объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-84-167

Н.С.Шавохина

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ КВАРКОВ

Направлено в сборник
"Проблемы теории гравитации
и элементарных частиц"

1984

Кварки, образующие нуклон, представляют собой релятивистскую систему трех тел. Задача двух, а также многих тел в релятивистском варианте была поставлена А.Пуанкаре /1/. Релятивистская задача двух тел с постоянной по модулю силой взаимного притяжения исследована в /2-7/. Здесь излагается аналогичная задача трех тел, применимая к описанию кварков.

1. МИРОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ КВАРКОВ И СОЕДИНЯЮЩИЕ ИХ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть формулы

$$x^a = x_1^a(u_1),\quad x^a = x_2^a(u_2),\quad x^a = x_3^a(u_3) \qquad /1/$$

означают мировые траектории трех тел, которые называем кварками. Соединим их попарно двумерными поверхностями

$$x^a = x_{12}^a(u_{12}, v_{12}),\quad x^a = x_{23}^a(u_{23}, v_{23}),\quad x^a = x_{31}^a(u_{31}, v_{31}) \qquad /2/$$

и все вместе - трехмерной поверхностью

$$x^a = x_0^a(u_0, v_0, w_0). \qquad /3/$$

В последней формуле вместо сборного индекса 123 поставлен индекс 0. Во всех этих формулах индекс a принимает значения от 0 до N. В реальном случае N = 3.

На первой мировой траектории

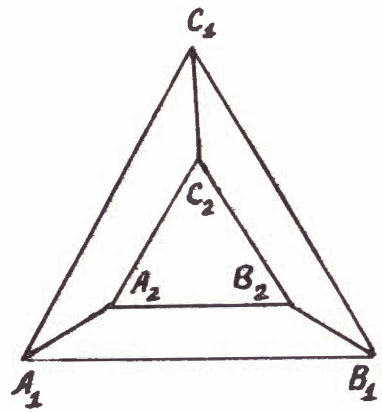
$$u_{12} = {}_1u_{12}(u_1),\ v_{12} = {}_1v_{12}(u_1);\ u_{31} = {}_1u_{31}(u_1),\ v_{31} = {}_1v_{31}(u_1);$$
$$u_0 = {}_1u_0(u_1),\quad v_0 = {}_1v_0(u_1),\quad w_0 = {}_1w_0(u_1). \qquad /4/$$

На второй траектории

$$u_{12} = {}_2u_{12}(u_2),\ v_{12} = {}_2v_{12}(u_2);\ u_{23} = {}_2u_{23}(u_2),\ v_{23} = {}_2v_{23}(u_2);$$
$$u_0 = {}_2u_0(u_2),\quad v_0 = {}_2v_0(u_2),\quad w_0 = {}_2w_0(u_2). \qquad /5/$$

На третьей траектории

$$u_{23} = {}_3u_{23}(u_3),\ v_{23} = {}_3v_{23}(u_3);\ u_{31} = {}_3u_{31}(u_3),\ v_{31} = {}_3v_{31}(u_3); \qquad /6/$$
$$u_0 = {}_3u_0(u_3),\quad v_0 = {}_3v_0(u_3),\quad w_0 = {}_3w_0(u_3).$$



Призма событий, переживаемых системой в промежутке между двумя мгновениями.

На первой двумерной поверхности

$$u_0 = {}_{12}u_0(u_{12}, v_{12}),\quad v_0 = {}_{12}v_0(u_{12}, v_{12}),$$
$$w_0 = {}_{12}w_0(u_{12}, v_{12}). \qquad /7/$$

На второй поверхности

$$u_0 = {}_{23}u_0(u_{23}, v_{23}),\quad v_0 = {}_{23}v_0(u_{23}, v_{23}),\quad w_0 = {}_{23}w_0(u_{23}, v_{23}). \qquad /8/$$

На третьей поверхности

$$u_0 = {}_{31}u_0(u_{31}, v_{31}),\quad v_0 = {}_{31}v_0(u_{31}, v_{31}),\quad w_0 = {}_{31}w_0(u_{31}, v_{31}). \qquad /9/$$

Рассмотрим еще две гиперповерхности T_1 и T_2, представляющие собой два мгновения. На нашей конфигурации они отсекают призму P, схематически изображенную на рисунке. След от гиперповерхности T_1 представляется двумерной поверхностью - криволинейным треугольником $A_1B_1C_1$, а след от T_2 -треугольником $A_2B_2C_2$.

2. ДЕЙСТВИЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

Действие рассматриваемой системы в промежутке между мгновениями T_1 и T_2 представим в виде

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_{12} + S_{23} + S_{31} + S_0. \qquad /10/$$

Здесь

$$S_i = \int_{[i]} \mathfrak{L}_i(x_i(u),\ a_i(u))\,du, \qquad /11/$$

где $a_i(u) = \dfrac{d}{du}x_i(u)$. Интеграл 1 берется по ориентированному отрезку A_1A_2, интеграл 2 - по отрезку B_1B_2, интеграл 3 - по отрезку C_1C_2. Аналогично,

$$S_{ij} = \iint_{[ij]} \mathfrak{L}_{ij}(x_{ij}(u, v),\ a_{ij}(u, v),\ b_{ij}(u, v))\,du\,dv, \qquad /12/$$

где $a_{ij}(u, v) = \dfrac{\partial}{\partial u}x_{ij}(u, v)$, $b_{ij}(u, v) = \dfrac{\partial}{\partial v}x_{ij}(u, v)$.

Интеграл 12 берется по ориентированному четырехугольнику $A_1B_1B_2A_2A_1$, интеграл 23 - по четырехугольнику $B_1C_1C_2B_2B_1$. Интеграл 31 - по четырехугольнику $C_1A_1A_2C_2C_1$. Наконец,

$$S_0 = \iiint_{[0]} \mathfrak{L}_0(x_0(u,v,w),\ a_0(u,v,w),\ b_0(u,v,w),\ c_0(u,v,w))\,du\,dv\,dw, \qquad /13/$$

где

$$a_0(u,v,w) = \frac{\partial}{\partial u} x_0(u,v,w),$$

$$b_0(u,v,w) = \frac{\partial}{\partial v} x_0(u,v,w), \quad c_0(u,v,w) = \frac{\partial}{\partial w} x_0(u,v,w).$$

Последний интеграл берется по призме P с ориентацией $C_1A_1B_1C_2$.

Чтобы действие /10/ не зависело от выбора параметров, функции Лагранжа должны удовлетворять следующим условиям однородности.

В однократных интегралах /11/ при любом числе p

$$\mathfrak{L}(x, pa) = |p|\,\mathfrak{L}(x, a). \qquad /14/$$

Полагая $p^{-1} = a^0$, находим

$$\mathfrak{L}(x, a) = |a^0|\,F\left(x, \frac{a^1}{a^0}, \ldots, \frac{a^N}{a^0}\right),$$

где F - произвольная функция. Дифференцируя /14/ по p при $p = 1$, получаем $a^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^\alpha} - \mathfrak{L} = 0$.

В двухкратных интегралах /12/ при любом линейном преобразовании

$$a'^\alpha = p_{11}a^\alpha + p_{12}b^\alpha, \quad b'^\alpha = p_{21}a^\alpha + p_{22}b^\alpha$$

функция Лагранжа умножается на модуль $|p|$ определителя p этого преобразования:

$$\mathfrak{L}(x, a', b') = |p|\,\mathfrak{L}(x, a, b). \qquad /15/$$

Находя матрицу (p_{ik}) из условия

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^0 & a^1 \\ b^0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /16/$$

получаем

$$a'^\alpha = \frac{J^{\alpha 1}}{J^{01}}, \quad b'^\alpha = \frac{J^{0\alpha}}{J^{01}},$$

где

$$J^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a^\alpha & a^\beta \\ b^\alpha & b^\beta \end{vmatrix}. \qquad /17/$$

Следовательно, $\mathfrak{L}(x, a, b) = |J^{01}|\,F(x, \xi, \eta)$, где F - произвольная функция от x и $2(N-1)$ аргументов

$$\xi^s = \frac{J^{s1}}{J^{01}}, \quad \eta^s = \frac{J^{0s}}{J^{01}}, \quad s = 2,\ldots,N.$$

К такому виду приводится любая функция $\mathfrak{F}(x, J)$ от x и положительно однородная первой степени от совокупности $J = \{J^{\alpha\beta}\}$ аргументов /17/, поскольку

$$\frac{J^{rs}}{J^{01}} = \begin{vmatrix} \xi^r & \xi^s \\ \eta^r & \eta^s \end{vmatrix},$$

а это следует из матричного равенства

$$\begin{pmatrix} a'^\alpha & a'^\beta \\ b'^\alpha & b'^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\alpha & a^\beta \\ b^\alpha & b^\beta \end{pmatrix}$$

и условия /16/. Дифференцируя /15/ по p_{ik} при $p_{ik} = \delta_{ik}$, находим

$$a^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^\alpha} - \mathfrak{L} = 0, \quad b^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^\alpha} = 0, \quad a^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^\alpha} = 0, \quad b^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^\alpha} - \mathfrak{L} = 0.$$

Наконец, в трехкратном интеграле /13/ при любом линейном преобразовании

$$a'^\alpha = p_{11}a^\alpha + p_{12}b^\alpha + p_{13}c^\alpha, \qquad b'^\alpha = p_{21}a^\alpha + p_{22}b^\alpha + p_{23}c^\alpha$$

$$c'^\alpha = p_{31}a^\alpha + p_{32}b^\alpha + p_{33}c^\alpha.$$

Функция Лагранжа умножается на модуль $|p|$ определителя p этого преобразования:

$$\mathfrak{L}(x, a', b', c') = |p|\,\mathfrak{L}(x, a, b, c). \qquad /18/$$

Находя матрицу (p_{ik}) из условия

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^0 & b^1 & b^2 \\ c^0 & c^1 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /19/$$

получаем

$$a'^{\alpha} = \frac{J^{\alpha 12}}{J^{012}}, \qquad b'^{\alpha} = \frac{J^{0\alpha 2}}{J^{012}}, \qquad c'^{\alpha} = \frac{J^{01\alpha}}{J^{012}},$$

где

$$J^{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} a^{\alpha} & a^{\beta} & a^{\gamma} \\ b^{\alpha} & b^{\beta} & b^{\gamma} \\ c^{\alpha} & c^{\beta} & c^{\gamma} \end{vmatrix}. \qquad /20/$$

Следовательно,

$$\mathfrak{L}(x, a, b, c) = |J^{012}|\, F(x, \xi, \eta, \zeta),$$

где F - произвольная функция от x и $3(N-2)$ аргументов

$$\xi^{s} = \frac{J^{s12}}{J^{012}}, \quad \eta^{s} = \frac{J^{0s2}}{J^{012}}, \quad \zeta^{s} = \frac{J^{01s}}{J^{012}}, \qquad s = 3,\dots,N.$$

К такому виду приводится любая функция $\mathfrak{F}(x, J)$ от x и положительно однородная первой степени от совокупоности $J = \{J^{\alpha\beta\gamma}\}$ аргументов /20/, поскольку

$$\frac{J^{rst}}{J^{012}} = \begin{vmatrix} \xi^{r} & \xi^{s} & \xi^{t} \\ \eta^{r} & \eta^{s} & \eta^{t} \\ \zeta^{r} & \zeta^{s} & \zeta^{t} \end{vmatrix},$$

а это следует из матричного равенства

$$\begin{pmatrix} a'^{\alpha} & a'^{\beta} & a'^{\gamma} \\ b'^{\alpha} & b'^{\beta} & b'^{\gamma} \\ c'^{\alpha} & c'^{\beta} & c'^{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{\alpha} & a^{\beta} & a^{\gamma} \\ b^{\alpha} & b^{\beta} & b^{\gamma} \\ c^{\alpha} & c^{\beta} & c^{\gamma} \end{pmatrix}$$

и условия /19/. Дифференцируя /18/ по p_{ik} при $p_{ik} = \delta_{ik}$, находим

$$a^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^{\alpha}} - \mathfrak{L} = 0, \qquad b^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^{\alpha}} = 0, \qquad c^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^{\alpha}} = 0,$$
$$a^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^{\alpha}} = 0, \qquad b^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^{\alpha}} - \mathfrak{L} = 0, \qquad c^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^{\alpha}} = 0,$$
$$a^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c^{\alpha}} = 0, \qquad b^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c^{\alpha}} = 0, \qquad c^{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c^{\alpha}} - \mathfrak{L} = 0.$$

Приведенный анализ очевидным образом распространяется на многомерные интегралы.

3. ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, КАНОНИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬС

Вариация действия /10/ складывается из вариаций ее слагаемых. Интегрируя по частям, находим

$$\delta S_i = \int\limits_{[i]} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial x} - \frac{d}{du}\frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial a}\right)\delta x\, du + \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial a}\delta x\Big|_{[i]},$$

где

$$\Big|_{[1]} = \Big|_{A_1}^{A_2}, \qquad \Big|_{[2]} = \Big|_{B_1}^{B_2}, \qquad \Big|_{[3]} = \Big|_{C_1}^{C_2}.$$

С помощью формулы Грина находим

$$\delta S_{ij} = \iint\limits_{[ij]} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_{ij}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}_{ij}}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}_{ij}}{\partial b}\right)\delta x\, du\, dv +$$
$$+ \oint\limits_{[ij]} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_{ij}}{\partial a} dv - \frac{\partial \mathfrak{L}_{ij}}{\partial b} du\right)\delta x,$$

где

$$\oint\limits_{[12]} = \int\limits_{[2]} - \int\limits_{[1]} - \int_{A_2}^{B_2} + \int_{A_1}^{B_1},$$
$$\oint\limits_{[23]} = \int\limits_{[3]} - \int\limits_{[2]} - \int_{B_2}^{C_2} + \int_{B_1}^{C_1},$$
$$\oint\limits_{[31]} = \int\limits_{[1]} - \int\limits_{[3]} - \int_{C_2}^{A_2} + \int_{C_1}^{A_1}.$$

Наконец, с помощью формулы Гаусса-Остроградского находим

$$\delta S_0 = \iiint_P \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial c}\right)\delta x\, du\, dv\, dw +$$

$$+ \iint_{\partial P}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a}\, d\sigma^{vw} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b}\, d\sigma^{wu} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial c}\, d\sigma^{uv}\right)\delta x,$$

где

$$\iint_{\partial P} = \iint_{[12]} + \iint_{[23]} + \iint_{[31]} + \iint_{A_2B_2C_2} - \iint_{A_1B_1C_1} .$$

Приравнивая нулю вариацию действия на призме P всюду, кроме ее треугольных граней, получаем следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial c} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial b} - \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a} & \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b} & \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial c} \\ \frac{\partial u_0}{\partial u} & \frac{\partial v_0}{\partial u} & \frac{\partial w_0}{\partial u} \\ \frac{\partial u_0}{\partial v} & \frac{\partial v_0}{\partial v} & \frac{\partial w_0}{\partial v} \end{vmatrix} ,$$

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}_{12}}{\partial b}\frac{du_{12}}{du} - \frac{\partial \mathcal{L}_{12}}{\partial a}\frac{dv_{12}}{du} - \frac{\partial \mathcal{L}_{31}}{\partial b}\frac{du_{31}}{du} + \frac{\partial \mathcal{L}_{31}}{\partial a}\frac{dv_{31}}{du}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}_{23}}{\partial b}\frac{du_{23}}{du} - \frac{\partial \mathcal{L}_{23}}{\partial a}\frac{dv_{23}}{du} - \frac{\partial \mathcal{L}_{12}}{\partial b}\frac{du_{12}}{du} + \frac{\partial \mathcal{L}_{12}}{\partial a}\frac{dv_{12}}{du}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}_{31}}{\partial b}\frac{du_{31}}{du} - \frac{\partial \mathcal{L}_{31}}{\partial a}\frac{dv_{31}}{du} - \frac{\partial \mathcal{L}_{23}}{\partial b}\frac{du_{23}}{du} + \frac{\partial \mathcal{L}_{23}}{\partial a}\frac{dv_{23}}{du} .$$

Из оставшейся части вариации действия получаем выражение для канонического импульса системы:

$$\mathcal{P} = P_1(A) + P_2(B) + P_3(C) + \int_A^B P_{12} + \int_B^C P_{23} + \int_C^A P_{31} + \iint_{ABC} P_0 , \qquad /21/$$

где

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial a}, \qquad P_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial b}\, du - \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial a}\, dv,$$

$$P_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a}\, d\sigma^{vw} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b}\, d\sigma^{wu} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial c}\, d\sigma^{uv} .$$

Теорема Нетер о законах сохранения, подробно исследованная в случае двух тел/2,3/, без труда распространяется на случай трех тел. В частности, если все функции Лагранжа не зависят от мировых координат x, то канонический импульс /21/ сохраняется.

4. ДВА ПРИМЕРА

В нерелятивистской модели, когда в мире действует группа Галилея, полагаем

$$\mathcal{L}_i = m_i \frac{1}{2a^0}\sum_{k=1}^{N} a^k a^k , \qquad \mathcal{L}_{ij} = -G_{ij}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} J^{0k} J^{0k}} ,$$

$$\mathcal{L}_0 = -G_0\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} J^{0k\ell} J^{0k\ell}} ,$$

где m_i - массы частиц, G - константы взаимодействия.

В релятивистской модели, когда в мире действует группа Пуанкаре, полагаем

$$\mathcal{L}_i = -m_i k^2 \sqrt{(aa)}, \qquad \mathcal{L}_{ij} = -G_{ij} k \begin{vmatrix} (ab) & (aa) \\ (bb) & (ba) \end{vmatrix}^{1/2} ,$$

$$\mathcal{L}_0 = -G_0 k^2 \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & (ac) \\ (ba) & (bb) & (bc) \\ (ca) & (cb) & (cc) \end{vmatrix}^{1/2} ,$$

где k - скорость света, $(ab) = a^0 b^0 - \frac{1}{k^2}\sum_{s=1}^{N} a^s b^s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. В сб. "Принцип относительности", Атомиздат, М., 1973.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-11295, Дубна, 1978.

3. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.42, № 1.
4. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.43, № 3.
5. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-80-76, Дубна, 1980.
6. Шавохина Н.С. Известия вузов, Физика, № 7, 1981.
7. Шавохина Н.С. ДАН СССР, 1982, т. 265, № 4, с.852.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1984 года

Шавохина Н.С. Р2-84-167
Вариационный метод описания системы трех кварков

Сформулирована задача трех тел, применимая к описанию кварков, составляющих нуклон. Введено новое, тройное взаимодействие, представляющее принципиальный интерес как в релятивистском случае, так и в нерелятивистском пределе. Рассмотрен общий вид действия системы. Найдена вариация действия. Из формулы для вариации действия получены уравнения движения и канонический импульс системы.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю. Думбрайс

Shavokhina N.S. P2-84-167
Variational Method of the Description of a Three-Quark System

A tree-body problem is formulated, which may be applied to describe quarks composing a nucleon. A new three-body interaction is introduced, which is of a principal interest in the relativistic and nonrelativistic case. The general form of action of the system is analysed. From the formula of variation of the action equations of motion and the canonical momentum of the system are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984