объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-178

В.Л.Любошиц

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ И ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ НА ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ МНОЖЕСТВЕННОМ РОЖДЕНИИ ЧАСТИЦ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1984

1. В настоящей работе рассмотрены интегральные соотношения, которым удовлетворяет волновая функция непрерывного спектра $\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r})$, описывающая относительное движение двух рассеивающихся частиц. Эти соотношения, обобщающие результаты теории эффективного радиуса [1-3], могут оказаться полезными при анализе влияния взаимодействия в конечном состоянии на двухчастичные корреляции [4-9].

Волновая функция непрерывного спектра $\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\vec{\nabla}^2 \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) + (k^2 - v(r))\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = 0 \qquad /1/$$

и имеет асимптотику

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(k, \frac{\vec{k}\vec{r}}{kr})/r \cdot e^{ikr} \quad . \qquad /2/$$

Здесь $\vec{k}$ - волновой вектор в с.ц.и., $\vec{r}$ - расстояние между частицами ($k = |\vec{k}|$, $r = |\vec{r}|$), $v(r) = 2mV(r)/\hbar^2$, где $V(r)$ - потенциал взаимодействия, m - приведенная масса, f - амплитуда рассеяния /см., например, [10], § 136/.

Нас будет интересовать объемный интеграл $I_k = \int\limits_V |\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r}$, который мы преобразуем к поверхностному интегралу*. Для этого воспользуемся стандартным приемом, который использовался ранее при вычислении одномерных интегралов $\int\limits_0^R (r\psi_{k\ell}(r))^2 dr$, соответствующих состояниям непрерывного спектра с определенным орбитальным моментом /см. [3, 11, 12]/. Умножим уравнение /1/ для комплесно-сопряженной функции $\psi^*_{\vec{k}}(\vec{r})$ на производную $\frac{\partial}{\partial k}\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$. Далее продифференцируем уравнение /1/ для волновой функции $\psi^*_{\vec{k}}(\vec{r})$ по волновому числу k и умножим получившееся выражение на $\psi^*_{\vec{k}}(\vec{r})$. Вычитая из второго результата первый, находим

$$2k|\psi_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 = \frac{\partial}{\partial k}(\psi_{\vec{k}}(\vec{r}))\vec{\nabla}^2\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) - \psi^*_{\vec{k}}(\vec{r})\,\vec{\nabla}^2\frac{\partial\psi_{\vec{k}}(\vec{r})}{\partial k} = \qquad /3/$$

$$= \vec{\nabla}\left[\frac{\partial\psi_{\vec{k}}(\vec{r})}{\partial k}\vec{\nabla}\psi^*_{\vec{k}}(\vec{r}) - \psi^*_{\vec{k}}(\vec{r})\vec{\nabla}\frac{\partial\psi_{\vec{k}}(\vec{r})}{\partial k}\right].$$

---

*В дальнейшем будем для краткости опускать индекс (+), указывающий на характер асимптотики /расходящаяся волна на очень больших расстояниях/.

В соответствии с теоремой Гаусса имеем

$$\int_V |\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 d^3\vec r = \frac{1}{2k}\int_S \Big[\frac{\partial\psi_{\vec k}(\vec r)}{\partial k}\vec\nabla\,\psi^*_{\vec k}(\vec r) - \psi^*_{\vec k}(\vec r)\,\vec\nabla\frac{\partial}{\partial k}\psi_{\vec k}(\vec r)\Big]d\vec S\,. \qquad /4/$$

Интегрирование в правой части /4/ проводится по поверхности S, ограничивающей объем V. Заметим, что из уравнения /1/ следуют также соотношения

$$\int d\vec S[\psi_{\vec k}(\vec r)\,\vec\nabla\,\psi^*_{\vec k}(\vec r) - \psi^*_{\vec k}(\vec r)\,\vec\nabla\,\psi_{\vec k}(\vec r)] = 0\,, \qquad /5/$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\Big(\int d\vec S\,[\psi_{\vec k}(\vec r)\,\vec\nabla\,\psi^*_{\vec k}(\vec r) - \psi^*_{\vec k}(\vec r)\,\vec\nabla\,\psi_{\vec k}(\vec r)]\Big) = 0\,, \qquad /6/$$

которые автоматически обеспечивают действительность поверхностного интеграла в правой части /4/.

В случае сферы радиуса R формула /4/ дает:

$$I_k^{(R)} = \int_{V=\frac{4\pi}{3}R^3} |\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 d^3\vec r =$$

$$= \frac{\pi R^2}{k}\int_{-1}^{1}\Big[\frac{\partial\psi_{\vec k}(\vec R)}{\partial k}\,\frac{\partial\psi^*_{\vec k}(\vec R)}{\partial R} - \psi^*_{\vec k}(\vec R)\frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{\partial\psi_{\vec k}(\vec R)}{\partial k}\Big)\Big]d(\cos\theta), \qquad /7/$$

где θ - угол между волновым вектором $\vec k$ и радиусом-вектором $\vec R$ точки на сферической поверхности. Если радиус сферы R во много раз превышает как длину волны $\lambda\!\!\!^{-} = 1/k$, так и радиус действия сил r_0, то при вычислении интеграла $I_k^{(R)}$ по формуле /7/ можно воспользоваться асимптотическим выражением /2/ для волновой функции $\psi_{\vec k}(\vec R)$. При этом

$$\psi^*_{\vec k}(\vec R) = e^{-ikR\cos\theta} + \frac{f^*(k,\theta)}{R}e^{-ikR}\Big(1+O\big(\tfrac{1}{kR}\big)+O\big(\tfrac{r_0}{R}\big)\Big);$$

$$\frac{\partial\psi^*_{\vec k}(\vec R)}{\partial R} = -ik\cos\theta\, e^{-ikR\cos\theta} - f^*(k,\theta)\Big(\frac{ik}{R}+\frac{1}{R^2}\Big)e^{-ikR}\Big(1+O\big(\tfrac{1}{kR}\big)+O\big(\tfrac{r_0}{R}\big)\Big);$$

$$\frac{\partial\psi^*_{\vec k}(\vec R)}{\partial k} = iR\psi_{\vec k}(\vec R) + iR(\cos\theta-1)e^{ikR\cos\theta} + \frac{\partial f(k,\theta)}{\partial k}\cdot\frac{e^{ikR}}{R}\Big(1+O\big(\tfrac{1}{kR}\big)+O\big(\tfrac{r_0}{R}\big)\Big);$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{\partial\psi_{\vec k}(\vec R)}{\partial k}\Big) = iR\frac{\partial\psi_{\vec k}(\vec R)}{\partial R} - kR\cos\theta(\cos\theta-1)e^{ikR\cos\theta} + \qquad /8/$$

$$+ i\cos\theta\, e^{ikR\cos\theta} - \Big[i\frac{f(k,\theta)}{R} + i\frac{k}{R}\frac{\partial}{\partial k}f(k,\theta) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial k}f(k,\theta)\Big]e^{ikR}\Big(1+O\big(\tfrac{1}{kR}\big)+O\big(\tfrac{r_0}{R}\big)\Big).$$

Выполним интегрирование по $(\cos\theta)$, учитывая, что в соответствии с /5/

$$\int_{-1}^{1}\Big(\psi_{\vec k}(\vec R)\frac{\partial}{\partial R}\psi^*_{\vec k}(\vec R) - \psi^*_{\vec k}(\vec R)\frac{\partial}{\partial R}\psi_{\vec k}(\vec R)\Big)d(\cos\theta) = 0\,. \qquad /9/$$

После усреднения осциллирующих членов, пропорциональных e^{2ikR} и e^{-2ikR}, по малому интервалу волновых чисел, удовлетворяющих условию $1/R \ll \Delta k \ll k$, получим

$$\langle I_k\rangle^{(R)} = \frac{4\pi}{3}R^3 + \Big[\frac{2\pi}{k}\frac{\partial}{\partial k}f(k,0) + \frac{\pi}{k^2}f^*(k,0) - \qquad /10/$$

$$- i\int f^*(k,\theta)\frac{\partial}{\partial k}f(k,\theta)\,d\Omega - \frac{1}{2}\int|f(k,\theta)|^2 d\Omega\Big]\Big(1+O\big(\tfrac{1}{kR}\big)\Big).$$

Далее учтем следствия оптической теоремы:

$$\frac{1}{2}\int|f(k,\theta)|^2 d\Omega = \frac{2\pi}{k}\,\mathrm{Im}f(k,0)\,,$$

$$-i\int f^*(k,\theta)\frac{\partial}{\partial k}f(k,\theta)\,d\Omega - \frac{1}{2}\int|f(k,\theta)|^2 d\Omega =$$

$$= \mathrm{Im}\int f^*(k,\theta)\frac{\partial}{\partial k}f(k,\theta)\,d\Omega - \frac{2\pi}{k}i\frac{\partial}{\partial k}(\mathrm{Im}f(k,0)) + \frac{2\pi i}{k}\mathrm{Im}f(k,0).$$

В результате находим

$$\langle I_k\rangle^{(R)} = \frac{4\pi}{3}R^3 + \Big[\mathrm{Im}\int f^*(k,\theta)\frac{\partial}{\partial k}f(k,\theta)\,d\Omega + \qquad /11/$$

$$+ \frac{2\pi}{k^2}\frac{\partial}{\partial k}(k\,\mathrm{Re}f(k,0))\Big]\Big(1+O\big(\tfrac{1}{kR}\big)+O\big(\tfrac{1}{\Delta kR}\big)\Big).$$

Устремляя радиус сферы R к бесконечности, получаем

$$\Delta I_1 = \int(|\psi_{\vec k}(\vec r)|^2-1)\,d^3\vec r = \lim_{R\to\infty}\Big(\langle I_k\rangle^{(R)} - \frac{4\pi}{3}R^3\Big) - \qquad /12/$$

$$= \mathrm{Im}\int f^*(k,\theta)\frac{\partial}{\partial k}f(k,\theta)\,d\Omega + \frac{2\pi}{k^2}\frac{\partial}{\partial k}(k\,\mathrm{Re}f(k,0))\,.$$

Здесь интегрирование проводится по всему 3-мерному пространству, причем подразумевается, что отбрасываются конечные осциллирующие члены, не имеющие определенного предела при $R\to\infty$. Такие члены исчезают при усреднении по сколь угодно малому интервалу волновых чисел в окрестности k.

Если ввести стандартное представление амплитуды упругого рассеяния через фазовые сдвиги:

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_\ell(2\ell+1)\,e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell\,P_\ell(\cos\theta)\,, \qquad /13/$$

то формулу /12/ можно переписать в виде:

$$\Delta I_1 = \int(|\psi_{\vec k}(\vec r)|^2-1)\,d^3\vec r = \frac{2\pi}{k^2}\sum_\ell(2\ell+1)\frac{d\delta_\ell}{dk} \qquad /14/$$

или

$$\Delta I_1 = \int (|\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 - 1)\, d^3\vec r = \frac{\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1)\, v \tau_\ell \,, \qquad /15/$$

где $v = \hbar k/m$ - скорость, $\tau_\ell = 2\hbar \frac{d\delta_\ell}{dE}$ - "вигнеровское" время задержки расходящейся сферической волны, соответствующее определенному моменту ℓ /18/.

2. Рассмотрим теперь частный случай изотропного /S - волнового/ рассеяния. Тогда независимо от соотношения между радиусом действия сил r_0 и длиной волны $\lambda\!\!\!^{-} = 1/k$ при $r \gg r_0$ волновая функция принимает вид:

$$\tilde\psi_{\vec k}(\vec r) = e^{i\vec k\vec r} + \frac{f}{r} e^{ikr} \,. \qquad /16/$$

Вычислим объемный интеграл $\int_v (|\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 - |\tilde\psi_{\vec k}(\vec r)|^2)\, d^3\vec r$, считая, что область интегрирования ограничена замкнутой поверхностью S, проходящей вне радиуса действия сил. Согласно /4/,

$$\int |\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 d^3\vec r = \Big[\frac{1}{2k} \int_s d\vec S \Big(\frac{\partial \tilde\psi_{\vec k}(\vec r)}{\partial k} \nabla \tilde\psi^*_{\vec k}(\vec r) - \tilde\psi^*_{\vec k}(\vec r) \nabla \frac{\partial \tilde\psi_{\vec k}(\vec r)}{\partial k}\Big)\Big] \times \qquad /17/$$
$$\times\, (1 + O(r_0/V^{1/3}))\,,$$

где $\tilde\psi$ определяется по формуле /16/. С другой стороны, при $r \neq 0$ функция $\tilde\psi_{\vec k}(\vec r)$ удовлетворяет уравнению /1/ с $v(r) = 0$, а следовательно, и равенству /3/. Поскольку при $r = 0$ функция $\tilde\psi_{\vec k}(\vec r)$ имеет особенность, применение теоремы Гаусса дает

$$\int |\tilde\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 d^3\vec r = \frac{1}{2k} \int \Big(\frac{\partial \tilde\psi_{\vec k}(\vec r)}{\partial k} \nabla \tilde\psi^*_{\vec k}(\vec r) - \tilde\psi^*_{\vec k}(\vec r) \nabla \frac{\partial \tilde\psi_{\vec k}(\vec r)}{\partial k}\Big) d\vec S \; - \qquad /18/$$
$$- \lim_{r\to 0} \frac{\pi r^2}{k} \int_{-1}^{1} \Big[\frac{\partial \tilde\psi_{\vec k}(\vec r)}{\partial k} \frac{\partial \tilde\psi^*_{\vec k}(\vec r)}{\partial r} - \tilde\psi^*_{\vec k}(\vec r) \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial \tilde\psi_{\vec k}(\vec r)}{\partial k}\Big)\Big] d(\cos\theta)\,.$$

С учетом /16/ после простых вычислений с применением формулы $\mathrm{Im} f = k|f|^2$ /следствие оптической теоремы/ получаем

$$\int_v \Big(|\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 - \Big|e^{i\vec k\vec r} + \frac{f(k)}{r} e^{ikr}\Big|^2\Big) d^3\vec r = \qquad /19/$$
$$= \Big[4\pi\, \mathrm{Im}\Big(f^*(k) \frac{df(k)}{dk}\Big) + \frac{2\pi}{k} \frac{d}{dk}(\mathrm{Re} f(k))\Big]\Big(1 + O\Big(\frac{r_0}{V^{1/3}}\Big)\Big)\,.$$

Переходя к интегрированию по всему пространству, находим /ср. /9/ /

$$\Delta I_2 = \int \Big(|\psi_{\vec k}(\vec r)|^2 - \Big|e^{i\vec k\vec r} + \frac{f(k)}{r} e^{ikr}\Big|^2\Big) d^3\vec r \; - \qquad /20/$$
$$= 4\pi\, \mathrm{Im}\Big(f^*(k) \frac{df(k)}{dk}\Big) + \frac{2\pi}{k} \frac{d}{dk}(\mathrm{Re} f(k))\,.$$

Подчеркнем, что в отличие от соотношения /12/, результат /20/ относится только к случаю полностью изотропного /S -волнового/ рассеяния*. Реально равенства /19/ и /20/ выполняются с хорошей точностью при очень малых энергиях, когда $kr_0 \ll 1$. Анализ показывает, что при $k \ll 1/r_0$ относительный вклад состояний с орбитальными моментами $\ell \geq 1$ в интеграл ΔI_2 имеет величину порядка $(kr_0) \ln\big(\frac{1}{kr_0}\big)$, и им можно пренебречь. Амплитуда S -рассеяния имеет вид

$$f = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin\delta_0 \,, \qquad /21/$$

где δ_0 - фаза рассеяния; в соответствии с этим формулу /20/ можно преобразовать к виду

$$\Delta I_2 = -\frac{2\pi}{k} |f|^2 \frac{d}{dk} \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{f}\Big) = \frac{2\pi}{k^2}\Big(\frac{d\delta_0}{dk} - \frac{\sin 2\delta_0}{k}\Big)\,. \qquad /22/$$

3. Легко понять, что формула /19/ будет иметь общий характер, если в ней оставить только S -волновую часть волновой функции $\psi_{\vec k}(\vec r)$ и одновременно заменить амплитуду рассеяния f и экспоненту $e^{i\vec k\vec r}$ на первые члены разложения по полиномам Лежандра. Соответствующие разложения для $\psi_{\vec k}(\vec r)$ и $e^{i\vec k\vec r}$ имеют вид /10/, §§ 136, 34/:

$$\psi_{\vec k}(r) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) \frac{u_{k\ell}(r)}{r} e^{i\delta_\ell} P_\ell(\cos\theta)\,,$$

---

* Легко видеть, что формула /20/ согласуется с соотношением /12/ /в применении к S-рассеянию/. Действительно, непосредственное интегрирование по всему пространству дает

$$\int \Big(\Big|e^{i\vec k\vec r} + \frac{f}{r} e^{ikr}\Big|^2 - 1\Big) d^3\vec r = \frac{2\pi}{k^2} \mathrm{Re} f$$

/как и при выводе /12/, здесь отбрасывается член, осциллирующий при $kr \to \infty$/. Складывая это равенство с /20/, приходим к формуле /12/ с не зависящей от угла амплитудой рассеяния.

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-i)^{\ell} (2\ell+1) \frac{r^{\ell}}{k^{\ell}} \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{\ell} \frac{\sin kr}{kr} P_{\ell}(\cos\theta). \qquad /23/$$

С учетом /23/ и /13/ произведем в формуле /20/ замены

$$\psi_{\vec{k}}(r) \to \frac{u_{k\ell}(r)}{r}, \quad f(k) \to f_0 = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin\delta_0 ,$$
$$e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{f(k)}{r} e^{ikr} \to \frac{\sin kr}{kr} + e^{i\delta_0} \sin\delta \; \frac{e^{ikr}}{kr} = e^{i\delta_0} \frac{\sin(kr+\delta_0)}{kr} . \qquad /24/$$

Тогда придем к следующей формуле /см. также монографию [12], где используется другая нормировка для $u_{k0}(r)$/:

$$\int_0^{\infty} (u_{k0}^2(r) - \sin^2(kr+\delta_0))\, dr =$$
$$= -\frac{k}{2} |f_0|^2 \frac{k}{dk} [\mathrm{Re}(\frac{1}{f_0})] = \frac{1}{2} \frac{d\delta_0}{dk} - \frac{1}{4k} \sin 2\delta_0 . \qquad /25/^{*}$$

Формула /25/ является также простым следствием известного результата Людерса-Вигнера [11,13]

$$\int_0^{R} u_{k0}^2(r)\, dr = [\frac{1}{2}(R + \frac{d\delta_0}{dk}) - \frac{1}{4k} \sin(2kR + 2\delta_0)](1 + O(\frac{r_0}{R})) . \qquad /26/$$

При очень малых энергиях, когда справедливо представление Ландау-Смородинского [1,2]

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} d_0 k^2 - ik \qquad /27/$$

/здесь a_0 - длина рассеяния, d_0 - эффективный радиус/, из /25/ непосредственно следует известный результат теории эффективного радиуса

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} [u_{k0}^2(r) - \sin^2(kr+\delta_0)]\, dr = -\frac{1}{2} d_0 a_0^2 . \qquad /28/$$

---

* При неравных нулю угловых моментах справедливо аналогичное соотношение

$$\int_0^{\infty} (u_{k\ell}^2(r) - \sin^2(kr + \delta_{\ell} - \frac{\pi}{2}\ell))\, dr = \frac{1}{2} \frac{d\delta_{\ell}}{dk} - (-1)^{\ell} \frac{1}{4k} \sin 2\delta_{\ell} .$$

Таким образом, при $k \to 0$

$$\Delta I_2 = -2\pi d_0 a_0^2 . \qquad /29/$$

4. Рассмотрим теперь, каким образом можно использовать полученные результаты для оценки влияния взаимодействия в конечном состоянии на парные корреляции частиц в инклюзивных процессах.

В рамках модели одночастичных источников вероятность генерации двух нетождественных бесспиновых частиц с 4-импульсами p_1 и p_2 пропорциональна интегралу [8,9]

$$W(p_1, p_2) = \int w(\vec{r})\, |\psi_{-\vec{k}}(\vec{r})|^2\, d^3\vec{r} , \qquad /30/$$

где $w(\vec{r})$ - вероятностное распределение расстояний между точками испускания рассматриваемых частиц в с.ц.и. пары, k - импульс одной из частиц в с.ц.и.*. Если характерное расстояние между точками испускания двух частиц в их с.ц.и. велико по сравнению с длиной волны $\lambda = 1/k$, то с учетом приведенных выше соотношений для вычисления интеграла /30/ нет необходимости знать явный вид функции $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ на малых расстояниях. Применяя формулу /12/ и учитывая, что в интеграле /12/ основную роль играют расстояния $r \le 1/k$, в рассматриваемом случае получим

---

* Следует помнить, что функция $w(\vec{r})$ зависит от скорости с.ц.и. двух частиц $\vec{v}$ по отношению к лабораторной системе отсчета. Если в лабораторной системе отсчета распределение расстояний между точками генерации частиц и разности времен испускания есть $\tilde{w}(\vec{r}, t)$, то с учетом преобразований Лоренца

$$w(\vec{r}) = \int \tilde{w}(\vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r}\vec{n}) + \gamma\vec{v}t,\ \gamma(t + \vec{v}\vec{r}/c^2)\, dt ,$$

где $\vec{n} = \vec{v}/v$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ - лоренц-фактор ($\int \tilde{w}(\vec{r}, t)\, d^3\vec{r}\, dt = \int w(\vec{r})\, d^3\vec{r} = 1$). В случае гауссовского распределения, которое использовалось в работе [9],

$$\tilde{w}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2 r_0^2 r_0} \exp(-\frac{r^2}{4r_0^2} - \frac{t^2}{4r_0^2}),$$

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^{3/2} r_0^2 \gamma \sqrt{r_0^2 + v^2 r_0^2}} \exp(-\frac{r^2 - (\vec{r}\vec{n})^2}{4r_0^2} - \frac{(\vec{r}\vec{n})^2}{4\gamma^2(r_0^2 + v^2 r_0^2)}) .$$

$$W(p_1, p_2) = 1 + \int w(\vec{r})\,(|\psi_{-\vec{k}}(\vec{r})|^2 - 1)\,d^3\vec{r} \approx 1 + w(0)\Delta I_1 , \qquad /31/$$

где ΔI_1 определяется согласно /12/ или /14/.

Перейдем к случаю парных корреляций при малых относительных импульсах, когда преобладает взаимодействие в S-состоянии. Пусть характерные расстояния между точками испускания в с.ц.и. генерируемых частиц $\tilde{r} \gg r_0 \sim d_0$, но при этом $\tilde{r}$ могут быть сравнимы с длиной волны $\lambdabar = 1/k$ или меньше $\lambdabar$. Применяя формулу /20/ и учитывая, что в интеграле основную роль играют расстояния $\tilde{r} \lesssim r_0 - d_0$, находим

$$W(p_1, p_2) = 1 + B ,$$
$$B = \int w(\vec{r})\,[\frac{|f|^2}{r^2} + 2\mathrm{Re}(\frac{f}{r}\,e^{i(kr + \vec{k}\vec{r})})]\,d^3\vec{r} + w(0)\Delta I_2 , \qquad /32/$$

где в соответствии с /22/ $\Delta I_2 = -\frac{2\pi}{k}|f|^2\frac{d}{dk}[\mathrm{Re}(\frac{1}{f})]$. При очень малых k, когда $k\tilde{r} \ll 1$, и при условии $|a_0| \gg d_0$ зависимость корреляционной функции B от разности импульсов описывается простым выражением

$$B = \frac{a_0^2}{1 + k^2 a_0^2}(\langle\frac{1}{r^2}\rangle + \frac{2}{a_0}\langle\frac{1}{r}\rangle - 2\pi d_0 w(0)) . \qquad /33/$$

При увеличении k становятся существенными осцилляции второго члена в соотношении /32/, и появляется зависимость от параметра $k\tilde{r}$ [9].

Формулы /32/-/33/ фактически уже использовались в нашей статье [9] при конкретных расчетах для двух нуклонов с гауссовской функцией распределения расстояний между точками генерации /см.соотношения /19/-/23/ работы [9]/*. Сходный метод учета взаимодействия в конечном состоянии применялся ранее Балдиным [6,7] при исследовании процессов фоторождения π-мезонов на дейтронах вблизи порога.

В случае частиц с отличными от нуля спинами j_1 и j_2 S-волновое взаимодействие может зависеть от полного спина системы J. Тогда вместо /32/ следует написать

---

* При гауссовской параметризации [9]

$$\langle\frac{1}{r^2}\rangle = (2\gamma\rho r_0)^{-1} , \quad \langle\frac{1}{r}\rangle = C(\gamma\rho)^{-1} , \quad w(0) = (4\sqrt{\pi}\,\gamma r_0^2 \rho)^{-1} ,$$
$$\rho = \sqrt{r_0^2 + v^2\tau_0^2} , \quad C = \frac{1}{2u}\ln\frac{1+u}{1-u} , \quad u = \frac{v}{\rho}\sqrt{r_0^2 + \tau_0^2} .$$

$$W(p_1, p_2) = 1 + \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \frac{2J+1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} B^{(J)} , \qquad /34/$$

где $B^{(J)}$ определяются согласно /32/-/33/, причем длины рассеяния $a_0^{(J)}$ и эффективные радиусы $d_0^{(J)}$, вообще говоря, различны для разных значений J. Для тождественных частиц с произвольным спином симметризация волновой функции в интеграле /30/ приводит к выражению /см.также [9]/

$$W(p_1, p_2) = 1 + \frac{(-1)^{2j}}{2j+1}\langle\cos 2\vec{k}\vec{r}\rangle + 2\sum_{J-\text{четн.}} \frac{2J+1}{(2j+1)^2} B^{(J)} , \qquad /35/$$

где второй член соответствует эффекту бозе- или ферми-статистики для невзаимодействующих частиц [14-16], а в третьем члене суммирование проводится только по четным значениям J *.

5. В заключение рассмотрим, как влияет на полученные соотношения учет кулоновского взаимодействия заряженных частиц. Будем считать, что рассеяние на короткодействующем потенциале дает вклад только в S-волну. Пусть $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ - истинная волновая функция непрерывного спектра в кулоновском и короткодействующем потенциалах, $\tilde{\psi}_{\vec{k}}(\vec{r})$ - волновая функция в кулоновском потенциале, совпадающая с истинной вне радиуса действия сил. Применяя соотношения /17/ и /18/, легко получить равенство:

$$\Delta I_2 = \int(|\psi_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 - |\tilde{\psi}_{\vec{k}}(\vec{r})|^2)\,d^3\vec{r} =$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{\pi r^2}{k}(\frac{\partial\tilde{\psi}^*_{\vec{k}}(\vec{r})}{\partial r}\cdot\frac{\partial\tilde{\psi}_{\vec{k}}(\vec{r})}{\partial k} - \tilde{\psi}^*_{\vec{k}}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial k}\psi_{\vec{k}}(\vec{r})) . \qquad /36/$$

Разложение функции $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ при $r \to 0$ описывается формулой /[10], § 138/

$$\tilde{\psi} = \sqrt{A_c}\{1 + \frac{A_c}{r} + ikA_c f_c + \frac{2}{a_c}\cdot f_c[\ln(\frac{2r}{a_c}) + 2C - 1 + h(ka_c)] + \dots\} . \qquad /37/$$

---

* В применении к нейтрону и протону и двум нейтронам формулы /34/ и /35/ дают

$$W_{np} = 1 + \frac{1}{4}B_{np}^{(J=1)} + \frac{3}{4}B_{np}^{(J=1)} ; \quad W_{nn} = 1 - \frac{1}{2}\langle\cos 2\vec{k}\vec{r}\rangle + \frac{1}{4}B_{nn}^{(J=0)}$$

со значениями длин рассения и эффективных радиусов $a_{onp}^{(J=0)} = 23{,}7$ Фм, $d_{onp}^{(J=0)} = 2{,}7$ Фм; $a_{onp}^{(J=1)} = -5{,}4$ Фм, $d_{onp}^{(J=1)} = 1{,}7$ Фм; $a_{onn}^{(J=0)} = 17$ Фм, $d_{onn}^{(J=0)} = 2{,}7$ Фм.

Здесь $a_c = \dfrac{\hbar^2(m_1+m_2)}{m_1 m_2 e_1 e_2}$ - боровский радиус,

$$A_c = \pm \frac{2\pi/ka_c}{e^{\pm 2\pi/ka_c} - 1} - \qquad /38/$$

кулоновский фактор /знак "плюс" соответствует отталкиванию, знак "минус" - притяжению/;

$$f_c = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin\delta_0 \frac{1}{A_c}, \qquad /39/$$

где δ_0 - сдвиг фазы S-волны за счет ядерных сил; $C = 0{,}577...$,

$$h(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + x^{-2})} .$$

Подставляя /37/ в формулу /36/, после несложных преобразований с использованием равенства $\mathrm{Im}\, f_c = kA_c|f_c|^2$ получим

$$\Delta I_2 = 4\pi A_c \mathrm{Im}\left(f_c^* \frac{df_c}{dk}\right) + \frac{2\pi}{k} \frac{d}{dk}(\mathrm{Re}\, f_c) - \frac{4\pi}{ka} A_c |f_c|^2 \frac{d}{dk}(h(ka_c)) . \qquad /40/$$

Формулу /40/ можно переписать в эквивалентном виде, аналогичном представлению /22/:

$$\Delta I_2 = -\frac{2\pi}{k} A_c |f_c(k)|^2 \frac{d}{dk}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_c(k)}\right) + \frac{2}{a_c} h(ka_c)\right]. \qquad /41/$$

В приближении эффективного радиуса "амплитуда" f_c имеет вид

$$f_c = \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} d_0 k^2 - \frac{2}{a_c} h(ka_c) - ikA_c(k)\right)^{-1} , \qquad /42/$$

и тогда

$$\Delta I_2 = -\frac{2\pi}{k} A_c |f_c(k)|^2 d_0 . \qquad /43/$$

Согласно /29/, вероятность генерации двух нетождественных бесспиновых частиц пропорциональна /при условии $\bar{r} \gg r_0 - d_0$/

$$W(p_1, p_2) = \int w(\vec{r}) |\tilde{\psi}_{-\vec{k}}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} + w(0)\Delta I_2 ,$$

где ΔI_2 определяется по формулам /40/-/41/. Если эффективные расстояния между точками генерации $\bar{r}$ во много раз меньше боровского радиуса a_c, то можно воспользоваться приближенным выражением для $\tilde{\psi}_{\vec{k}}(\vec{r})$ /см. /17/, а также приложение к статье /9/ /

$$\tilde{\psi}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sqrt{A_c}\left(e^{i\vec{k}\vec{r}} + f_c \frac{\cos kr + iA_c \sin kr}{r}\right). \qquad /44/$$

Подставляя /44/ в /43/, получаем

$$W(p_1, p_2) = A_c(1 + B_c),$$

$$B_c = \int w(\vec{r}) \left\{ \frac{|f_c|^2}{r^2} + 2\mathrm{Re}\left[\frac{f_c}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} (\cos kr + iA_c \sin kr)\right]\right\} d^3\vec{r} - \qquad /45/$$

$$- \frac{2\pi}{k} |f_c|^2 \frac{d}{dk}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_c}\right) + \frac{2}{a_c} h(ka_c)\right] w(0) .$$

При достаточно малых k

$$B_c = |f_c|^2 \left(\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle + 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_c}\right)\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle - 2\pi w(0) d_0\right). \qquad /46/$$

Легко видеть, что с учетом кулоновского взаимодействия формулы /34/ и /35/ для нетождественных и тождественных частиц со спином умножаются на кулоновский фактор A_c; при этом величины $B^{(J)}$ определяются по формулам /45/-/46/. В частности, в случае двух протонов двойные инклюзивные сечения пропорциональны

$$W_c(p_1, p_2) = \frac{2\pi}{ka_c}\left(e^{2\pi/ka_c} - 1\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \langle \cos 2kr \rangle + \frac{1}{4} B_c^{(J=0)}\right),$$

где $a_c = 57{,}5$ Фм, а численные значения параметров, входящих в эффективную "амплитуду", $a_{opp} = 7{,}8$ Фм, $d_{opp} = 2{,}8$ Фм.

Автор выражет глубокую благодарность Р.Ледницкому, М.И.Подгорецкому и Я.А.Смородинскому за обсуждение и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Смородинский Я.А. ЖЭТФ, 1944, т.14, с.269.
2. Смородинский Я.А. ДАН СССР, 1948, т.60, с.217.
3. Bethe H. Phys.Rev., 1949, vol.76, p.38.
4. Watson K.W. Phys.Rev., 1952, vol.88, p.1163.
5. Мигдал А.Б. ЖЭТФ, 1955, т.28, с.1.
6. Балдин А.М. ЖЭТФ, 1960, т.38, с.579.
7. Балдин А.М. В сб.: Труды ФИАН СССР, Изд-во АН СССР, 1963, с.3-36.
8. Koonin S.E. Phys.Lett., 1977, vol.70B, p.43.
9. Ледницки Р., Любошиц В.Л. ЯФ, 1982, т.35, с.1316.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1974.
11. Lüders G. Zs.f.Naturforschung, 1955, Bd.10a, S.581.
12. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений, ч.2,3. "Мир", М., 1969.

13. Wigner E.P. Phys.Rev., 1955, vol.98, p.145.
14. Копылов Г.И., Подгорецкий М.И. ЯФ, 1973, т.18, с.656.
15. Kopylov G.I. Phys.Lett., 1974, vol.50B, p.472.
16. Копылов Г.И., Подгорецкий М.И. ЯФ, 1972, т.15, с.392.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1984 года

Любошиц В.Л. Р2-84-178

Некоторые интегральные соотношения в теории потенциального рассеяния и влияние взаимодействия в конечном состоянии на парные корреляции при множественном рождении частиц

В рамках теории потенциального рассеяния получены соотношения, связывающие объемные интегралы от выражений, содержащих $|\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r})|^2$, с амплитудой рассеяния и ее производной по волновому числу /$\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r})$ -волновая функция непрерывного спектра в задаче о рассеянии/. Обсуждается применение этих соотношений для анализа влияния взаимодействия в конечном состоянии на двухчастичные корреляции в процессах множественного рождения адронов.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Luboshitz V.L. P2-84-178

Some Integral Relations in the Potential Scattering Theory and the Influence of Final-State Interaction on Pairing Correlations at the Multiple Production of Particles

The relations connecting volume integrals from the expressions containing $|\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r})|^2$ with the scattering amplitude and its derivative at wave number are obtained in the frames of the potential scattering theory/ $\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r})$ is a wave function of continuous spectrum in the scattering problem/. The application of these relations to the analysis of final-state interaction influence on two-particle correlations in processes of multiple production is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984