объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-172

М.В.Чижов

К ОБОСНОВАНИЮ КРИТЕРИЯ ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в журнал "Physics Letters B"

1984

I. Введение

Принцип минимальности взаимодействия стал основным при построении перенормируемого калибровочно-инвариантного лагранжиана. Хорошее согласие теоретической величины аномального магнитного момента электрона с экспериментальной исключает в затравочном лагранжиане неперенормируемый паулевский член вида

$$\frac{e}{2m}\,\bar{\Psi}\,\sigma_{\mu\nu}\,\Psi\cdot F^{\mu\nu}\,. \qquad (I.I)$$

Новым свидетельством в пользу критерия перенормируемости физических теорий явился успех теории электрослабого взаимодействия Глешоу-Салама-Вайнберга, заменившей эффективную теорию с неперенормируемым лагранжианом Ферми.

Однако в работе /I/ была предпринята попытка построения перенормируемой теории со взаимодействием Ферми за счет изменения свободного действия. Для этой цели использовался формализм второго порядка для свободных спинорных полей. Особого внимания заслуживает добавление к обычному лагранжиану гравитационного поля (Гильберта-Эйнштейна)

$$\mathcal{L}_{Grav} = \frac{1}{16\pi G}\,(R-2\Lambda), \qquad (I.2)$$

членов второго порядка по тензору кривизны Римана

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= R^2\,, \\ \mathcal{G} &= R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2\,, \qquad (I.3) \\ \mathcal{H} &= C_{\mu\nu\lambda\sigma}C^{\mu\nu\lambda\sigma}, \end{aligned}$$

что также ведет к перенормируемости получаемой теории /2,3/.

Целью работы является получение из радиационных квантовых поправок членов с производными, где роль вершинных частей выполняет затравочный локальный лагранжиан взаимодействия. Кинетические члены возникают самосогласованным образом при решении уравнения компенсации.

При этом, возникающая динамическая теория оказывается перенормируемой[x)].

II. Модель $g\varphi_N^n$.

Мы рассмотрим самодействие скалярного поля в N -мерном евклидовом пространстве

$$\mathcal{L} = g\,[\varphi(x)]^n . \tag{2.I}$$

Кинетический член в затравочном лагранжиане (2.I) с самого начала отсутствует и может возникнуть за счет радиационных поправок. Пусть мы ожидаем появления кинетического члена в виде

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\varphi(-p)\,K(p)\,\varphi(p) , \tag{2.2}$$

где ядро $K(p)$ удовлетворяет асимптотическому условию

$$K(p) \underset{p^2\to\infty}{\longrightarrow} (p^2)^{\alpha} . \tag{2.3}$$

Ряд теории возмущений будет возникать теперь, как обычно, при разложении производящего функционала по исходному взаимодействию (2.I) с функциями Грина

$$\mathcal{D}(p) = K^{-1}(p) , \tag{2.4}$$

обладающих ультрафиолетовой асимптотикой

$$\mathcal{D}(p) \underset{p^2\to\infty}{\rightarrow} (p^2)^{-\alpha} . \tag{2.5}$$

Если вычисленная двухточечная функция Грина с затравочным пропагатором $\mathcal{D}$ будет давать квадратичную форму (2.2), то появление кинетического члена будет самосогласованным (рис. I).

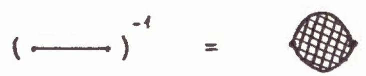

Рис. I.

Иными словами, рис. I представляет графическую запись уравнения компенсации, которое восходит к работе Н.Н. Боголюбова /5/. Согласно методу, развитому в этой работе, лагранжиан (2.I) можно переписать в виде

---

x) В данной работе изучается классификация теорий по свойствам перенормируемости с точки зрения размерного анализа /4/ и не исследуются такие специфические вопросы, например, как наличие или отсутствие аномалий.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int.} , \tag{2.6}$$

где

$$\mathcal{L}_{int.} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_0 . \tag{2.7}$$

Уравнение компенсации представляет собой условие отсутствия радиационных поправок в $\mathcal{L}_0$ от $\mathcal{L}_{int}$.

При конкретных вычислениях с данной точностью уравнение компенсации должно быть решено в некотором фиксированном порядке теории возмущений по константе g . Пусть мы ищем решение с точностью до членов $O(g^k)$. Тогда мы должны рассмотреть все двухточечные функции Грина G_i вплоть до k - порядка по числу вершин $k_i\ (2 \le k_i \le k)$. Диаграмма G_i , содержащая k_i вершин, включает $\frac{k_i n}{2} - 1$ пропагаторов , которые образуют $\frac{k_i(n-2)}{2}$ петель с независимыми импульсами интегрирования. Индекс этой диаграммы

$$\omega(G_i) = N\,\frac{k_i(n-2)}{2} - 2\alpha\left(\frac{k_i n}{2} - 1\right) \tag{2.8}$$

показывает максимальную степень импульса при логарифмически расходящейся части[x)]. Поэтому необходимым условием существования решения уравнения компенсации является равенство

$$2\alpha = \omega(G_i) . \tag{2.9}$$

Решая уравнение (2.9), находим значение α

$$\alpha = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right) . \tag{2.10}$$

Замечательным здесь является тот факт, что α не зависит от числа вершин k_i . Следовательно, если уравнение (2.9) выполнено для некоторого k_i , то оно справедливо и для всех диаграмм G с произвольным числом вершин.

Размерность поля $\varphi(x)$

$$[\varphi(x)] = \mu^{\frac{N}{n}} , \tag{2.II}$$

определяемая из кинетического члена в конфигурационном представлении, приводит к безразмерной константе связи g в (2.I). Таким образом, полученная теория с кинетическим членом (2.2), где α определяется из (2.I0), удовлетворяет необходимому условию перенормируемости (см. Приложение).

---

x) Конечные выражения имеют более высокий порядок малости.

III. Реальный случай четырехмерного пространства

Основным отличием теории с динамическим возникновением кинетических членов от обычной является отсутствие в первой затравочного конечного свободного лагранжиана. Коллективные возбуждения, которые возникают из радиационных поправок, явно содержат однотипные расходимости. Это позволяет найти соотношения между константами перенормировки различных полей и их константами взаимодействия, что особенно важно для моделей большого объединения /6/. В обычной теории поля, фиксируя свободную часть (свойства симметрии, эвристические принципы), мы лишаемся этих связей. То, что у нас остается, это свойство перенормируемости.

Однако, по-прежнему, и в теории с динамическим возникновением кинетических членов значения регуляризованных расходящихся интегралов нам не известны. Здесь на помощь приходят физические соображения. Вся неопределенность оказывается заключенной лишь в константах связи и вакуумных ожиданиях полевых переменных, которые фиксируются из эксперимента.

В реальном четырехмерном пространстве с инвариантом

$$p_\mu p^\mu = inv \tag{3.1}$$

для перенормируемой теории существует три типа расходимостей: логарифмическая, квадратичная и объемная, четвертого порядка (см. Приложение). Поэтому все величины теории будут включать только перечисленные типы регуляризованных расходящихся интегралов:

$$I_0 = Reg \int \frac{d^4p}{p^4} \tag{3.2а}$$

безразмерная величина, соответствующая юнификационной константе связи,

$$I_2 = Reg \int \frac{d^4p}{p^2}, \tag{3.2б}$$

имеет размерность обратной величины ньютоновой константы G и

$$I_4 = Reg \int d^4p \tag{3.2в}$$

может соответствовать комбинации размерных величин $\frac{\Lambda}{G}$ с космологическим членом Λ /3/.

В заключение, основываясь на развитом формализме динамического получения кинетических членов, мы приведем аргумент в пользу наличия в затравочном лагранжиане гравитационного поля членов (I.3). Ультрафиолетовая асимптотика пропагатора гравитационного поля в этом случае должна иметь вид:

$$\Delta(p) \underset{p^2\to\infty}{\to} \frac{1}{p^4}. \tag{3.3}$$

Тензорное поле второго ранга $G_{\mu\nu}$ можно построить из прямого произведения четырех спиноров $\bar\Psi\otimes\Psi\otimes\bar\Psi\otimes\Psi$ как коллективное. Его инвариантное взаимодействие имеет вид

$$\mathcal{L}_{int.} = G_{\mu\nu}\cdot\bar\Psi\sigma^\mu\Psi\cdot\bar\Psi\sigma^\nu\Psi. \tag{3.4}$$

Перепишем это взаимодействие, явно выделяя лишние степени свободы $G_{\mu\nu}$, связанные с векторным полем V_μ

$$\mathcal{L}_{int.} = G_{\mu\nu}\cdot V^\mu\cdot\bar\Psi\sigma^\nu\Psi + G_{\mu\nu}\cdot V^\nu\cdot\bar\Psi\sigma^\mu\Psi - G_{\mu\nu}\cdot V^\mu V^\nu. \tag{3.5}$$

Отклонение $G_{\mu\nu}$ от плоской метрики $\eta_{\mu\nu}$ соответствует гравитационному полю $h_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{3.6}$$

Лагранжиан (3.5) и соотношение (3.6) определяют основные затравочные взаимодействия полей материи и гравитационного поля[x)]

$$\mathcal{L}_1 = V^\mu\cdot\bar\Psi\sigma_\mu\Psi \tag{3.7а}$$

и

$$\mathcal{L}_2 = h_{\mu\nu}\cdot V^\mu\cdot\bar\Psi\sigma^\nu\Psi. \tag{3.7б}$$

Пусть поведение пропагаторов при $p^2\to\infty$ имеет вид

$$\overbrace{VV} \sim \frac{1}{(p^2)^\alpha}, \tag{3.8а}$$

$$\overbrace{\Psi\bar\Psi} \sim \frac{1}{(p^2)^\beta}, \tag{3.8б}$$

$$\overbrace{hh} \sim \frac{1}{(p^2)^\gamma}. \tag{3.8в}$$

Тогда, например, кинетическая часть векторного поля в низшем порядке теории возмущений возникает из диаграмм на рис. 2.

---

x) Все другие взаимодействия возникнут из радиационных поправок в теории возмущений.

Рис. 2.

Здесь векторному, спинорному и гравитационному полям сопоставляем, соответственно, волнистые, сплошные и пунктирные линии. Аналогичные диаграммы порождают и другие функции Грина. Необходимое условие для самосогласованного появления этих пропагаторов приводит к системе уравнений

$$2\alpha = 4 - 4\beta = 8 - 4\beta - 2\gamma \,, \qquad (3.9)$$

которая имеет решение

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 2 \end{cases} . \qquad (3.10)$$

Оно и определяет искомое поведение гравитационного пропагатора (3.3), а также пропагаторов векторного и спинорного полей.

Итак, мы показали, что, исходя лишь из локального взаимодействия полей без производных, возможно самосогласованное появление кинетических членов. Особенно важным свойством полученной динамической теории является ее перенормируемость. Таким образом, если имеет место динамический механизм возникновения кинетических членов, то это может служить обоснованием выбора критерия перенормируемости физических теорий.

В следующей работе мы покажем, что динамический механизм генерации функций Грина возможен и для вершинных частей. Поэтому уравнение компенсации на рис. I имеет смысл, вообще говоря, и для произвольных функций Грина.

Автор выражает искреннюю благодарность А.Д. Донкову, В.Г. Кадышевскому и М.Д. Матееву за интерес к работе и полезные замечания.

Приложение

Рассмотрим произвольную связанную диаграмму G с n вершинами и L внутренними линиями (пропагаторами) в N - мерном импульсном пространстве. В соответствии с правилами Фейнмана /4/, после снятия $N(n-1)$ интеграций с помощью δ - функций (одна остающаяся δ-функция выражает закон сохранения полного импульса), остается $N(L-n+1)$ независимых переменных интегрирования. Вклад от внутренних линий определяется асимптотическим поведением пропагаторов при $p^2 \to \infty$. Условная степень роста по импульсу

$$\omega(G) = N(L-n+1) - \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \qquad (\text{П.I})$$

совпадает с индексом диаграммы. Неотрицательность этой величины является необходимым условием расходимости интеграла, соответствующего данной диаграмме.

Введем понятие максимального индекса вершины

$$\omega_{max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(N-\alpha_i) - N \,, \qquad (\text{П.2})$$

где l - число линий в вершине. Размерность полевой переменной $\varphi_i(x)$ в единицах массы определяется из квадратичной формы для свободного действия

$$[\varphi_i] = \frac{1}{2}(N-\alpha_i) \,. \qquad (\text{П.3})$$

Поэтому максимальный индекс вершины связан с размерностью полей, принадлежащих ей [x)]

$$\omega_{max} = \sum_{i=1}^{l}[\varphi_i] - N \qquad (\text{П.4})$$

и размерностью константы связи

$$\omega_{max} = -[g] \,. \qquad (\text{П.5})$$

Теперь индекс диаграммы перепишем в виде

$$\omega(G) = N - \sum_{i=1}^{l_{ext}}[\varphi_i] - \sum_{k=1}^{n}[g_k] \,, \qquad (\text{П.6})$$

где l_{ext} - число внешних линий в диаграмме, которое является фиксированным для определенных функций Грина. Модели с безразмерными константами связи, в которых индексы диаграмм для данной функции Грина не зависят от числа вершин, входящих в них, относятся к перенормируемому типу. Таким образом, в таких моделях существует конечное число типов расходящихся диаграмм со степенью расходимости не выше, чем размерность пространства[xx)] - N.

---

x) Для локальных взаимодействий без производных.

xx) Последнее замечания верно, если асимптотическое убывание пропагатора не выше, чем размерность пространства N.

Литература

1. Feynman R.P., Gell-Mann M. Theory of the Fermi Interaction, Phys. Rev., 1958, v.109, No.1, p. 193-198.
2. Utiyama R., Dewitt B.S. J. Math. Phys., 1962, v.3, No.4, p. 608-618.
3. Deser S., Tsao H.S., P.Van Nieuwenhuizen. Phys. Rev. 1974, D10, No.10, p. 3337-3342;
   Stelle K.S. Phys. Rev., 1977, D16, No.4, p. 953-969;
   Hasslacher B., Mottola E. Phys. Lett., 1981, 99B, No.3, p.221-224.
4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, "Наука",М., 1976, гл. 5, § 29.
5. Боголюбов Н.Н. ОИЯИ, Д-781, Дубна, 1961.
6. Chizhov M.V. Phys. Lett., 1981, v. 104B, No.6, p. 449-452;
   Чижов М.В. ОИЯИ, Р2-82-484, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 марта 1984 года.

Чижов М.В. Р2-84-172

К обоснованию критерия перенормируемости в квантовой теории поля

Предполагается, что основную роль в квантовой теории элементарных частиц играет локальный лагранжиан взаимодействия. Квадратичная по полям часть лагранжиана, связанная со свойствами свободных частиц, возникает динамически. Полученная таким образом эффективная теория с необходимостью обладает свойством перенормируемости.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской.

Chizhov M.V. P2-84-172

On Substantiation of the Renormalizability Criterion in Quantum Field Theory

It is assumed that the main role in quantum theory of elementary particles belongs to the local interaction lagrangian. A part of the lagrangian of free particles quadratic in fields emerges dynamically. The effective theory thus obtained does possess the property of renormalizability.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984