объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-136

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ПРИ ДВИЖЕНИИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Направлено в "Журнал технической физики"

1984

1. Пусть заряженная ультрарелятивистская частица пролетает через область протяженностью ℓ, внутри которой на частицу действуют поперечные внешние силы. Как известно, характер возникающего электромагнитного излучения зависит тогда от соотношения между ℓ и т.н. длиной формирования:

$$L_{ф} \simeq \frac{v}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \simeq \frac{\lambda\gamma^2}{\pi(1+\gamma^2\theta^2)}. \qquad /1/$$

Здесь γ - лоренц-фактор частицы, ω, λ, $\vec{k}$ - частота, длина волны и волновой вектор излучения, $\vec{v}$ - средняя скорость частицы, θ - угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{v}$. В частности, при выполнении условия

$$\ell/L_{ф} \ll 1 \qquad /2/$$

спектрально-угловое распределение излучения описывается формулой

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \frac{[\vec{k}\vec{v}_1]}{\omega - \vec{k}\vec{v}_1} - \frac{[\vec{k}\vec{v}_2]}{\omega - \vec{k}\vec{v}_2} \right|^2, \qquad /3/$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - начальная и конечная скорости частицы. Поскольку $k = \frac{\omega}{c}$, величина $\frac{d\mathcal{E}}{d\omega\, d\Omega}$ фактически не зависит от частоты ω; кроме того, она не зависит от вида траектории на участке ℓ и определяется только направлениями векторов $\vec{k}$, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. При этом оказывается, что излучение сосредоточено в углах $\lesssim 1/\gamma$, если $\alpha\gamma \ll 1$, и в углах $<\alpha$, если $\alpha\gamma \gg 1$. Здесь α - угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Просуммированная по всем углам излучения спектральная плотность [1]

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{4e^2}{\pi c} \left\{ \frac{\alpha^2\gamma^2 + 2}{\alpha\gamma\sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4}} \ln\left[\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma + \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + 4}\right)\right] - 1 \right\}. \qquad /4/$$

Из /4/ следует

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2e^2}{3\pi c}\alpha^2\gamma^2 \quad \text{при} \quad \alpha\gamma \ll 1, \qquad /4'/$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c}\ln\alpha^2\gamma^2 \quad \text{при} \quad \alpha\gamma \gg 1. \qquad /4''/$$

Формулы /3/ и /4/ соответствуют только первому члену разложения спектральной плотности излучения по малой величине $\ell/L_{ф}$, структура следующего члена исследована в нашей работе [2]. Было показано, что при выполнении условия /2/ поправки к $\frac{d\mathcal{E}}{d\omega\, d\Omega}$ и $\frac{d\mathcal{E}}{d\omega}$

равны по порядку величины соответственно $(\ell/L_\phi)^2$ и ℓ/L_ϕ, причем, в отличие от /3/ и /4/, указанные дополнительные члены содержат частоту, и их конкретный вид зависит от характера траектории частицы на участке ℓ. Существует поэтому некоторая характерная граничная частота

$$\tilde{\omega} \simeq \frac{2c\gamma^2}{\ell(1+\gamma^2\theta^2)}, \qquad /5/$$

определяемая условием $\ell \simeq L_\phi$ и разделяющая области с различными спектральными свойствами: при $\omega < \tilde{\omega}$ спектральная плотность не зависит от частоты ω, в то время как специфическое спектральное распределение, определяемое движением частицы на участке ℓ, имеет место только при $\omega > \tilde{\omega}$. В настоящей заметке мы хотим продемонстрировать это обстоятельство для двух конкретных случаев. В первом примере рассматривается движение в магнитном поле по короткой дуге окружности, во втором - плоскостное каналирование в поперечном параболическом потенциале.

2. Пусть заряженная ультрарелятивистская частица проходит часть своего пути ℓ в области, занятой однородным поперечным магнитным полем, и изменяет направление движения на небольшой угол

$$\bar{a} = \frac{\omega_H \ell}{c}, \quad \omega_H = \frac{eH}{mc\gamma}. \qquad /6/$$

В работе[/3/] показано, что при таком движении спектрально-угловое распределение излучения имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{E}}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left(|f_\sigma|^2 + |f_\pi|^2\right), \\ &f_\sigma = \beta \int\limits_{\phi - \bar{a}/2}^{\phi + \bar{a}/2} \frac{\cos x - \beta\cos\delta}{(1-\beta\cos x\cos\delta)^2}\, e^{-i\frac{\omega}{\omega_H}(x - \beta\cos\delta\sin x)}\, dx, \\ &f_\pi = \beta\sin\delta \int\limits_{\phi - \bar{a}/2}^{\phi + \bar{a}/2} \frac{e^{-i\frac{\omega}{\omega_H}(x - \beta\cos\delta\sin x)}\sin x\, dx}{(1-\beta\cos x\cos\delta)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

Здесь углы ϕ и δ определяют направление волнового вектора $\vec{k}$: ϕ - азимутальный угол в плоскости орбиты, отсчитываемый от направления касательной в верхней точке дуги /см. рис.1/, δ - угол между вектором $\vec{k}$ и плоскостью орбиты.

Анализ формулы /7/, который из-за некоторой его громоздкости мы опускаем, показывает, что в полном соответствии с упомянутыми выше общими результатами основное излучение идет в углах ϕ и δ

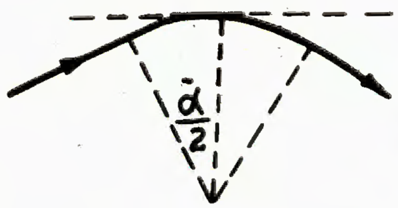

Рис.1

порядка $1/\gamma$, если $\bar{a}\gamma \ll 1$, и в углах порядка $\bar{a}$ при $\bar{a}\gamma \gg 1$. Зависимость от частоты связана только с экспонентами, входящими в интегралы /7/. Поскольку $\delta \ll 1$ и $x \ll 1$, показатели экспонент равны

$$\frac{i\omega}{\omega_H}\left\{x - \beta\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right\} \simeq \frac{i\omega x}{\omega_H}\left(1 - \beta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{x^2}{6}\right).$$

Простые преобразования приводят это выражение к виду

$$\frac{i\omega\phi}{2\omega_H}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \delta^2 + \frac{\phi^2}{3}\right) + \frac{i\omega(x-\phi)}{2\omega_H}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \eta^2\right), \quad \eta^2 \simeq \theta^2 = \phi^2 + \delta^2 .$$

Экспонента $e^{i\frac{\omega\phi}{2\omega_H}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \delta^2 + \frac{\phi^2}{3}\right)}$ выносится за знаки интегралов и после квадрирования выпадает. Поэтому частотная зависимость определяется только экспонентой $e^{\frac{i\omega(x-\phi)}{2\omega_H}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)}$.

Поскольку интегрирование по x ведется в интервале $(\phi - \frac{\bar{a}}{2}, \phi + \frac{\bar{a}}{2})$, показатель экспоненты равен по порядку величины $\frac{i\omega\bar{a}}{\omega_H}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)$.

Следовательно, спектрально-угловое распределение перестает зависеть от частоты, если выполнено неравенство

$$\frac{\omega\bar{a}}{\omega_H}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \ll 1, \qquad /8/$$

совпадающее, как можно убедиться, с общим условием /2/.

Как известно, спектральное распределение стандартного синхротронного излучения релятивистской частицы в магнитном поле заключено в интервале $(\omega_H, \omega_H\gamma^3)$ и существенно зависит от частоты. Из предыдущих рассуждений следует, что для того, чтобы такой спектр действительно полностью сформировался, требуется выполнение во всем интервале частот $(\omega_H, \omega_H\gamma^3)$ условия

$$\frac{\omega\bar{a}}{\omega_H}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \gg 1, \qquad /9/$$

обратного условию /8/. Рассмотрим следствия, вытекающие из требования /9/ для двух крайних случаев, когда $\bar{a}\gamma \gg 1$ и $\bar{a}\gamma \ll 1$.

Если $\bar{a}\gamma \gg 1$, то $\theta \simeq \bar{a} \gg 1/\gamma$ и /9/ переходит в

$$\frac{\omega\bar{a}^3}{\omega_H} \gg 1. \qquad /9'/$$

В области вблизи верхней границы синхротронного спектра $\omega \simeq \omega_H\gamma^3$ и неравенство /9'/ фактически совпадает с предполагаемым условием $\bar a\gamma > 1$, выполнение которого оказывается достаточным для сформирования высокочастотной части синхротронного излучения. Это не относится к низкочастотному краю, когда $\omega \simeq \omega_H$ и /9'/ выполнено только при $\bar a > 1$. Следовательно, для формирования полного спектра синхротронного излучения помимо условия $\bar a\gamma > 1$ требуется еще выполнение дополнительного неравенства $\bar a > 1$, равносильного условию

$$H\ell > \frac{mc^2}{e}\gamma \simeq 1700\gamma \cdot \text{Э·см}. \qquad /10/$$

В противном случае синхротронный спектр формируется только для частот

$$\omega > \bar\omega \simeq \frac{2\omega_H}{\bar a^3} \ll \omega_H\gamma^3. \qquad /10'/$$

Рассмотрим теперь движение частицы в т.н. "коротком магните"[3], т.е. при соблюдении неравенства $\bar a\gamma \ll 1$. Тогда $\theta \simeq 1/\gamma$ и условие /9/ переходит в

$$\frac{\omega\bar a}{\omega_H\gamma^2} \gg 1. \qquad /9''/$$

Легко видеть, что неравенство /9''/ вообще не может иметь места, поскольку даже для самых высоких синхротронных частот $\omega_H\gamma^3$ его левая часть равна $\bar a\gamma \ll 1$. В соответствии с приведенными в начале настоящей заметки общими соображениями следует ожидать, что в рассматриваемом случае вместо обычного синхротронного излучения должно возникать излучение при мгновенном "изломе" траектории, спектр которого описывается формулой /4'/*. В справедливости сказанного легко убедиться, опираясь на конкретные формулы, приведенные в работе[3]. Там показано, что при движении в "коротком магните" спектральное распределение имеет вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2\omega_H}{\pi R\omega^2}\int_{1-\beta}^{1+\beta}\frac{f(x)}{x^6}\sin^2\left(\frac{\omega\bar a x}{2\omega_H}\right)dx, \quad f(x) = (1-\beta^2)^2 - 2x(1-\beta^2) + x^2(1+\beta^2), \qquad /11/$$

здесь R - радиус кривизны траектории частицы.

Основной вклад в интеграл вносят малые значения $x = 1-\beta$. Поэтому аргумент синуса можно заменить на $\frac{\omega\bar a}{2\omega_H}(1-\beta) \simeq \frac{\omega\bar a}{4\omega_H\gamma^2}$. Если выполнено условие $\ell/L_ф \ll 1$, то

* Аналогичное утверждение имеет место и при $\bar a\gamma \gg 1$ для частот $\omega < \bar\omega$, где граничная частота $\bar\omega$ определяется в соответствии с /10'/.

$$\sin^2\left(\frac{\omega\bar a x}{2\omega_H}\right) \simeq \frac{\omega^2\bar a^2 x^2}{4\omega_H^2}, \qquad \text{т.е.} \quad \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \simeq \frac{e^2\bar a^2}{4\pi R\omega_H}\int_{1-\beta}^{1+\beta}\frac{f(x)}{x^4}dx.$$

Оставшийся интеграл легко вычисляется, при $\gamma \gg 1$ он равен $4\gamma^2/3$. Поскольку для ультрарелятивистских частиц $R\omega_H \simeq c$, окончательно получаем $\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \simeq \frac{2e^2}{3\pi c}\gamma^2\bar a^2$, что, как и следовало ожидать, совпадает с формулой /4'/, соответствующей мгновенному рассеянию на угол $\bar a$. Из сказанного также следует, что спектральное распределение не зависит от частоты вплоть до частоты $\omega \simeq \frac{\omega_H\gamma^2}{\bar a}$, совпадающей по порядку величины с $\bar\omega$ в формуле /5/. С другой стороны, для обычного синхротронного излучения, если бы оно имело место в рассматриваемых условиях, характерна сильная зависимость от частоты и основная часть излучения приходилась бы на область вблизи $\omega_{кр} \simeq \omega_H\gamma^3$. Отношение

$$\frac{\omega}{\omega_{кр.}} \simeq \frac{1}{\bar a\gamma} \gg 1. \qquad /12/$$

Следовательно, характер излучения при $\bar a\gamma \ll 1$ резко отличается от синхротронного. Это схематически показано на рис.2, где пунктиром изображен спектр обычного синхротронного излучения.

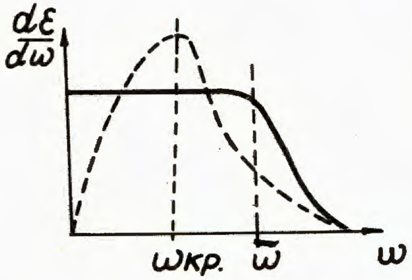

Рис.2

Такое заключение вполне согласуется и с энергетическими соображениями. Из формулы /4'/ следует, что потери энергии, приходящиеся на интервал частот до $\bar\omega$, составляют примерно $\bar{\mathcal{E}} \simeq \frac{2e^2\gamma^2\bar a^2}{3\pi c}\bar\omega = \frac{4e^2\gamma^4\ell}{3\pi R^2}$. Это надо сопоставить с просуммированными по всему спектру полными потерями энергии $\mathcal{E} = \frac{2e^2\gamma^4\ell}{3R^2}$. Отношение $\bar{\mathcal{E}}/\mathcal{E} \simeq 1$, откуда следует, что существенная часть потерь приходится на ту область, в которой спектральная плотность не зависит от частоты.

3. В качестве второго примера рассмотрим излучение при плоскостном каналировании позитронов. Для некоторых кристаллов межплоскостной потенциал близок к параболическому, и мы ограничимся, в основном, только этим простейшим типом каналирования. На-

помним некоторые основные соотношения, относящиеся к указанному случаю. Потенциальная энергия

$$U(x) = kx^2, \qquad /13/$$

где x - поперечная координата, причем $x = 0$ соответствует плоскости, равноудаленной от двух соседних кристаллографических плоскостей, между которыми происходит каналирование. Характеристики движения каналирующей частицы и создаваемого ею излучения в значительной степени определяются безразмерным параметром

$$\tilde{\gamma} = \frac{4mc^2}{kd^2}, \qquad /14/$$

где d - расстояние между смежными кристаллографическими плоскостями. Зависимость поперечной координаты частицы x от ее продольной координаты $z = ct$ дается, как известно, выражением

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi z}{\Lambda} + \delta\right), \qquad /15/$$

в котором пространственный период колебаний

$$\Lambda = \pi d(\gamma\tilde{\gamma})^{1/2}, \qquad /16/$$

а величины A и δ определяются начальными условиями. Соответствующая частота

$$\omega_0 = \frac{2c}{d}(\gamma\tilde{\gamma})^{-1/2}. \qquad /17/$$

Угол α между мгновенным направлением движения частицы и плоскостью $x = 0$ равен dx/dz, т.е.

$$\alpha = \frac{2\pi A}{\Lambda}\cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda} + \delta\right). \qquad /18/$$

Его максимальное значение равно $\frac{2\pi A}{\Lambda}$; поскольку в условиях каналирования амплитуда поперечного движения A не может превышать $d/2$, предельно возможное значение α дается т.н. углом Линхарда

$$\alpha_Л = \frac{\pi d}{\Lambda} = (\gamma\tilde{\gamma})^{-1/2}. \qquad /19/$$

Характеристики излучения зависят от соотношения между γ и $\tilde{\gamma}$. Обычно параметр $\tilde{\gamma} \simeq 10^3 - 10^4$. Поэтому существует достаточно широкая область энергий, в которой для ультрарелятивистских позитронов выполнено условие $\gamma \ll \tilde{\gamma}$. Тогда речь идет о дипольном излучении, основная часть которого распространяется вдоль направления оси z внутри конуса с раствором порядка $1/\gamma \gg \alpha_\Lambda$. Если на толщине кристалла ℓ укладывается очень много пространственных периодов Λ, то спектральные и угловые характеристики дипольного излучения можно получить с помощью простых и наглядных соображений /см., напр., [4] /. Перейдем в систему отсчета,

в которой каналирующая частица не имеет продольной скорости /сопутствующая система/. В этой системе частица совершает поперечные колебания с частотой $\omega^* = \gamma\omega_0$ и излучает на той же частоте. Чтобы получить излучение в лабораторной системе, надо совершить обратный переход от сопутствующей системы в лабораторную с помощью формул для релятивистского эффекта Доплера. Частота излучения оказывается при этом функцией угла θ, которая имеет вид

$$\omega = \omega_0 / 1 - \beta\cos\theta. \qquad /20/$$

Подставляя /20/ в формулу /1/, определяющую величину $L_ф$, получим

$$L_ф = \frac{\Lambda}{2\pi}. \qquad /21/$$

Из /21/ следует, что при плоскостном каналировании в достаточно толстом кристалле, для которого $\ell \gg \Lambda$, всегда $L_ф \ll \ell$, т.е. условие /2/ никогда не выполняется даже применительно к самым низким частотам *.

Приведенное рассуждение не следует понимать буквально, оно полностью справедливо только для бесконечно толстого кристалла. При конечной толщине ℓ спектральное распределение в сопутствующей системе не вполне монохроматично; строго говоря, оно непрерывно и содержит все возможные частоты вплоть до сколь угодно низких. Поэтому в лабораторной системе однозначная связь между частотой ω и углом θ разрывается, и появляется излучение низкой частоты, идущее в направлениях $\theta \lesssim 1/\gamma$. Для такого излучения $L_ф < \ell$, если его частота ω меньше граничной частоты $\bar{\omega}$, определяемой формулой /5/, которая при $\theta < 1/\gamma$ принимает вид $\bar{\omega} = \frac{2c\gamma^2}{\ell}$. Однако при $\ell \gg L_ф$ отклонения от монохроматичности в сопутствующей системе очень малы, и условие /2/ выполняется только для ничтожно малой доли излучения. Это видно также от сопоставления частоты $\bar{\omega}$ с максимально возможной частотой излучения $\omega_М = 2\omega_0\gamma^2$, которая определяется формулой /20/ при $\theta = 0$. Легко убедиться, что $\frac{\bar{\omega}}{\omega_М} \simeq \frac{\Lambda}{2\pi\ell} \ll 1$ при $\ell \gg L_ф$.

Иначе обстоит дело, если на длине ℓ укладывается только небольшое число пространственных периодов Λ. Тогда граничная частота $\bar{\omega}$ возрастает, и условие /2/ выполняется для более существенной части излучения. В этой области частот спектральная плотность определяется формулами для мгновенного рассеяния и за-

---

*Напомним, что речь идет о дипольном излучении при движении частицы в гармоническом потенциале /13/. Если потенциал отличается от гармонического, в движении возникают обертоны с частотами $n\omega_0$. Для соответствующего излучения $L_ф = \frac{\Lambda}{2\pi n}$, т.е. длина формирования оказывается еще меньшей.

висит только от угла α между начальной и конечной скоростями частицы. Она не зависит от толщины кристалла ℓ, если при разных ℓ отбираются только те траектории, для которых величина угла α фиксирована. Заметим, что последнее утверждение остается в силе и для непараболического потенциала, а также при $\gamma > \tilde{\gamma}$. В параболическом потенциале частицы движутся по траекториям /15/ с периодом Λ, не зависящим от начальных условий. Поэтому рассматриваемое излучение является периодической функцией толщины кристалла ℓ и величины $\gamma^{1/2}$. В частности, она полностью исчезает, если $\ell = n\Lambda$, где n - небольшое целое число. Это верно до тех пор, пока остается выполненным условие /2/.

В заключение рассмотрим численный пример, имея в виду излучение позитронов с энергией 5 ГэВ, каналирующих в кристалле кремния толщиной $\ell = 10^{-3}$ см вдоль плоскостей /110/. Тогда $\bar{\omega} \simeq 3{,}0 \cdot 10^{21}\,\text{с}^{-1}$, а энергия соответствующих фотонов $\hbar\bar{\omega} \simeq 1{,}8 \cdot 10^6$ эВ. Максимальная частота фотонов в дипольном приближении $\omega_M = 2\omega_0\gamma^2 \simeq 5 \cdot 10^{22}\,\text{с}^{-1}$, ей соответствует энергия $\hbar\omega_M \simeq 3 \cdot 10^7$ эВ. Таким образом, фотоны с энергией до 2 МэВ попадают в область спектра, соответствующую формулам для мгновенного изменения направления скорости, а область от 2 до 30 МэВ описывается обычным спектром плоскостного каналирования:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2\omega_0^2 A^2 \omega\ell}{4c^4}\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0\gamma^2} + \frac{\omega^2}{2\omega_0^2\gamma^4}\right).$$

Подчеркиваем, что эта формула справедлива только при $\ell \gg L_\phi$.

Выражаем благодарность В.Л.Любошицу за участие в обсуждении и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. УФН, 1982, т.137, с.561.
2. Бонч-Осмоловский А.Г., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ОИЯИ, Р2-83-157, Дубна, 1983.
3. Багров В.Г., Тернов И.М., Федосов Н.И. ЖЭТФ, 1982, т.82, с.1442.
4. Белошицкий В.В., Кумахов М.А. ЖЭТФ, 1978, т.74, с.1244.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 февраля 1984 года

Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И. Р2-84-136

Замечания к теории излучения релятивистских частиц в магнитном поле и при движении в параболическом потенциале

Обсуждаются особенности электромагнитного излучения релятивистских частиц в условиях, когда длина формирования излучения порядка, либо больше длины пути частицы в магнитном поле или при движении в поперечном параболическом потенциале. В частности, показано, что при повороте скорости релятивистской частицы в магнитном поле на ограниченный угол $\bar{\alpha}$ основная высокочастотная часть синхротронного излучения формируется только при условии $\bar{\alpha} > 1/\gamma$, где γ - лоренц-фактор частицы.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Bonch-Osmolovsky A.G., Podgoretsky M.I. P2-84-136

Comments on the Theory of Radiation of Relativistic Particles in Magnetic Field and at the Motion in Transversal Parabolic Potential

Some features of relativistic particle radiation under condition when the length of forming the radiation is of the order or larger than the length of particle path in the magnetic field and at the motion in transversal parabolic potential are discussed. In particular, it is shown that at rotating the relativistic particle velocity in magnetic field on the bounded angle $\bar{\alpha}$ the main high-frequency part of the synchrotron radiation is formed only, if the condition $\bar{\alpha} > 1/\gamma$, γ -Lorentz-factor of a moving particle, is fulfilled.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984

Перевод О.С.Виноградовой