объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-226

В.К.Мельников

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДЛИННОЙ ВОЛНЫ С ПАКЕТОМ КОРОТКИХ ВОЛН

Направлено в журнал "Письма в ЖЭТФ"

1984

При описании различных нелинейных процессов важную роль играют уединенные волны. В последнее время благодаря открытию метода обратной задачи [1] стали более ясными причины этого явления. Более того, метод обратной задачи существенно увеличил наши возможности в обнаружении и исследовании таких волн.

В настоящей заметке речь идет об уединенных волнах в системе, описываемой следующей зацепленной парой уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + 2bu\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = \left(p\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|\phi|^2 , \qquad /1/$$

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = u\phi + \Delta\phi + \epsilon|\phi|^2 \phi . \qquad /2/$$

Здесь u определяет профиль длинной волны, а ϕ является комплексной огибающей пакета коротких волн. Константы a, b, c, p, q и ϵ являются параметрами системы и определяются в каждом конкретном случае. Существенно, что все эти константы могут принимать только вещественные значения. В отсутствие взаимодействия длинная волна подчиняется уравнению Кадомцева-Петвиашвили [2], а пакет коротких волн эволюцинирует согласно нелинейному уравнению Шредингера. Ситуация, описываемая системой уравнений /1/, /2/, является довольно типичной и встречается в гидродинамике,, физике плазмы и ряде других областей науки. Ниже приведены условия, при выполнении которых в системе /1/, /2/ возникают уединенные волны указанного здесь вида.

<u>Теорема 1.</u> Если в системе /1/, /2/ постоянные b и c отличны от нуля, а $\epsilon > 0$, то существует следующее решение этой системы:

$$u = \frac{A}{\mathrm{ch}^2 z}, \quad \phi = \frac{B}{\mathrm{ch} z}\exp[i(\mu x + \nu y + \kappa t)], \qquad /3/$$

где

$$z = \sigma(x + \tau y + \omega t), \qquad /4/$$

$$A = \frac{6c\sigma^2}{b}, \qquad /5/$$

$$|B|^2 = 2(1 - \frac{3c}{b} + r^2)\frac{\sigma^2}{\epsilon}, \qquad /6/$$

параметр σ принимает любые вещественные значения, кроме $\sigma = 0$, параметр r принимает произвольные вещественные значения, удовлетворяющие неравенству

$$1 - \frac{3c}{b} + r^2 > 0, \qquad /7/$$

значение параметра ω определяется с помощью равенства

$$\omega = r^2 - 4c\sigma^2 - a - (b - 3c + br^2)(p + qr^2)\frac{1}{3c\epsilon}, \qquad /8/$$

а параметры κ, μ и ν принимают любые вещественные значения, удовлетворяющие условиям

$$\omega = 2(\mu + \nu r), \quad \kappa = \mu^2 + \nu^2 - (1 + r^2)\sigma^2. \qquad /9/$$

Доказательство. Согласно /3/-/5/, имеем

$$bu^2 + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4c\sigma^2 u. \qquad /10/$$

С помощью этого равенства нетрудно убедиться, что выражения /3/ удовлетворяют уравнению /1/, если выполнено условие

$$(r^2 - \omega - a - 4c\sigma^2)A = (p + qr^2)|B|^2. \qquad /11/$$

Справедливость этого условия следует из равенств /5/, /6/ и /8/. Подставим теперь выражения /3/ в уравнение /2/. С учетом /9/ получаем, что уравнение /2/ будет удовлетворено, если выполнено условие $A + \epsilon|B|^2 = 2(1 + r^2)\sigma^2$, справедливость которого следует из равенств /5/ и /6/. Таким образом, выражения /3/ удовлетворяют уравнениям /1/ и /2/.

Замечание 1. В том случае, когда $1 - \frac{3c}{b} < 0$, решение вида /3/ существует и при $\epsilon < 0$. Оно определяется совершенно аналогичным образом. Однако выбор параметра r в этом случае нужно подчинить не условию /7/, а условию $1 - \frac{3c}{b} + r^2 < 0$.

Теорема 2. Если в системе /1/, /2/ $\epsilon = 0$, $b \neq 0$, а постоянные b, c, p и q удовлетворяют неравенствам

$$1 - \frac{3c}{b} < 0, \quad r = p - q + \frac{3c}{b}q \neq 0,$$

то существует определенное посредством /3/-/5/ решение этой системы, причем

$$|B|^2 = (\frac{3c}{b} - 1 - \omega - a - 4c\sigma^2)\frac{6c\sigma^2}{br}, \qquad /12/$$

параметр σ принимает любые вещественные значения, кроме $\sigma = 0$, значение параметра r определяется с помощью равенства

$$r^2 = \frac{3c}{b} - 1, \qquad /13/$$

параметр ω принимает произвольные вещественные значения, удовлетворяющие неравенству

$$(\frac{3c}{b} - 1 - \omega - a - 4c\sigma^2)r > 0, \qquad /14/$$

а параметры κ, μ и ν принимают любые вещественные значения, удовлетворяющие условиям /9/.

Доказательство. Действительно, согласно /3/-/5/, справедливо равенство /10/. Следовательно, чтобы выражения /3/ удовлетворяли уравнению /1/, нужно соблюсти условие /11/. Его справедливость следует на этот раз из равенств /5/, /12/ и /13/. Далее, с учетом /9/ получаем, что выражения /3/ удовлетворяют уравнению /2/, если выполнено условие $A = 2(1 + r^2)\sigma^2$. Справедливость этого условия следует из равенств /5/ и /13/. Таким образом, и в этом случае выражения /3/ удовлетворяют уравнениям /1/, /2/.

Замечание 2. В том случае, когда выполнено равенство $r = p - q + \frac{3c}{b}q = 0$, в условиях теоремы 2 решение вида /3/ будет существовать, если вместо /14/ потребовать

$$\omega = \frac{3c}{b} - 1 - a - 4c\sigma^2.$$

Величина B в этом случае может принимать произвольные значения.

Теорема 3. Если в системе /1/, /2/ $\epsilon = 0$, $p^2 + q^2 > 0$, $b^2 + c^2 > 0$, то существует следующее решение этой системы

$$u = \frac{A}{\mathrm{ch}^2 z}, \quad \phi = B\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}^2 z}\exp[i(\mu x + \nu y + \kappa t)], \qquad /15/$$

где

$$z = \sigma(x + ry + \omega t), \qquad /16/$$

$$A = 6(1+r^2)\sigma^2, \quad |B|^2 = 36\frac{b-c+br^2}{p+qr^2}(1+r^2)\sigma^4, \qquad /17/$$

параметр σ принимает любые вещественные значения, кроме $\sigma = 0$, параметр r принимает произвольные вещественные значения, удовлетворяющие неравенству

$$(b-c+br^2)(p+qr^2) > 0, \qquad /18/$$

значение параметра ω определяется с помощью равенства

$$\omega = r^2 + 2c\sigma^2 - a - 6(1+r^2)b\sigma^2, \qquad /19/$$

а параметры κ, μ и ν принимают любые вещественные значения, удовлетворяющие условиям /9/.

Доказательство. Действительно, согласно /15/-/17/, справедливо равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu^2 + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + (p\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q\frac{\partial^2}{\partial y^2})|\phi|^2 = 2[3(1+r^2)b - c]\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

С учетом этого равенства на основании /19/ получаем, что выражения /15/ удовлетворяют уравнению /1/. Далее, с помощью /9/ и /17/ находим, что выражения /15/ удовлетворяют также и уравнению /2/.

Заметим, что неравенство /18/ может быть удовлетворено далеко не всегда. Действительно, если выполнена одна какая-нибудь группа условий из указанных ниже, то нетрудно убедиться, что в этом случае неравенство /18/ невозможно удовлетворить ни при каких вещественных значениях параметра r. Эти условия имеют следующий вид:

1/ $pq > 0,\ (b-c)b > 0,\ bq < 0;$

2/ $pq = \frac{q^2}{b^2}(b-c)b < 0,\ bq < 0;$

3/ $p = 0,\ (b-c)b > 0,\ bq < 0;$

4/ $q = 0,\ (b-c)b > 0,\ bp < 0;$

5/ $b = 0,\ pq > 0,\ cp > 0;$

6/ $b = c,\ pq > 0,\ bp < 0;$

7/ $p = b - c = 0,\ bq < 0;$

8/ $q = b - c = 0,\ bp < 0;$

9/ $b = p = 0,\ cq > 0;$

10/ $b = q = 0,\ cp > 0.$

Однако во всех остальных случаях неравенство /18/ может быть удовлетворено подходящим выбором параметра r.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, vol. 19, No. 19, p. 1095-1097.
2. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, т. 192, №4, с. 753-756.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1984 года.

Мельников В.К. Р2-84-226

Уединенные волны в задаче о взаимодействии длинной волны с пакетом коротких волн

Найдены условия, при выполнении которых в системе, описывающей взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, существуют решения типа уединенной волны.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Mel'nikov V.K. P2-84-226

Solitary Waves in the Problem of Interaction of a Long Wave with a Short-Wave Packet

A system is considered, which describes the interaction of a long wave with a short-wave packet. Conditions are obtained under which the system has solutions of the type of a solitary wave.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984