-}, \bar Q_+^{a}\}$. Хотя эти подалгебры не коммутируют и в замыкании порождают всю $su(1,1|2)$, в последней из связей /24/ фигурирует лишь антикоммутатор $\{\bar Q_+^{a}, \bar Q_-^{\beta}\} = 0$, не выводящий за пределы указанных подалгебр. Простейшая линейная задача пишется для фундаментального представления $su(1,1|2)$ и имеет матричную размерность 4x4:

$$\nabla_{\pm}^{a} V = \bar\nabla_{\pm\beta} V = 0 , \qquad /26/$$

где V - столбец четырех комплексных $N = 4$-суперполей. Из-за громоздкости получающихся выражений мы не будем расписывать /26/ в явном виде.

Несколько слов о геометрическом смысле уравнений /6/, /7/. Представление /3/ можно интерпретировать как уравнение Маурера-Картана на однородном суперпространстве $SU(1,1|2)/SO(1,1) \times SU(2)$, возникающем в результате ковариантной редукции исходного бесконечномерного фактор-пространства $G/SO(1,1) \times SU(2)$. Это суперпространство представляет собой $N = 4$-суперсимметризацию псевдосферы $SL(2,R)/SO(1,1)$. Так же как любое решение уравнения Лиувилля /1/ задает некоторую частную параметризацию этой псевдосферы, любое решение его $N = 4$ - расширения задает некоторую параметризацию суперсферы $SU(1,1|2)/SO(1,1) \times SU(2)$.

6. Построенные нами уравнения дают реализацию супералгебры $SU(2)$ -струны, отличную от рассмотренной в [2]. Хотя по числу физических компонент /4+4/ лиувиллевский $N = 4$-супермультиплет совпадает с базисным супермультиплетом $SU(2)$- струны в формулировке [2], их свойства по отношению к группе автоморфизмов $SU(2)$ существенно разные: физические бозоны в [2] - $SU(2)$-синглеты, а у нас преобразуются по представлению $1 \oplus 3$. В этой связи было бы интересно проквантовать систему /12/, /13/ и посмотреть, какой вариант $SU(2)$-струны при этом получится. Могло бы оказаться, например, что такая теория будет свободна от основного недостатка стандартной формулировки - присутствия духовых состояний при любой размерности пространства. Для проведения квантования желательно, конечно, привести систему /12/, /13/ к явно лагранжевой форме.

В заключение подчеркнем то обстоятельство, что $N=1$, $N=2$ и $N=4$ - суперрасширения уравнения Лиувилля естественно формулируются в терминах вещественного, комплексного и кватернионного суперполей, подчиненных в двух последних случаях подходящим условиям грассмановой аналитичности. Это соответствие - еще один аргумент в пользу наличия глубокой внутренней связи между суперсимметриями и системами гиперкомплексных чисел, часто обсуждаемой последнее время в литературе.

Мы искренне признательны Д.А.Лейтесу за обсуждение структуры контактных супералгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ademollo M. et al. Nucl.Phys., 1976, B111, p. 77; Brink L., Schwarz J. Nucl.Phys., 1977, B121, p. 285.
2. Ademollo M. et al. Nucl.Phys., 1976, B114, p. 297.
3. Polyakov A.M. Phys.Lett., 1981, B103, p. 207, 211.
4. Chaichian M., Kulish P.P. Phys.Lett., 1978, 78B, p. 413; Girardello L., Sciuto S. Phys.Lett., 1978, 77B, p. 267; Leznov A.N., Saveliev M.V., Leites D.A. Phys.Lett., 1980, 96B, p. 97.
5. Ivanov E.A., Krivonos S.O. Lett.Math.Phys., 1983, 7, p. 523.
6. Ademollo M. et al. Phys.Lett., 1976, 62B, p. 105.
7. Fayet P. Nucl.Phys., 1976, B113, p.135; 1979, B149, p. 137; Sohnius M.F. Nucl.Phys., 1978, B138, p. 109; Sohnius M.F., Stelle K.S., West P.C. In: "Supergravity and Superspace", Eds. S.W.Hawking and M.Roček. Cambridge University Press, 1981.
8. Ivanov E.A., Krivonos S.O., ТМФ, 1984, 58, с. 200; Lett.Math. Phys., 1984, 8, p. 39.
9. Kac V.G. Comm.Math.Phys., 1977, 53, p. 31; Adv.Math., 1977, 26, p. 8.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1984 года.

Иванов Е.А., Кривонос С.О. P2-84-250

$N=4$ суперсимметричное уравнение Лиувилля

Построено суперполевое $N=4$-суперрасширение уравнения Лиувилля с внутренней калибровочной $SU(2)\times SU(2)$ симметрией. Оно формулируется в терминах вещественного кватернионного $N=4$-суперполя, удовлетворяющего определенным условиям грассмановой аналитичности, и обладает представлением нулевой кривизны на супералгебре $su(1,1|2)$. Обсуждается возможная связь полученной системы с $SU(2)$ -суперструной.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Ivanov E.A., Krivonos S.O. P2-84-250

$N=4$ Super-Liouville Equation

We present a superfield $N=4$ superextension of the Liouville equation with gauge $SU(2)\times SU(2)$ symmetry. It is formulated in terms of real quaternionic $N=4$ superfield subjected to certain Grassmann analyticity constraints and possesses a zero-curvature representation of superalgebra $su(1,1|2)$. A possible relevance of the obtained system to $SU(2)$ -superstring is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984