

84-186



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-84-186

С.И.Златев, В.А.Матвеев

ПРОБЛЕМА ИНФРАКРАСНЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ
ПРИ КВАНТОВАНИИ СОЛИТОНОВ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая
физика"

1984

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема квантования солитонных решений нелинейных полевых уравнений привлекла в последние годы большое внимание. Основные трудности здесь связаны с учетом свойств симметрии. Разложение поля около выбранного солитонного решения нарушает симметрию задачи относительно некоторой непрерывной группы. Признаком этого нарушения являются возбуждения с нулевой энергией /так называемые нулевые моды/ в спектре элементарных возбуждений поля около выбранного классического значения.

Нулевые моды являются источником трудностей и проблем в теории возмущений. Прежде чем перейти к подробному их обсуждению, подчеркнем, что эти трудности и проблемы не возникают при квантовании солитонных решений /см. напр., ^{1/} и цитированную там литературу/ на основе метода коллективных координат, впервые введенных Боголюбовым и Тябликовым в 1949 г. при формулировке квантовой теории полярона ^{2/} и получивших дальнейшее развитие в работах по проблеме сильной связи в квантовой теории поля ^{3/}. В схемах теории возмущений ^{4-8/}, не опирающихся на метод коллективных координат, с нулевыми модами связаны две проблемы, которые мы будем в дальнейшем четко различать. Постановка и методы анализа этих проблем зависят от того, рассматривается ли поле с самого начала на всем пространстве-времени, или же схема теории возмущений строится для полей, определенных на ограниченной во временном направлении области /характеризуемой некоторым полным временем T/ и удовлетворяющих определенным условиям на границе этой области. В первом случае интеграл от квадрата нулевой моды по пространству-времени расходится /нулевая мода ненормируема/, во втором он конечен /нулевая мода нормируема/, поскольку область интегрирования ограничена во временном направлении.

Первая из проблем, порождаемых нулевыми модами, связана с определением функции Грина как элемента диаграммной техники. Если нулевая мода ненормируема, функция Грина существует, но не единственна ^{4/}. Вопрос об однозначности членов петлевого разложения обсуждался ^{4,8,9,10/}, однако окончательный ответ на него зависит от решения второй проблемы - свободна ли теория возмущений от инфракрасных расходимостей. Такие расходимости могут существовать даже при корректном определении функции Грина как обобщенной функции, поскольку в диаграммах приходится иметь дело с произведениями функций Грина.

Определение функции Грина в подходах ^{5-7/}, в которых нулевая мода нормируема, возможно потому, что функция нулевой моды исключена из пространства полей граничными условиями ^{6,7/} или при помощи некоторой нелинейной замены полевых переменных ^{5/}. Проблема инфракрасных расходимостей в этом случае - это проблема правильного поведения диаграмм /или некоторых их комбинаций - например, членов разложения по константе связи/ при предельном переходе $T \rightarrow \infty$. Так, мы ожидаем, что для связанных диаграмм с внешними линиями соответствующие выражения будут стремиться к хорошо определенным обобщенным функциям, а для связанных диаграмм без внешних линий - расти линейно с ростом T /это обычная объемная расходимость/.

Проблема инфракрасных расходимостей, в отличие от проблемы определения пропагатора, не обсуждалась подробно в литературе. Известно лишь ^{4-8,10,11/}, что во всех подходах двухпетлевые диаграммы без внешних линий не имеют инфракрасных расходимостей.

В настоящей работе рассмотрена проблема инфракрасных расходимостей в рамках подхода, предложенного в ^{4/}. На основе общего анализа связанных диаграмм показано, что инфракрасные расходимости существуют в высших порядках теории возмущений. В частности, установлено, что расходимости в сумме связанных трехпетлевых диаграмм без внешних линий лишь частично компенсируются, что ограничивает область применимости подхода низшими порядками теории возмущений.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим в двумерном пространстве-времени модель самодействующего скалярного поля с функционалом действия

$$S[\phi] = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{g^2} V(g\phi) \right] dt dx.$$

Предполагается, что классическое уравнение движения

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = -\square \phi - \frac{1}{g} V'(g\phi) = 0 \quad /1/$$

обладает солитонным решением

$$\phi_{\text{кл}}(t, x) = \frac{1}{g} u_{\text{кл}}(t, x) = \frac{1}{g} \Phi((x-a) \text{ch } \beta - t \text{ sh } \beta), \quad /2/$$

где функция Φ достаточно быстро стремится к своим асимптотическим значениям $\Phi(\xi) \rightarrow \Phi^{\pm}$, $\xi \rightarrow \pm \infty$, так, что классическая масса солитона конечна:

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dt [\Phi'(t)]^2.$$

Параметры α и β имеют смысл координаты солитона в момент времени $t = 0$ и скорости солитона / скорость $v = \tanh \beta$ / соответственно.

Изложим необходимые сведения о квантовании солитонов в рамках подхода /4/. Будем исходить из записи амплитуды перехода между односолитонными состояниями в виде функционального интеграла

$$\int D\phi \exp\{iS[\phi]\}, \quad /3/$$

1-солитон

где интегрирование ведется по полям ϕ , удовлетворяющим солитонным асимптотическим условиям /4/

$$\phi(t, x) \rightarrow \phi_{\text{in}}(t, x), \quad t \rightarrow -\infty, \quad /4/$$

Применение метода стационарной фазы к функциональному интегралу /3/ дает

$$\exp\{iS[\phi_{\text{кл}}]\} [\det \frac{2\pi i}{H}]^{1/2} W(g),$$

где

$$H = \square + V''(u_{\text{кл}}), \quad /5/$$

а величина W определяет поправку к квазиклассическому приближению. Функцию W можно вычислять по теории возмущений, используя диаграммную технику, в которой вершины имеют вид

$$-ig^{n-2} V_n(t, x) = -i \frac{d^n}{d\phi^n} \frac{1}{g^2} V(g\phi) \Big|_{\phi = \frac{1}{g} u_{\text{кл}}}, \quad n = 3, 4, \dots, \quad /6/$$

а пропагатор G удовлетворяет уравнению

$$HG(t, x; t', x') = \delta(t - t') \delta(x - x'). \quad /7/$$

Ряд теории возмущений для W может быть записан в виде

$$W(g) = \exp\left\{-\frac{i}{2} \int G \frac{\delta}{\delta\eta} \frac{\delta}{\delta\eta}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{g^2} \Gamma[g\phi]\right\}_{\eta=0}, \quad /8/$$

где

$$\Gamma[\eta] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int V_n(t, x) \eta^n(t, x) dt dx.$$

Солитонное решение $\phi_{\text{кл}}$ уравнения /1/ в /5/, /6/ однозначно определяется условиями /4/. Асимптотические условия, налагаемые на пропагатор, имеют наиболее простой вид в системе отсчета, в которой $\phi_{\text{кл}}$ не зависит от временной переменной. После преобразования

$$t = r \operatorname{ch} \beta + r' \operatorname{sh} \beta, \quad x = r \operatorname{sh} \beta + r' \operatorname{ch} \beta - \alpha$$

оператор H принимает вид

$$H = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \hat{h},$$

где

$$\hat{h} = -\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + V''(\Phi(r)).$$

Хорошо известно, что спектр оператора \hat{h} , являясь неотрицательным, содержит нулевое собственное значение. Соответствующая собственная функция /нулевая мода/ пропорциональна Φ' :

$$\psi_0(r) = -\frac{1}{\sqrt{M_0}} \Phi'(r).$$

Для простоты предположим*, что остальной спектр \hat{h} непрерывен и занимает интервал $[1, \infty)$, соответствующие собственные функции ψ_k /нормированные на δ -функцию/ удовлетворяют уравнению

$$\hat{h}\psi_k(r) = \omega^2(k)\psi_k(r), \quad \omega^2(k) = 1 + k^2, \quad k \in (-\infty, \infty)$$

и условию

$$\psi_k(r) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ikr}, \quad r \rightarrow -\infty,$$

а потенциал $U(r) = V''(\Phi(r))$ является безотражательным. Пропагатор записывается в виде суммы

$$G(r, r; r', r') = G_e(r, r; r', r') + G_0(r, r; r', r') + b\psi_0(r)\psi_0(r') + d \cdot (r+r')\psi_0(r)\psi_0(r') + frr'\psi_0(r)\psi_0(r'), \quad /9/$$

*Общий вид спектра и пропагатора приведен в /8/.

в которой

$$G_0(r, r; r', r') = \frac{1}{2} \int \frac{dk}{\omega(k)} e^{-i\omega(k)|r-r'|} \psi_k(r) \psi_k^*(r')$$

- вклад непрерывного спектра оператора \hat{H} - однозначно определяется асимптотическими условиями изучения, G_0 можно выбрать в виде^{4/}

$$G_0(r, r; r', r') = \frac{1}{2} |r-r'| \psi_0(r) \psi_0(r')$$

b, d, и f - произвольные коэффициенты. Существование решения уравнения /7/, несмотря на наличие нулевой моды, обусловлено тем, что ψ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора H .

3. ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ

Рассмотрим сначала случай, когда в /9/ $b=d=f=0$ и пропагатор равен

$$G' = G_0 + G_0. \quad /10/$$

Для наших целей оказывается удобной некоторая детализация диаграммной техники, при которой линии разного типа сопоставляются отдельным слагаемым в правой части /10/. Сопоставим $\frac{1}{i}G_0$ непрерывную линию, а $\frac{1}{i}G_0$ - штриховую.

Как известно, члены разложения $W(g)$ в ряд теории возмущений расходятся, если область пространства-времени не ограничена во временном направлении. Ограничивая область интегрирования по t в каждой вершине интервалом $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, мы ожидаем линейный рост связанных диаграмм при $T \rightarrow \infty$. Именно такое поведение имеют двухпетлевые диаграммы^{4/}. Однако, например, трехпетлевая диаграмма



Рис. 1

очевидно, расходится как T^6 . Чтобы показать, что такое поведение диаграммы является проявлением инфракрасной расходимости, с помощью преобразования Фурье

$$G_0(r, r; r', r') = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\nu dk}{\nu^2 - \omega^2(k)} e^{-i\nu(r-r')} \psi_k(r) \psi_k^*(r')$$

$$G_0(r, r; r', r') = -\frac{1}{2\pi} \int d\nu \nu^{-2} e^{-i\nu(r-r')} \psi_0(r) \psi_0(r')$$

где

$$\nu^{-2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\nu - i\epsilon)^2} + \frac{1}{(\nu + i\epsilon)^2} \right]$$

/см. напр., /12/ /, перейдем к представлению, аналогичному импульсному, которое в дальнейшем будем называть (ν, h) -представлением. Приведем правила соответствия в этом представлении:

$$\text{---} \quad \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\nu^2 - \omega^2(k)}$$

$$\text{---} \quad \frac{i}{2\pi} \nu^{-2}$$

$$\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3, \kappa \end{array} \quad - 2\pi i \delta_T \left(\sum_{i=1}^3 \nu_i \right) g \int dr V_3(r) \psi_0^2(r) \psi_k(r)$$

$$\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{array} \quad - 2\pi i \delta_T \left(\sum_{i=1}^4 \nu_i \right) g^2 \int dr V_4(r) \psi_0^4(r)$$

и т.д., где

$$\delta_T(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dr e^{-i\nu r} = \frac{1}{2\pi\nu} [\exp(-\frac{i}{2}\nu T) - \exp(\frac{i}{2}\nu T)]$$

В дальнейшем будем считать, что $\omega(k)$ имеет малую отрицательную мнимую часть $\omega(k) = (1+k^2)^{1/2} - i\mu$ и что эта вспомогательная регуляризация функции G_0 снимается после перехода к пределу $T \rightarrow \infty$.

Существенное отличие (ν, h) -представления от обычного импульсного в том, что сумма параметров k_i в каждой вершине не сохраняется. Так как полное время ограничено ($T < \infty$), то не сохраняется также сумма частот ν_i в каждой вершине /вместо δ -функции стоит функция δ_T /.

Вернувшись к диаграмме на рис.1, легко убеждаемся, что любая вспомогательная регуляризация функции $\nu^{-2}/t.e.$ замена

ν^{-2} на подходящую регулярную функцию/ восстанавливает линейную асимптотику диаграммы при $T \rightarrow \infty$. Однако снятие вспомогательной регуляризации в главном /линейном по T / члене асимптотического разложения оказывается невозможным. Полное время $T < \infty$ играет роль параметра не только объемной, но также и инфракрасной регуляризации /хотя регуляризует не пропагатор, а вершинные множители/.

Анализируя поведение какой-либо диаграммы при $T \rightarrow \infty$, удобно рассматривать ее как построенную из обобщенных вершин /под-диаграмм/ и штриховых линий, соединяющих разные обобщенные вершины. Обобщенная вершина может содержать штриховые линии, но при разрыве всех штриховых линий она должна оставаться связанной. Нетрудно убедиться, что такое представление для каждой диаграммы единственно. Разумеется, существуют диаграммы, которые изображаются одной обобщенной вершиной. Сформулируем теперь общее утверждение: любая диаграмма без внешних линий - величина типа $O(T^s)$ при $T \rightarrow \infty$, $s = \nu' + \ell'$, где ν' - число обобщенных вершин диаграммы, ℓ' - число штриховых линий между ними. Не будем здесь доказывать справедливость этого утверждения в общем случае /ниже приводится доказательство для $s = 1$ /.

Тем не менее, мы будем в дальнейшем пользоваться удобной классификацией диаграмм по числу s .

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕРШИННЫХ ФУНКЦИЙ. ДИАГРАММЫ С ЛИНЕЙНОЙ АСИМПТОТИКОЙ

Каждой обобщенной вершине X соответствует в (ν, h) -представлении вершинная функция F_X , зависящая от частот входящих и выходящих линий и от T :

$$F_X(\nu_1, \dots, \nu_m; T) = \frac{1}{2^k} \int \frac{dk_1}{2\omega(k_1)} \dots \int \frac{dk_c}{2\omega(k_c)} R_X(k_1, \dots, k_c) A_X(\nu_1, \dots, \nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c), T), \quad /11/$$

Здесь R_X - произведение вершинных факторов типа

$$g^{p+q-2} \int dr V_{p+q}(r) \psi_0^p(r) \psi_{k_1}^p(r) \dots \psi_{k_1}^q(r),$$

c - число внутренних /т.е. принадлежащих обобщенной вершине/ непрерывных линий, k - число внутренних штриховых линий, m - число входящих и выходящих линий /эти линии не принадлежат обобщенной вершине, они могут быть только штриховыми; будем называть их внешними/. Условимся определять вершинную функцию F_X , считая все внешние линии входящими, в остальных случаях вершинную функцию получаем, сменив знак у частот выходящих линий. Правила построения функции A_X для вершины X нетрудно полу-

чить из правил соответствия и равенства /11/. Частным случаем обобщенных вершин являются "вершины", не имеющие внешних концов, т.е. просто диаграммы, остающиеся связными при разрыве штриховых линий / $s = 1$ /.

Справедливы следующие утверждения. Для любой обобщенной вершины с m концами, с точностью до поправок, убывающих при $T \rightarrow \infty$, быстрее любой степени $1/T$

$$A_X(\nu_1, \dots, \nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c); T) \cong \frac{1}{\sum_{i=1}^m \nu_i} [Q_X(\nu_1, \dots, \nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) \exp(-\frac{1}{2} T \sum_{i=1}^m \nu_i) - \tilde{Q}_X(\nu_1, \dots, \nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) \exp(-\frac{1}{2} T \sum_{i=1}^m \nu_i)], \quad /12/$$

где a/Q_X допускает представление в виде суммы взятых со знаком плюс или минус произведений множителей вида

$$K_a^{-1} = [\sum_{i=1}^m \lambda_a^i \nu_i - \sum_{j=1}^n \kappa_a^j \omega(k_j)]^{-1},$$

где λ_a^i, κ_a^j - неотрицательные целые числа, $\sum_{i=1}^m \lambda_a^i > 0, \sum_{j=1}^n \kappa_a^j > 0$,

$$b/ \tilde{Q}_X(\nu_1, \dots, \nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) = Q_X(-\nu_1, \dots, -\nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) = (-1)^c Q_X(\nu_1, \dots, \nu_m; -\omega(k_1), \dots, -\omega(k_c));$$

в/ если $\sum_{i=1}^m \nu_i = 0$, то

$$\tilde{Q}_X(\nu_1, \dots, \nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) = Q_X(\nu_1, \dots, \nu_m; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)).$$

Любая диаграмма в разложении W , остающаяся связанной при разрыве штриховых линий - величина типа $O(T)$ при $T \rightarrow \infty$. Доказательство этих утверждений приведено в приложении. Подставляя /12/ в /11/, получим асимптотическое представление для вершинной функции F_X . В частности, мы можем получить асимптотические оценки для значений функции F_X и ее производных при нулевых значениях внешних частот:

$$F_X(0, \dots, 0; T) = O(T),$$

/13/

$$\frac{\partial^n}{\partial \nu_{1_1} \dots \partial \nu_{1_n}} F_X(\nu_1, \dots, \nu_m; T) |_{\nu_1 = \dots = \nu_m = 0} = O(T^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad /14/$$

5. ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА В ТЕРМИНАХ ОБОБЩЕННЫХ ВЕРШИН И ШТРИХОВЫХ ЛИНИЙ

После сказанного выше естественно предположить, что с точки зрения анализа инфракрасных расходимостей существенной является именно обобщенная структура диаграмм. Положим

$$\exp\left\{-\frac{i}{2} \int G_c \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \eta}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{g^2} \Gamma[g, \eta]\right\} = \exp \Lambda[g, \eta],$$

имеем

$$W = \exp\left\{-\frac{i}{2} \int G_0 \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \eta}\right\} \exp \Lambda[g, \eta] |_{\eta=0} \quad /15/$$

и после перехода к приведенному вершинному функционалу /см. например, /13/ /

$$\bar{\Lambda}[g, \eta] = \exp\left\{-\frac{i}{2} \int G_0 \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \eta}\right\} \Lambda[g, \eta],$$

получаем

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp\left\{-\frac{i}{2} \sum_{i \neq k} \int G_0 \frac{\delta}{\delta \eta_i} \frac{\delta}{\delta \eta_k}\right\} \bar{\Lambda}[g, \eta_1] \dots \bar{\Lambda}[g, \eta_n] |_{\eta_1 = \dots = \eta_n = 0}$$

или, в ν -представлении

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp\left\{\frac{i}{4\pi} \sum_{i \neq k} \int d\nu \nu^{-2} \frac{\delta}{\delta a_i(\nu)} \frac{\delta}{\delta a_k(-\nu)}\right\} \times$$

$$\times \mathcal{M}[g, a_1] \dots \mathcal{M}[g, a_n] |_{a_1 = \dots = a_n = 0},$$

где

$$\mathcal{M}[g, a] = \bar{\Lambda}[g, \eta] |_{\eta(r, r) = \psi_0(r) \int d\nu a(\nu) e^{i\nu r}}$$

- приведенный вершинный функционал в ν -представлении. Разлагая \mathcal{M} в ряд, имеем

$$\mathcal{M}[g, a] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d\nu_1 \dots \int d\nu_m \mathcal{M}_m(g; \nu_1, \dots, \nu_m; T) a(\nu_1) \dots a(\nu_m),$$

где \mathcal{M}_m - полная приведенная вершинная функция с m концами в ν -представлении. Со своей стороны, функция \mathcal{M}_m разлагается в степенной ряд по g :

$$\mathcal{M}_m(g; \nu_1, \dots, \nu_m; T) = \sum_{j=J_m}^{\infty} g^{m+2j} M_{m,2j}(\nu_1, \dots, \nu_m; T),$$

$$J_0 = 1, \quad J_1 = J_2 = 0, \quad J_m = -1, \quad m = 3, 4, \dots$$

Отметим, что $\mathcal{M}_0(g, T)$ есть просто сумма всех тех диаграмм в разложении $\ln W$, которые остаются связными при разрыве штриховых линий. Функцию $g^n M_{mn}$ ($m = 1, 2, \dots$) будем называть полной вершинной функцией порядка n с m концами.

6. ТРЕХПЕТЛЕВЫЕ ДИАГРАММЫ

Классифицируем по значениям числа s трехпетлевые диаграммы в разложении W . Вследствие тождества /4/

$$\int dr V_3(r) \psi_0^3(r) = 0, \quad /16/$$

функция $M_{31} = 0$ и все диаграммы, для которых $s > 6$, равны нулю. Вклад диаграмм, для которых $s = 6$, равен

$$\Sigma_6(T) = \frac{1}{48} \text{diagram 1} + \frac{1}{8} \text{diagram 2} + \frac{1}{16} \text{diagram 3} + \frac{1}{8} \text{diagram 4}$$

Используя полную вершинную функцию второго порядка с четырьмя концами

$$g^2 M_{42} = \text{diagram 5} = \text{diagram 6} + 3 \hat{S} \text{diagram 7}, \quad /17/$$

где \hat{S} - оператор симметризации по частотам внешних линий, представим Σ_6 в виде

$$\Sigma_6(T) = \frac{1}{48} \text{diagram 8}$$

Достаточным условием полной взаимной компенсации диаграмм в Σ_6 являлось бы тождественное равенство нулю функции M_{42} . Нетрудно убедиться, что правая часть /17/ не равна нулю тождественно. Однако при нулевых значениях всех внешних частот правая часть /17/ совпадает с левой частью асимптотического соотношения /4,9,10/:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dr \int dr (-ig^2) V_4(r) \psi_0^4(r) + \quad /18/$$

$$+ 3 \int_{-T/2}^{T/2} dr_1 \int_{-T/2}^{T/2} dr_2 \int_{-T/2}^{T/2} dr_2 (-ig) V_3(r_1) \psi_0^2(r_1) \frac{1}{i} G(r_1, r_1; r_2, r_2) (-ig) V_3(r_2) \psi_0^2(r_2) = O(1),$$

$T \rightarrow \infty$

которое является следствием симметрии системы относительно пространственных трансляций /4,9/. Приведем явное выражение для функции M_{42} :

$$M_{42}(\nu_1, \dots, \nu_4; T) = 3 \int \frac{dk}{2\omega^2(k)} \{ |\int dr V_3(r) \psi_0^2 \psi_k(r)|^2 \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^4 \nu_i \right)^{-1} \hat{S} \left[\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 + \nu_2 - \omega(k)} + \frac{\nu_3 + \nu_4}{\nu_3 + \nu_4 - \omega(k)} \right) \exp\left(-\frac{i}{2} T \sum_{i=1}^4 \nu_i\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 + \nu_2 + \omega(k)} + \frac{\nu_3 + \nu_4}{\nu_3 + \nu_4 + \omega(k)} \right) \exp\left(\frac{i}{2} T \sum_{i=1}^4 \nu_i\right) \right] \}.$$

Нетрудно проверить, что действительно справедливо соотношение

$$M_{42}(0, \dots, 0; T) = O(1), \quad /19/$$

а также

$$\frac{\partial^n}{\partial \nu_1 \dots \partial \nu_n} M_{42}(\nu_1, \dots, \nu_4; T) \Big|_{\nu_1 = \dots = \nu_4 = 0} = O(T^n), \quad n = 1, 2, \dots \quad /20/$$

вместо более слабых соотношений /13/, /14/, которые имеют место для отдельных слагаемых в правой части /17/.

Соотношения /19/, /20/ не обеспечивают полной компенсации расходимостей в Σ_6 , но благодаря им оказываются равными нулю коэффициенты при двух старших степенях T^6 и T^5 в асимптотическом разложении Σ_6 :

$$\Sigma_6(T) = c_4 T^4 + c_3 T^3 + c_2 T^2 + O(T), \quad /21/$$

где

$$c_4 = \frac{3g^4}{2^9} \left(\int \frac{dk}{\omega^3(k)} \left| \int dr V_3 \psi_0^2 \psi_k \right|^2 \right)^2,$$

$$c_3 = \frac{ig^4}{2^6} \left(\int \frac{dk}{\omega^3(k)} \left| \int dr V_3 \psi_0^2 \psi_k \right|^2 \right) \left(\int \frac{dk}{\omega^4(k)} \left| \int dr V_3 \psi_0^2 \psi_k \right|^2 \right),$$

$$c_2 = -\frac{g^4}{2^7} \left(\int \frac{dk}{\omega^4(k)} \left| \int dr V_3 \psi_0^2 \psi_k \right|^2 \right)^2.$$

Обратимся к диаграммам, для которых $s = 5$. Их вклад $\Sigma_5(T)$ также может быть записан с помощью полных вершинных функций определенного порядка:

$$\Sigma_5(T) = \frac{1}{6} \text{Diagram 1} + \frac{1}{8} \text{Diagram 2},$$

(Diagram 1: A circle with a dashed line connecting two vertices labeled 3 and 1. Diagram 2: A chain of three circles connected by lines, labeled 1, 2, 1.)

где

$$g^3 M_{33} = \text{Diagram 3} - \frac{1}{2} \hat{S} \left\{ \text{Diagram 4} + 3 \text{Diagram 5} + 6 \text{Diagram 6} + 3 \text{Diagram 7} + 3 \text{Diagram 8} + 6 \text{Diagram 9} \right.$$

$$\left. + \text{Diagram 10} + 2 \text{Diagram 11} + 6 \text{Diagram 12} + 3 \text{Diagram 13} \right\}$$

(Diagram 3: Circle with 3 vertices. Diagram 4: Circle with 3 vertices and a dashed line. Diagram 5: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 6: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 7: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 8: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 9: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 10: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 11: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 12: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 13: Circle with 3 vertices and a line.)

$$g M_{31} = \text{Diagram 14} = \text{Diagram 15}$$

(Diagram 14: Circle with 3 vertices and a line. Diagram 15: Circle with 3 vertices and a line.)

$$g M_{11} = \text{Diagram 16} = \text{Diagram 17}$$

(Diagram 16: Circle with 1 vertex and a line. Diagram 17: Circle with 1 vertex and a line.)

$$g^2 M_{22} = -\text{Diagram 18} - \frac{1}{2} \left\{ \text{Diagram 19} + \text{Diagram 20} + \text{Diagram 21} + 2 \text{Diagram 22} \right\}$$

(Diagram 18: Circle with 2 vertices and a line. Diagram 19: Circle with 2 vertices and a line. Diagram 20: Circle with 2 vertices and a line. Diagram 21: Circle with 2 vertices and a line. Diagram 22: Circle with 2 vertices and a line.)

Однако /4/ $M_{31} = 0, M_{11} = 0$, что влечет $\Sigma_5(T) = 0$. Вклад диаграмм, для которых $s = 4$, выразим с помощью функции $g^2 M_{22}$:

$$\Sigma_4(T) = \frac{1}{4} \text{Diagram 23} + \text{Diagram 24}$$

(Diagram 23: Circle with 2 vertices and a line. Diagram 24: Circle with 2 vertices and a line.)

Приведем явное выражение для M_{22} :

$$\begin{aligned}
 M_{22}(\nu_1, \nu_2; T) = & \frac{1}{2} \int \frac{dk_1}{2\omega^2(k_1)} \int \frac{dk_2}{2\omega(k_2)} \left\{ \frac{\exp[-\frac{i}{2}T(\nu_1 + \nu_2)]}{\nu_1 + \nu_2 - \omega(k_1)} - \right. \\
 & - \frac{\exp[\frac{i}{2}T(\nu_1 + \nu_2)]}{\nu_1 + \nu_2 + \omega(k_1)} \left. \right\} \int dr V_3 \psi_0^2 \psi_{k_1} \int dr' V_3 \psi_{k_1}^* \psi_{k_2} \psi_{k_2}^* + \\
 & + \frac{1}{2} \int \frac{dk_1}{\omega(k_1)} \int \frac{dk_2}{\omega(k_2)} \left\{ \left[\frac{1}{\nu_1 - \omega(k_1) - \omega(k_2)} + \frac{1}{\nu_2 - \omega(k_1) - \omega(k_2)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2}{\omega(k_1) + \omega(k_2)} \right] \frac{\exp[-\frac{i}{2}T(\nu_1 + \nu_2)]}{\nu_1 + \nu_2} + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{1}{\nu_1 + \omega(k_1) + \omega(k_2)} + \frac{1}{\nu_2 + \omega(k_1) + \omega(k_2)} - \frac{2}{\omega(k_1) + \omega(k_2)} \right] \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\exp[\frac{i}{2}T(\nu_1 + \nu_2)]}{\nu_1 + \nu_2} \right\} \left| \int dr V_3 \psi_{k_1} \psi_{k_2} \psi_0 \right|^2 + \\
 & + \int \frac{dk}{8\omega(k)} \left\{ \left[\frac{1}{(\nu_1 - \omega(k))^2} + \frac{1}{(\nu_2 - \omega(k))^2} - \frac{2}{\omega^2(k)} \right] \frac{\exp[-\frac{i}{2}T(\nu_1 + \nu_2)]}{\nu_1 + \nu_2} - \right. \\
 & \left. - \left[\frac{1}{(\nu_1 + \omega(k))^2} + \frac{1}{(\nu_2 + \omega(k))^2} - \frac{2}{\omega^2(k)} \right] \frac{\exp[\frac{i}{2}T(\nu_1 + \nu_2)]}{\nu_1 + \nu_2} \right\} \left| \int dr V_3 \psi_0^2 \psi_k \right|^2.
 \end{aligned}$$

Эта функция при нулевых значениях частот также удовлетворяет асимптотическим условиям типа /19,20/, поэтому асимптотическое разложение $\Sigma_4(T)$ начинается не с T^4 , а с T^2 .

Осталось рассмотреть диаграммы, для которых $s=3$ /поскольку диаграмм, для которых $s=2$, не существует/. Но трехпетлевые

диаграммы в разложении W , для которых $s=3$, обязательно содержат вершину первого порядка с одним концом, а, как было сказано выше $M_{11} \equiv 0$, поэтому вклад этих диаграмм $\Sigma_3(T) \equiv 0$.

Итак, члены, пропорциональные T^4 и T^3 , в /21/ не компенсируются остальными диаграммами, трехпетлевой член в разложении W оказывается инфракрасно-расходящимся.

Рассмотрим вопрос о влиянии произвола в определении пропагатора /9/. Поскольку поля считаются определенными на всем пространстве-времени, а конечное T введено лишь с целью контроля над объемными и инфракрасными расходимостями, элементы диаграммной техники в (r, r) -представлении, и, в частности, пропагатор, не должны зависеть от T . Ранее было показано /10/, что если d и f в /9/ не зависят от T и $|d| + |f| > 0$, расходимость описанного в настоящей работе типа возникает уже в сумме двухпетлевых диаграмм. Поэтому следует положить $d=f=0$. С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что добавление к пропагатору G' члена в $b\psi_0 \cdot \psi_0$, где $b = const$, не может устранить расходимость в сумме трехпетлевых диаграмм.

7. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ И ЧАСТИЧНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ

Как было отмечено выше, в сумме трехпетлевых диаграмм происходит частичная компенсация инфракрасных расходимостей. Точнее, компенсируются наиболее сильные расходимости /например, члены, пропорциональные T^6 и T^5 в Σ_6 /, что определяется более сильными асимптотическими условиями /19/, /20/, которым удовлетворяют полные вершинные функции и их производные при нулевых значениях частот. Рассмотрим связь соотношений /19/, /20/ с асимптотическими соотношениями типа /18/, обусловленными трансляционной симметрией.

Следуя /9/, введем оператор

$$\mathcal{J} = \int dr dr' \psi_0(r) \frac{\delta}{\delta \eta(r, r')}$$

и разложим в ряд по степеням g величину

$$\exp\left\{-\frac{i}{2} \int G' \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \eta} \right\} \mathcal{J}^m \exp\left\{-\frac{i}{g^2} \Gamma[g\eta]\right\} \Big|_{\eta=0} = \sum_{n=1}^{\infty} g^n R_{mn}(T),$$

$m = 1, 2, \dots$

где

$$R_{mn}(T) = \exp\left\{-\frac{i}{2} \int G' \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \eta} \right\} \mathcal{J}^m L_n[\eta] \Big|_{\eta=0},$$

$$L_n[\eta] = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dg^n} \exp\left\{-\frac{i}{g^2} \Gamma[g\eta]\right\} \Big|_{g=0}.$$

Следствием трансляционной инвариантности действия является существование асимптотических /10,14/ равенств /4,6,9/

$$R_{mn}(T) = O(1), \quad T \rightarrow \infty, \quad /22/$$

справедливых при небольших значениях $n (n \leq 3)$. Нетрудно показать, что с учетом /16/ и тождества

$$\int dr V_3 \psi_k \psi_k^* \psi_0 = 0$$

при $n \leq 3$ выполняются равенства

$$M_{mn}(0, \dots, 0; T) = R_{mn}(T). \quad /23/$$

Из равенств /22/, /23/ вытекает асимптотическое соотношение /19/. Соотношения /20/ следуют из /19/, /11/ и асимптотического представления /12/. Поэтому на соотношения /19/, /20/ и обусловленную ими частичную компенсацию инфракрасных расходимостей можно смотреть как на следствия трансляционной симметрии.

При $n \geq 4$, однако, равенства /23/, вообще говоря, не выполняются, а асимптотические соотношения /22/ в общем случае нарушаются инфракрасными расходимостями. Поэтому в высших порядках теории возмущений /например, в четырехпетлевом члене разложения W /, когда включаются полные приведенные вершины высокого порядка ($n \geq 4$), можно ожидать отсутствия даже частичной компенсации инфракрасных расходимостей. В качестве общего вывода можно сказать, что при квантовании солитонов в рамках подхода, предложенного в /4/, инфракрасные расходимости, связанные с наличием нулевой моды, проявляются все более сильно с ростом порядка теории возмущений. Расходимости этого типа полностью отсутствуют в двухпетлевом члене разложения амплитуды, и лишь частично компенсируются в трехпетлевом. В следующем порядке разложения по петлям, по-видимому, отсутствует даже частичная компенсация инфракрасных расходимостей.

Рассмотрим связь между проблемой построения пропагатора, решенной в /4/, и более общей проблемой инфракрасных расходимостей в этом подходе. Для оператора

$$H_\epsilon = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \hat{h}_\epsilon,$$

где \hat{h} - оператор со сдвинутым спектром $\hat{h}_\epsilon = \hat{h} - i\epsilon$, обратный существует и определяется однозначно. Функция \mathcal{G}_0 получена в /4/ путем вычитания первого /расходящегося при $\epsilon \rightarrow 0$ / члена в правой части разложения

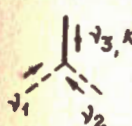
$$\frac{\exp\{-\sqrt{-i\epsilon}|r-r'|\}}{-2i\sqrt{-i\epsilon}} = \frac{-1}{2i\sqrt{-i\epsilon}} + \frac{1}{2}|r-r'| + O(\sqrt{-i\epsilon}),$$

что соответствует вычитанию расходящихся членов в простейших подграфах, состоящих из единственной штриховой линии. Как было показано выше, это вычитание не устраняет полностью инфракрасных расходимостей в высоких порядках разложения по петлям /не смотря на существование соотношений типа /18//. Последовательное устранение расходимостей возможно, например, с помощью подходящей \mathcal{R} операции /15/, однако такая процедура, вообще говоря, неоднозначна. Вопрос об устранении неоднозначностей после вычитания расходимостей остается открытым.

Авторы искренне благодарны Д.В.Ширкову, А.Н.Тавхелидзе, В.А.Мещерякову и Ф.В.Ткачеву за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Каждому связному графику ξ , составленному из n точек, соединенных линиями /непрерывными и штриховыми/, сопоставим функцию по следующему правилу: выражение, построенное по правилам соответствия

—————	$\frac{i}{\pi} \frac{\omega(k)}{\nu^2 - \omega^2(k)}$
-----	$\frac{1}{\pi} \nu^{-2}$
	$-2\pi i \delta_T (N_1 + \sum_{j=1}^3 \nu_j)$

и т.д., интегрируется по всем частотам ν_j . Покажем, что если ξ остается связным при разрыве штриховых линий, то, с точностью до поправок, убывающих при $T \rightarrow \infty$, быстрее любой степени $1/T$

$$B_\xi(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_n); T) \approx$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^{-1} [Y_{\xi}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) \exp(-\frac{i}{2} T \sum_{i=1}^n N_i) - \\ &- \bar{Y}_{\xi}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) \exp(\frac{i}{2} T \sum_{i=1}^n N_i)], \end{aligned} \quad /П.1/$$

где

а/ Y_{ξ} допускает представление в виде суммы взятых со знаком плюс или минус произведений множителей вида

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_a^i N_i - \sum_{j=1}^c \kappa_a^j \omega(k_j) \right]^{-1},$$

$$\lambda_a^i \geq 0, \quad \kappa_a^j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_a^i > 0, \quad \sum_{j=1}^c \kappa_a^j > 0;$$

$$\begin{aligned} \text{б/ } \bar{Y}_{\xi}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) &= \\ &= Y_{\xi}(-N_1, \dots, -N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) = (-1)^c Y_{\xi}(N_1, \dots, N_n; -\omega(k_1), \dots, -\omega(k_c)); \end{aligned}$$

в/ если $\sum_{i=1}^n N_i = 0$, то

$$\bar{Y}_{\xi}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) = Y_{\xi}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)).$$

Действительно, любой график описанного типа может быть получен из простейшего /состоящего из единственной точки/ некоторым числом операций трех типов: присоединения новой точки с помощью непрерывной линии; добавления непрерывной линии, соединяющей две точки /связного/ графика; добавления штриховой линии. Для простейшего графика $B_0(N) = -2\pi i \delta_T(N)$, и утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что оно справедливо для некоторого графика ξ и покажем, что оно остается справедливым после применения любой из трех операций.

Пусть график ξ' получается из ξ присоединением новой точки /для определенности, к точке с номером n /. Тогда

$$\begin{aligned} B_{\xi'}(N_1, \dots, N_{n+1}; \omega(k_1), \dots, \omega(k_{c+1})) &= \\ &= \frac{i}{\pi} \int d\nu \frac{\omega(k_{c+1})}{\nu^2 - \omega^2(k_{c+1})} B_{\xi}(N_1, \dots, N_n - \nu; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) B_0(N_{n+1} + \nu). \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл по теореме Коши о вычетах* и отбрасывая члены $-e^{-\nu T}$, находим, что $B_{\xi'}$ обладает представлением типа /П.1/, где

$$\begin{aligned} Y_{\xi'}(N_1, \dots, N_{n+1}; \omega(k_1), \dots, \omega(k_{c+1})) &= \\ &= \frac{Y_{\xi}(N_1, \dots, N_n + N_{n+1}; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c))}{N_{n+1} - \omega(k_{c+1})} + \\ &+ \frac{Y_{\xi}(N_1, \dots, N_n - \omega(k_{c+1}); \omega(k_1), \dots, \omega(k_c))}{\sum_{i=1}^n N_i - \omega(k_{c+1})} + \\ &+ \frac{Y_{\xi}(N_1, \dots, N_n + N_{n+1}; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) - Y_{\xi}(N_1, \dots, N_n - \omega(k_{c+1}); \omega(k_1), \dots, \omega(k_c))}{N_{n+1} + \omega(k_{c+1})}, \\ \bar{Y}_{\xi'}(N_1, \dots, N_{n+1}; \omega(k_1), \dots, \omega(k_{c+1})) &= \\ &= - \frac{\bar{Y}_{\xi}(N_1, \dots, N_n + N_{n+1}; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c))}{N_{n+1} + \omega(k_{c+1})} - \\ &- \frac{\bar{Y}_{\xi}(N_1, \dots, N_n + \omega(k_{c+1}); \omega(k_1), \dots, \omega(k_c))}{\sum_{i=1}^n N_i + \omega(k_{c+1})} - \\ &- \frac{\bar{Y}_{\xi}(N_1, \dots, N_n + N_{n+1}; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) - \bar{Y}_{\xi}(N_1, \dots, N_n + \omega(k_{c+1}); \omega(k_1), \dots, \omega(k_c))}{N_{n+1} - \omega(k_{c+1})}. \end{aligned} \quad /П.2/$$

Свойства б'/ и в'/ легко проверяются. Свойства а'/ для первого и второго членов в правой части /П.2/ очевидно. Для третьего члена это свойство доказывается с помощью следующего утверждения:

* Применение формулы Коши возможно после вспомогательной регуляризации функций $(\sum N_i - \nu)^{-1}$ и $(N_{n+1} + \nu)^{-1}$. Выбор способа регуляризации ограничен лишь требованиями аналитичности и удобства снятия регуляризации после вычисления интеграла.

Функция

$$f_p(x_1, \dots, x_p; b) = \frac{1}{b} \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{x_i} - \prod_{i=1}^p \frac{1}{x_i + b} \right) \quad /П.3/$$

может быть представлена в виде суммы некоторых членов типа

$$[x_{i_1} \dots x_{i_m} (x_{j_1} + b) \dots (x_{j_k} + b)]^{-1}, \quad k+m=p+1.$$

При $p=1, 2$ утверждение легко проверяется. Предположим, что оно справедливо при всех $p \leq q \geq 2$ и докажем, что оно выполняется также при $p=q+1$. Действительно, после небольших преобразований

$$f_{q+1}(x_1, \dots, x_{q+1}; b) = \frac{1}{x_q x_{q+1}} f_{q-1}(x_1, \dots, x_{q-1}; b) + f_2(x_q, x_{q+1}; b) \prod_{i=1}^{q-1} \frac{1}{x_i + b}.$$

Утверждение доказано. Положив $b = N_{n+1} + \omega(k_{c+1})$ и используя разложение функции Y_ξ , которым она обладает в силу свойства а'/, убеждаемся, что третий член в правой части /П.2/ также обладает разложением этого типа.

Рассмотрим операцию добавления к графику ξ непрерывной линии /для определенности между точками 1 и 2/. Имеем

$$B_{\xi''}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_{c+1})) = \frac{1}{\pi} \int d\nu \frac{\omega(k_{c+1})}{\nu^2 - \omega^2(k_{c+1})} B_{\xi}(N_1 - \nu, N_2 + \nu, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)). \quad /П.4/$$

Подставляя /П.1/, получаем, что $B_{\xi''}$ также обладает представлением типа /П.1/, где

$$Y_{\xi''}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_{c+1})) = \frac{1}{2\pi} \int d\nu \left[\frac{1}{\nu - \omega(k_{c+1})} - \frac{1}{\nu + \omega(k_{c+1})} \right] Y_{\xi}(N_1 - \nu, N_2 + \nu, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)), \quad /П.5/$$

$$\bar{Y}_{\xi''}(N_1, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_{c+1})) =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int d\nu \left[\frac{1}{\nu - \omega(k_{c+1})} - \frac{1}{\nu + \omega(k_{c+1})} \right] \bar{Y}_{\xi}(N_1 - \nu, N_2 + \nu, \dots, N_n; \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)).$$

Свойства б'/ и в'/ легко проверяются. Свойство а'/ доказывается с помощью следующего предложения:

Функция

$$F_{pq}(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q) = \frac{i}{2\pi} \int \prod_{i=1}^p (x - a_i)^{-1} \prod_{j=1}^q (x + b_j)^{-1} dx,$$

$$\text{Im} a_i > 0, \quad \text{Im} b_j > 0, \quad p+q \geq 2 \quad /П.6/$$

может быть разложена в сумму взятых со знаком плюс или минус произведений множителей вида $(a_i + b_j)^{-1}$. Предположим, что требуемое разложение существует при $p \geq 1, q \geq 1$. Пусть a_{p+1} отлично хотя бы от одного $a_i (i=1, 2, \dots, p)$, для определенности $a_{p+1} \neq a_p$. Тогда

$$F_{p+1,q}(a_1, \dots, a_{p+1}; b_1, \dots, b_q) = \frac{1}{a_p - a_{p+1}} [F_{pq}(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q) - F_{pq}(a_1, \dots, a_{p+1}; b_1, \dots, b_q)].$$

Из существования разложения для F_{pq} и доказанного выше утверждения вытекает существование разложения и для $F_{p+1,q}$. Если $a_{p+1} = a_p = \dots = a_1 = a$, то $F_{p+1,q}(a, \dots, a; b_1, \dots, b_q) = -\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial a} F_{pq}(a, \dots, a; b_1, \dots, b_q)$, и существование разложения очевидно. Аналогично доказывается утверждение для $F_{p,q+1}$. При $p=1, q=1$ требуемое разложение легко находится. Вспомогательное утверждение доказано. Отметим, что при $p \geq 2, F_{p0} \equiv 0$, а при $q \geq 2, F_{0q} \equiv 0$.

Вернувшись к интегралу /П.5/, заметим, что, по предположению, Y_{ξ} обладает свойством в'/ . Поэтому /П.5/ сводится к интегралам вида /П.6/, где одно из чисел a_i, b_j равно $-\omega(k_{c+1})$, а остальные - некоторым выражениям

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_a^i N_i - \sum_{j=1}^c \kappa_a^j \omega(k_j) \right]^{-1},$$

где λ_a^i, κ_a^j - неотрицательные числа, $\sum_{i=1}^n \lambda_a^i > 0, \sum_{j=1}^c \kappa_a^j > 0$. С помощью доказанного выше утверждения убеждаемся, что $Y_{\xi''}$ обладает свойством в'/ . Сохранение свойств а'/, б'/, в'/ при добавлении штриховой линии между двумя точками связанного графика доказывается по существу так же, как и для непрерывной линии.

Если известна функция V_ξ для некоторого графика, то нетрудно найти функцию A_X для любой вершины, имеющей ту же самую графическую структуру. Положив частоты N_i в точках, в которых в обобщенную вершину не входят внешние линии, равными нулю, а в остальных точках - суммам соответствующих частот внешних линий, получаем для A_X представление /12/, где Q_X, \bar{Q}_X обладают свойствами $a/, b/, v/$. В частности, чтобы найти функцию A_X для диаграммы без внешних линий, необходимо положить все $N_i = 0$. Для диаграммы, остающейся связной при разрыве штриховых линий, имеем

$$A_X(\omega(k_1), \dots, \omega(k_c); T) \cong -iT \Upsilon_\xi(0, \dots, 0, \omega(k_1), \dots, \omega(k_c)) \quad /П.7/$$

Подставляя /П.7/ в /11/, убеждаемся, что диаграммы, остающиеся связными при разрыве штриховых линий, растут линейно при $T \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rajaraman R. Solitons and Instantons: Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. Amsterdam - New-York-Oxford: North Holland, 1982, p. 409.
2. Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. ЖЭТФ, 1949, 19, вып. 3, с. 256-268.
3. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталеv О.А. ТМФ, 1972, 10, №2, с. 162-181; Разумов А.В., Хрусталеv О.А. ТМФ, 1976, 29, №3, с. 300-308; Kulshov S.P., Matveev V.A., Smondyrev M.A. JINR, E2-9116, Dubna, 1975; Creutz M. Extended objects. Preprint BNL-21923, Upton: BNL, 1976.
4. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Lett., 1976, 63B, No 4, p. 435-438.
5. Jevicki A. Nucl.Phys., 1976, B117, No 2, p. 365-376.
6. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Rep., 1978, 42C, No 1, p.1-87.
7. Abbott L.F. Nucl.Phys., 1978, B139, No 1/2, p. 159-169.
8. Creutz M. Phys.Rev., 1975, D12, No 10, p. 3126-3144.
9. Matveev V.A. Nucl.Phys., 1977, B121, No 3, p. 403-412.
10. Златев С.И., Матвеев В.А. ОИЯИ, P2-82-244, Дубна, 1982.
11. Златев С.И., Матвеев В.А., Чечелашвили Г.А. ОИЯИ, P2-80-505, Дубна, 1980.
12. Гельфанд И.М., Шилоv Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.
13. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистика. Изд. ЛГУ, Л., 1976.
14. Златев С.И., Матвеев В.А., Чечелашвили Г.А. ТМФ, 1982, 50, №3.
15. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Phys.Lett., 1982, 114B, No 5, p. 340-343.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1984 года.

Златев С.И., Матвеев В.А.

P2-84-186

Проблема инфракрасных расходимостей при квантовании солитонов

Обсуждается проблема инфракрасных расходимостей при квантовании солитонных решений в рамках теории возмущений. Показано, что в сумме трехпетлевых диаграмм без внешних линий такие расходимости сокращаются лишь частично.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Zlatev S.I., Matveev V.A.

P2-84-186

The Infrared Problem in the Quantization of Solitons

The problem of infrared divergencies in the perturbative, quantization of soliton solutions is discussed. It is shown that in the sum of the three-loop diagrams without external lines only partial cancellation of such divergencies takes place.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984