объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-229

П.П.Физиев

НОВЫЙ СПОСОБ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПУТЯМ

Направлено на VII Международное совещание
по проблемам квантовой теории поля.
Алушта, 1984 г.

1984

При стандартном вычислении интеграла по путям на конфигурационном пространстве $M_q^{(n)}$ системы с $n < \infty$ степенями свободы, который задает матричные элементы квантового оператора эволюции $\hat{G}(t'', t') = T\exp(-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\hat{H}dt)$ в представлении Шредингера

$$K(q'',t''; q', t') = \langle \hat{G} \rangle_{q''q'} = \int \mathfrak{D}(q(t)) \{\exp[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, q, t)\, dt]\}, \qquad /1/$$

применяют разные конечномерные аппроксимации классических путей [1-5]. Обычно при этом говорят, что матричный элемент K получен путем усреднения по всем виртуальным путям в $M_q^{(n)}$.

Аналогичная идея применяется и в формализме интеграла по путям на фазовом пространстве $M_{pq}^{(2n)}$ механической системы [6-16]

$$K(q'', t''; q', t') = \int \mathfrak{D}(p(t), q(t)) \exp[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} (pdq - H^{Cl}(p, q, t))\, dt]. \qquad /2/$$

Известно, что разные аппроксимации интегралов /1/ и /2/ приводят к разным конечным результатам и что это эквивалентно неоднозначности задачи квантования классических систем [9-16].

В пространстве $M_{pq}^{(2n)}$ гораздо больше виртуальных путей, чем в $M_q^{(n)}$, так как его размерность вдвое больше, а учитываемые в /1/ пути отображаются в $M_{pq}^{(2n)}$ при помощи операции поднятия из $M_q^{(n)}$, т.е. для них тождественно удовлетворяются соотношения

$$p^a = \partial_{\dot{q}_a} L(\dot{q}, q, t), \quad a = 1, \ldots, n.$$

Виртуальные пути на $M_{pq}^{(2n)}$ не обязаны удовлетворять этим соотношениям, которые в механике Гамильтона являются уравнениями движения [17]. Несмотря на это, обычно утверждают, что в /2/ также надо суммировать по всем виртуальным путям на $M_{pq}^{(2n)}$. Анализ применяемой на практике процедуры вычислений показывает, что это не так [18].

Нетрудно привести качественные соображения, которые показывают, что в интеграле по путям нельзя суммировать по всем виртуальным путям на $M_{pq}^{(2n)}$. Выполним каноническое преобразование Гамильтона-Якоби от переменных (p,q) к переменным (P,Q), которое приводит к равному нулю новому гамильтониану и имеет собственную функцию $\Phi_Q(p, q, t)$ [19,20]. Тогда форма действия

Картана-Пуанкаре δA, определенная на пространстве состояний системы $M^{(2n+1)}_{pqt}$, преобразуется, согласно формуле

$$\delta A = \Sigma p dq - H^{Cl} dt = \Sigma P dQ + d\Phi_Q . \qquad /3/$$

Следуя терминологии /21/, назовем поверхностями Майера такие $(n+1)$-мерные гиперповерхности $M^{(n+1)}_{Pt}(Q)$ в $M^{(2n+1)}_{pqt}$, на которых сужение δA есть замкнутая форма. Поверхности Майера можно задавать уравнениями

$$Q_a(p, q, t) = C_a = \text{const}, \quad a = 1, \dots, n, \qquad /4/$$

глобально, если они являются ориентируемыми многообразиями, или локально, в противном случае. Согласно /3/, Q_a являются полным набором локальных первых интегралов механической системы с классическим гамильтонианом $H^{Cl}(p, q, t)$. Придавая константам C_a всевозможные допустимые значения, получаем слоение пространства состояний $M^{(2n+1)}_{pqt}$, которое назовем слоением Майера $\mathfrak{M}_Q$. На возможно глубокую роль поверхностей Майера в квантовой теории указывалось Дираком и Сингом еще в /22,23/.

Все гомотопически эквивалентные пути, соединяющие две точки на заданном слое $M^{(n+1)}_{Pt}(Q)$, имеют одинаковые приращения действия и дают одинаковый вклад в интеграл по путям /2/. Эти пути можно занумеровать элементами соответствующей бесконечномерной группы гомотопии слоя $M^{(n+1)}_{Pt}(Q)$ /24/. Суммируя по всем гомотопически эквивалентным путям в /2/, мы получили бы бессмысленный, заведомо бесконечный результат. В интеграле по путям /2/ нужно учитывать только по одному представителю каждого гомотопического класса путей, что аналогично факторизации Фаддеева-Попова в интеграле по путям для систем со связями /25,26,11/. Однако в нашем случае нет никаких связей, и так как введение детерминанта Фаддеева-Попова не проходит, приходится проводить факторизацию прямым путем /27,28/.

Наметим основные этапы предлагаемой процедуры:

1. Вычислим матричные элементы оператора эволюции за малые времена, согласно формуле

$$\mathcal{K}_Q(q'', t''; q', t') = \int_C \sum_{n',n''}^{N',N''} \sum_{a \in \pi_{Q=C}} \Theta^{n'n''a}_{Q=C} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta\Phi^{n'n''a}_{Q=C}\right) d\mu^{n'n''a}_{Q=C}, \qquad /5/$$

которая обобщает использованный Фейнманом /1,6/ метод, восходящий к Дираку /29/ и уточненный Паули /30/. В ней

$$\Delta\Phi^{n'n''a}_{Q=C} = \Phi_{Q=C}(p'', q'', t'') - \Phi_{Q=C}(p', q', t')$$

есть приращение действия на соответствующем классе гомотопически эквивалентных путей, которые соединяют точки (p'', q'', t''), $(p', q', t') \in M^{(n+1)}_{Pt}(Q)$. В отличие от других способов конечномерных аппроксимаций интегралов по путям /2/, зная Φ_Q, мы вычисляем точно приращение действия в случае гамильтониана $H^{Cl}(p, q, t)$ общего вида, что возможно благодаря /3/ и /4/. Функция $\Phi_Q(p, q, t)$ на $M^{(2n+1)}_{pqt}$ является решением линейного уравнения в частных производных первого порядка, которое заменяет уравнение Гамильтона-Якоби

$$\partial_t \Phi + [\Phi, H^{Cl}] = \Sigma p \partial_p H^{Cl} - H^{Cl}. \qquad /6/$$

Она удовлетворяет начальному условию $\Phi_Q(p, q, t_0) = \mathfrak{W}(p, q)$ и обладает рядом интересных свойств /19,20,31/.

Суммирование по элементам фундаментальной группы $\pi_{Q=C} \ni a$ многосвязанного слоя $M^{(n+1)}_{Pt}(Q)$ учитывает интерференцию слагаемых $\exp(\frac{i}{\hbar}\Delta\Phi_Q)$ от разных классов гомотопически эквивалентных путей на этом слое. Суммирование по $n' = 1, \dots, N'$ и $n'' = 1, \dots, N''$, где N' и N'' задают количество листов этого слоя соответственно над точками (q', t') и (q'', t'') пространства событий $M^{(n+1)}_{qt}$, учитывает многозначность проектирования поверхности $M^{(n+1)}_{Pt}(Q)$ на $M^{(n+1)}_{qt}$.

Интегрирование по допустимым значениям констант C_a с мерой $d\mu^{n'n''a}_{Q=C}$ описывает интерференцию слагаемых $\exp(\frac{i}{\hbar}\Delta\Phi_{Q=C})$ от каждого слоя $\mathfrak{M}_Q$ и обобщает обычное интегрирование по импульсам при конечномерных аппроксимациях интеграла по путям /2/. Если $M^{(n+1)}_{Pt}(Q)$ односвязанна и проектируется однозначно на $M^{(n+1)}_{qt}$, то необходимость в суммирований по n', n'' и a отпадает, и

$$d\mu_{Q=C} = \left(\partial_C p''_Q \, \overline{\partial_C p'_Q}\right)^{1/2} (2\pi\hbar)^{-n} \, |d^n C|, \qquad /7/$$

где $\partial_C p_Q$ есть якобиан замены $C_a \to p^a_Q(q, t; C)$. Последние функции определяются неявным образом соотношениями /4/.

Вид меры $d\mu_{Q=C}$ определяется геометрическими соображениями с точностью до множителя $(2\pi\hbar)^{-n}$, который фиксируется нормировкой пропагатора. В /7/ чертой обозначено комплексное сопряжение, так как вычисление $\mathcal{K}_Q$ и K_Q требует учета комплексных путей в комплексифицированном пространстве классических состояний $CM^{(2n+1)}_{pqt}$ /для учета туннелирования, особенностей поверхностей Майера в комплексной области, а также в тех случаях, когда q' и q'' - из классически запрещенных областей в $M^{(n)}_q$ /32-35/ при заданных C_a/.

Для многосвязанных $CM^{(n+1)}_{Pt}(Q)$ из-за изменения фазы якобиана $\partial_C p_Q$ на пути $a \in \pi_{Q=C}$ в $d\mu_{Q=C}$ будут возникать фазовые множители $\chi(a) = \exp[i\pi k(a)]$, где $k(a)$ есть целое число

$$k(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_a d(\ln \partial_C p_Q).$$

Появление таких множителей в квантовом БВК приближении было замечено Келлером [34] и применялось Масловым в его теории канонического оператора [35]. Заметим, что $K_{BWK}(q'',t'';q',t')$ получается из /5/ методом стационарной фазы.

В случае многозначно проектируемых на $CM^{(n+1)}_{qt}$ поверхностей $CM^{(n+1)}_{Pt}$ при прохождении пути через особые точки проекции /точки возврата и каустики/ в /7/ появятся и фазовые множители $\chi^{n'n''}$, вычисление которых связано с представлениями группы монодромии слоя $CM^{(n+1)}_{Pt}$. Из-за фазовых множителей в общем случае в /5/ на меру $d\mu^{n'n''a}_{Q=C}$ следует "навесить" индексы n', n'' и a.

Индикаторы причинности $\Theta^{n'n''a}_{Q=C}$ из /5/ учитывают хронологическое упорядочение точек пути на $CM^{(n+1)}_{Pt}$. Для вещественных путей они равняются функции Хевисайда $\Theta(t''-t')$, а в комплексной области они должны исключать из интеграла по путям и пути, соответствующие экспоненциально возрастающим на бесконечности решениям уравнения Шредингера.

2. Для t, близких к t_0, функция K_Q из /5/ должна совпадать с точной K_Q из /2/ до членов второго порядка по Δt. Это позволяет получить точные выражения для матричных элементов единичного оператора $\hat{I} = \hat{G}(t_0+0,\, t_0)$ на пространстве Гильберта $\mathcal{H}(|\psi\rangle)$ квантовых состояний $|\psi\rangle$, а также и для матричных элементов квантового гамильтониана $\hat{H} = i\hbar\partial_t \hat{G}(t_0+0,\, t_0)$, исходя из /5/:

$$\langle \hat{I}_Q \rangle_{q''q'} = m_Q(q'', q') = \sum_{C,n',n'',a} \theta^{n'n''a}_{Q=C} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta W^{n'n''a}_{Q=C}\right) d\nu^{n'n''a}_{Q=C}, \quad /8/$$

$$\langle \hat{H}_Q \rangle_{q''q'} = \sum_{C,n',n'',a} \theta^{n'n''a}_{Q=C} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta W^{n'n''a}_{Q=C}\right) h_Q(q'',C)\, d\nu^{n'n''a}_{Q=C}, \quad /9/$$

где $\theta^{n'n''a}_{Q=C}$ и

$$d\nu^{n'n''a}_{Q=C} = \chi^{n'n'}\chi(a)\{\det[\partial^2_{qQ} W(q'',C)]\,\overline{\det[\partial^2_{qQ} W(q',C)]}\}^{1/2} (2\pi\hbar)^{-n} |d^n C|$$

получаются из $\Theta^{n'n''a}_{Q=C}$ и $d\mu^{n'n''a}_{Q=C}$ в пределе $t'' = t'+0$, а

$$h_Q(q,Q) = H^{Cl}_Q(q,Q) + \frac{\hbar}{2i}\,\mathrm{tr}(\partial^2_{qQ} W^{-1}\, \partial^2_{qQ} H^{Cl}_Q).$$

В этих формулах $W(q,Q) = \mathcal{W}[p_Q(q,t_0;Q),q]$ есть порождающая функция канонического преобразования $(p,q) \to (P,Q)$ в момент $t = t_0$, $\partial^2_{qQ} W = \| \partial^2_{q_\alpha Q_\beta} W \|$ есть матрица из соответствующих частных производных второго порядка, $\partial^2_{qQ} W^{-1}$ есть обратная матрица, $\det(\partial^2_{qQ} W)$ - детерминант Ван Флека [36], а $H^{Cl} = H^{Cl}[p_Q(q,t_0;Q),q,t_0]$ есть классический гамильтониан на слое $M^{(n+1)}_{Pt}(Q) \in \mathfrak{M}_Q$.

Выражение типа /8/ может совпадать точно или приближенно с δ-функцией Дирака [37,38]. Однако в случае слоения $\mathfrak{M}_Q$ общего вида оно отличается от ядра единичного оператора на лебеговском пространстве $L^{(2)}(M^n_q, d^n q)$.

Отличие матричных элементов оператора от его ядра показывает, что в $\mathcal{H}(|\psi\rangle)$ имеется метрика общего вида, которая задается метрическим оператором $\hat{m}_Q$ с ядром /8/, так что скалярное произведение в $\mathcal{H}(|\psi\rangle, \hat{m}_Q)$ равно

$$(\psi_2, \psi_1) = \langle \psi_2 | \hat{m}_Q | \psi_1 \rangle = \iint d^n q'' d^n q'\, m_Q(q'', q')\, \bar{\psi}_2(q'')\psi_1(q'). \quad /10/$$

Последнее равенство имеет место, если ограничиться пространствами функций на $M^{(n)}_q$. Полученные нами $\mathcal{H}(|\psi\rangle, \hat{m}_Q)$ унитарно эквивалентны лебеговским $L^{(2)}$ [39], однако при недиагональной метрике $\hat{m}_Q$ они задают реализации абстрактного пространства Гильберта с нелокальным скалярным произведением. Такие пространства не применялись в нерелятивистской квантовой механике. По-видимому, это мешало построить квантовый аналог теории канонических преобразований. За исключением тех, которые порождаются линейными по импульсам генераторами, канонические преобразования общего вида, как мы видели, приводят к пространствам $\mathcal{H}(|\psi\rangle, \hat{m}_Q)$ с недиагональной метрикой.

Зная ядро /8/ оператора, можно определить $\mathcal{H}(|\psi\rangle, \hat{m}_Q)$ как неприводимое линейное инвариантное пространство оператора $\hat{m}_Q$, на котором он обратим. Таких пространств может оказаться несколько, что даст соответствующее число квантований классической задачи [27].

Описанная ситуация не была известна при других способах вычисления интегралов по путям.

В пространстве $\mathcal{H}(|\psi\rangle, \hat{m}_Q)$ следует вычислять матричные элементы $\langle \hat{A} \rangle_{\psi_2\psi_1} = (\psi_2, \hat{A}\psi_1)$ оператора $\hat{A}$ по формуле

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi_2\psi_1} = \langle \psi_2 | \hat{m}_Q \hat{A} | \psi_1 \rangle =$$

$$= \iiint d^n q_1 d^n q_2 d^n q_3\, \bar{\psi}_2(q_2)\, m_Q(q_2 q_3)\, A(q_3, q_1)\, \psi_1(q_1),$$

частными случаями которой являются /8/ и /9/. Ядро $A(q_2, q_1)$ выражается через матричные элементы оператора $\hat{A}$ и обратного оператора $\hat{m}_Q^{-1}$ следующим образом:

$$A(q_2,q_1) = \langle q_2|\hat{A}|q_1\rangle = \int d^nq\, m_Q^{-1}(q_2,q)\langle\hat{A}\rangle_{qq_1}\,. \qquad /11/$$

Соответствующее выражение для ядра квантового гамильтониана $\hat{H}_Q$ показывает, что наш способ вычисления K_Q дает правило соответствия между классическими и квантовыми величинами [16,40], которое однозначно определяется выбором слоения Майера $\mathfrak{M}_Q$. Так как $\mathfrak{M}_Q$ есть геометрический объект в $M_{pqt}^{(2n+1)}$, это правило не зависит от выбора канонических переменных (p,q), и формула /5/ пригодна для работы не только в представлении Шредингера, а и в любом другом представлении.

Таким образом, нам удалось сформулировать задачу квантования полностью в терминах классической механики, что позволяет взглянуть по-новому на связанные с этой проблемой формальные и физические вопросы.

В частности, видно, что выбор процедуры квантования эквивалентен выбору максимальной коммутативной алгебры локальных симметрий классической задачи, образующими которой являются $Q_{\alpha=1,\dots,n}$. На квантовом уровне, в случае стационарных и полиномиальных по импульсам Q_α, в число которых входит и сам гамильтониан, это утверждение означает, что, зная $\hat{Q}_\alpha$, можно свести квантовую задачу к совместимой системе уравнений в частных производных, в общем решении которой нет функционального произвола граничной задачи для уравнения Шредингера, что позволяет однозначно выбрать самосопряженное расширение оператора Шредингера. Было бы интересно снять перечисленные ограничения на Q_α, а также решить обратную задачу: востановить слоение Майера по заданному вместе с граничными условиями уравнению Шредингера.

Наш подход к квантованию имеет многочисленные связи с геометрическим квантованием Кириллова-Костанта-Суре [42], которые следует изучить детально, но он представляется более общим, так как в нем отсутствует требование о существовании глобальной группы симметрии классической задачи.

Интересно отметить, что при квантовании теряются те или иные симметрии исходной классической задачи [27]. Требование сохранения алгебры локальных симметрий с генераторами Q_α и на квантовом уровне определяет выбор квантования и дает недостающий в стандартном подходе [41] физический аргумент, определяющий граничные условия в басконечной точке.

3. Последний шаг предлагаемой процедуры состоит в вычислении пропагатора за конечные Δt, т.е. ядра $G(q'',t'';q',t')$ оператора $\hat{G}(t'',t')$, согласно формуле

$$G_Q(q'',t'';q',t') = \lim_{N\to\infty}\int\dots\int d^nq_N\dots d^nq_1\,\mathcal{G}_Q(q'',t'';q_N,t_N)\dots\mathcal{G}_Q(q_1,t_1;q',t'), \qquad /12/$$

которая имитирует суммирование вкладов виртуальных путей в $M_q^{(n)}$ в духе идеи Фейнмана, а также напоминает вычисление предельных

вероятностей в комплексных марковских цепях при помощи мультипликативного интеграла Вольтера. В /12/ через $\mathcal{G}_Q$ обозначено полученное по формуле /11/ ядро оператора эволюции за малые времена - $\hat{\mathcal{G}}_Q(t'',t')$. Если пропагатор за малые Δt удовлетворяет уравнению Смолуховского-Эйнштейна-Маркова-Колмогорова-Чепмена

$$\hat{\mathcal{G}}_Q(t'',t)\,\hat{\mathcal{G}}_Q(t,t') = \hat{\mathcal{G}}_Q(t'',t'):\ t'<t<t'', \qquad /13/$$

то вычисление предела /12/ тривиально и дает

$$\hat{G}_Q(t'',t') = \hat{\mathcal{G}}_Q(t'',t').$$

Именно выполнение соотношения /13/ позволяет вычислять гауссовские интегралы по путям обычными приемами. Оно может выполняться и в негауссовском случае [28]. В нашем способе вычисления интеграла по путям возникает новая возможность - удовлетворить /13/ и тем самым вычислить интеграл /2/ за счет выбора слоения Майера $\mathfrak{M}_Q$.

В качестве иллюстрации предлагаемого способа вычисления интегралов по путям перечислим несколько примеров, детали которых можно найти в [27,28]:

1. Свободная частица с одной степенью свободы: $H = p^2/2m$

А. Выбор $Q = p_0 \equiv p$ приводит к $d\mu_{Q=p} = \dfrac{dp}{2\pi\hbar}$, и к известному результату

$$G_{p_0} = \mathcal{G}_{p_0} = \Theta(\Delta t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\frac{m\Delta q^2}{2\Delta t}\right).$$

Б. Выбор $Q = p^2/2m = E$ приводит к двухлистной поверхности Майера $p^{\pm} = \pm\sqrt{2mE}$. Тогда $d\mu_{Q=E} = \dfrac{dE}{2\pi\hbar}\sqrt{\dfrac{m}{2E}}$, и $G_E = G_E^{(+)} + G_E^{(-)} \equiv G_{p_0}$,

где

$$G^{\pm} = \Theta(\Delta t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\frac{m\Delta q}{2\Delta t}\right)\left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{i}{2}}\left[C\left(\Delta q\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar\Delta t}}\right) - iS\left(\Delta q\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar\Delta t}}\right)\right]\right\},$$

C и S - интегралы Френеля. В обоих случаях $\hat{m}_Q = \hat{I}$, $\hat{H}_Q = \hat{p}^2/2m$-

В. Выбор $Q = \dfrac{p_0}{q_0} = p\left(q - \dfrac{p\Delta t}{m}\right)^{-1}$ дает $d\mu_{Q=C} = \dfrac{dC}{2\pi\hbar}|q'q''|^{1/2}\left(1 + \dfrac{C\Delta t}{m}\right)^{-1}$

$$G_Q = \Theta(\Delta t) \frac{m}{\hbar \Delta t} \left| \frac{q''}{q'} \right| \, |q'' q'|^{1/2} J_0 \left(\frac{m |q' q''|}{\hbar \Delta t} \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{h} \left[\frac{m}{2\hbar \Delta t} (q''^2 + q'^2) - \pi \right] \right\} .$$

При таком нестандартном квантовании задачи $m_Q(q'', q') = 2|q'q''|\delta(q''^2 - q'^2)$, что приводит к двум разным пространствам состояний: $\mathcal{H}^{(+)} \in \psi(q) : q \in (0, \infty)$ и $\mathcal{H}^{(-)} \ni \psi(q) : q \in (-\infty, 0)$. На них

$$\hat{H}_Q^{(\pm)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\hat{q}^2} = \frac{1}{2m} |\hat{q}|^{-1/2} \hat{p} |\hat{q}| \hat{p} |\hat{q}|^{-1/2} .$$

При этом квантовании теряется трансляционная симметрия классической задачи, но сохраняется локальная симметрия с генератором Q, квантовый оператор которого имеет ядро

$$- \frac{m}{\Delta t} \delta(q'' - q') - \frac{i}{\hbar} \frac{m^2}{2\Delta t^2} |q'q''|^{1/2} \operatorname{sign}(q''^2 - q'^2) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} (q''^2 - q'^2) \right]$$

и является зависящим от t квантовым интегралом движения.

Заметим, что эта локальная симметрия теряется при квантованиях А и Б классической задачи.

2. Для $n = 3$ при $H^{Cl} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, $H^{Cl} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{F} \cdot \vec{r}$ и $H^{Cl} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \vec{r}^2$

выбор $\vec{Q} = \vec{p}_0(\vec{p}, \vec{q}, t; t_0)$ /$\vec{p}_0$ - начальные импульсы/ воспроизводит известные результаты /2, 27/.

3. Релятивисткий гамильтониан $H^{Cl} = \pm\sqrt{(\vec{p} - \nabla a(\vec{r}))^2 + m^2}$. Двухзначность H^{Cl} приводит к двухлистному пространству состояний $M_{pqt}^{(7)} = R_{pqt}^{(7)(+)} \cup R_{pqt}^{(7)(-)}$, листы которого соответствуют частице и античастице. В соответствии с этим волновая функция становится двухкомпонентной, а пропагатор - /2x2/ диагональной матрицей, диагональные элементы которой можно записать в четырехмерных обозначениях как

$$G^{(\pm)} = \exp(\Delta a) \Theta(x^\circ) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \exp(-ipx) \delta(p^\circ \mp \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) .$$

Они получаются по /5/ при $\vec{Q} = \vec{p} - \nabla a(\vec{r})$ /$\hbar = 1$, $c = 1$/. Таким образом, интеграл по путям /2/ приводит нас в этом случае к двухкомпонентному формализму Фешбаха-Вилларса для релятивистского скалярного поля.

Данная работа, очевидно, поднимает ряд вопросов формального и физического характера, которые нуждаются в дальнейшем уточнении и исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R. Rev.Mod.Phys., 1948, 20, p. 367.
2. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям, "Мир", М., 1968.
3. De Witt, Rev.Mod.Phys., 1957, 29, p. 377.
4. De Witt-Morette, Maheshwari A., Nelson B. Phys.Rep., 1979, 50, p. 255.
5. Marinov M.S. Phys.Rep., 1980, 1, p. 1.
6. Feynman R. Phys.Rev., 1951, 84, p. 108.
7. Tobocman W. Nuovo Cim., 1956, 3, p. 1213.
8. Martin J.L. Proc.Roy Soc.Lond., 1959, A251, p. 543.
9. Davies H. Proc.Camb.Physl.Soc.,1963, 59, p. 147.
10. Popov V.N. Preprint CERN TH2424, Geneva, 1977.
11. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М., 1967.
12. Abers C., Lee B.W. Phys.Rep., 1973, C9, p.1.
13. Arthurs A. Proc.Roy.Soc., 1969, A313, p. 445.
14. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, с. 194; УФН, 1980, 132, с. 497.
15. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. МГУ, М., 1983.
16. Прохоров Л.В. ЭЧАЯ, 1983, 13, с. 1094.
17. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, "Наука", М., 1979.
18. Fiziev P.P. Bilg. J. Phys., 1983, 10, p. 27.
19. Kijowski J., Tulczyjev W. A Symplectic Framework for Field Theories, Springer, 1979.
20. Физиев П.П. ОИЯИ, Р5-81-52, Дубна, 1981.
21. Буслаев В.С. Вариационное исчисление, ЛГУ, Л., 1980.
22. Dirac P.A.M. Can. J. Math., 1951, 3, p.1.
23. Singe J.L. Phys.Rev., 1953, 89, p. 467; Geometrical Mechanics and de Brogle Waves, Cambrige, 1954.
24. Борисович Ю.Г. и др. Введение в топологию. Высш. школа, М., 1980.
25. Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, p. 29.
26. Фаддеев А.Д. ТМФ, 1969, 1, с. 3.
27. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-83-580, Дубна, 1983.
28. Физиев П.П. ОИЯИ, Р2-83-649, Дубна, 1983.
29. Dirac P.A.M. The Principles of Quantum Mechanics, Oxford, 1958.

30. Pauli W. Feldquantisirung, Lecture notes, Zürich, 1950-51.
31. Fiziev P.P. Bulg. J.Phys., 1979, 6, p. 272.
32. Langhlin D.W. J.Math.Phys., 1972, 13, p. 1099.
33. Lapedes A., Mottola E. Nucl.Phys., 1982, B203, p. 58.
34. Keller J.B. Ann.Phys., 1958, 4, p. 180.
35. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. "Наука", М., 1976.
36. Van Vleck. Proc.Acad.Sci.,1928, 14, p. 178.
37. Фок В.А. Начала квантовой механики. "Наука", М., 1976.
38. Amiet J.P., Huguenin P., Helv. Phys.Acta, 1982, 55, p. 469.
39. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. "Мир", М., 1977.
40. Cohen L. J.Math.Phys., 1966, 7, p. 781.
41. СБМ, Функциональный анализ под ред. Крейна С.Г. "Наука", М., 1972.
42. Sniaticki J. Appl.Math.Sci., 1980, 30, p.1.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1984 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Физиев П.П. Р2-84-229

Новый способ конечномерных аппроксимаций интегралов по путям

Обнаружено, что при вычислении интегралов по путям следует учитывать наличие бесконечномерной группы гомотопических преобразований путей на слоении Майера фазового пространства механической системы, преобразования из которой оставляют классическое действие инвариантным. Предлагается процедура для факторизации типа Фаддеева-Попова по объему этой группы в интеграле по путям. Она основана на новой формуле для матричных элементов квантового оператора эволюции за малые времена и позволяет получить: пространство квантовых состояний вместе с его метрикой, новое правило соответствия между классическими и квантовыми величинами и квантовый пропагатор. Обсуждается связь между классическими и квантовыми симметриями. Приводятся примеры применения предлагаемой процедуры вычисления интегралов по путям.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой.

Fiziev P.P. P2-84-229

A New Procedure for Finite-Dimensional Approximations of Path Integrals

It is found out that for the calculation of path integrals one should take into account the presence of an infinite dimensional group of homotopical path transformations on the Mayer foliation of phase space of the mechanical system, transformations under which make the classical action invariant. A procedure for factorization of the Faddeev-Popov type over the volume of this group in the path integral is suggested. It is based on a new formula for matrix elements of the evolution quantum operator during short times. It enables one to obtain a space of quantum states with its metric, a new rule of correspondence between classical and quantum quantities, and a quantum propagator. Relation between classical and quantum symmetries is discussed. Application of the procedure proposed for calculating path integrals is exemplified.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984