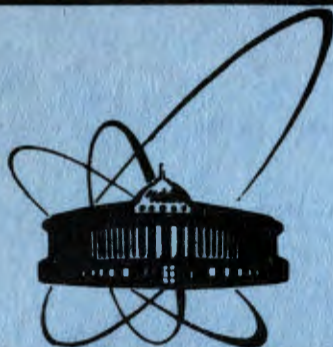


28/IV-84



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

2025/84

P2-84-13

В.К.Мельников

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НА ПЛОСКОСТИ x, y
ДЛИННОЙ ВОЛНЫ
С ПАКЕТОМ КОРОТКИХ ВОЛН

Направлено в журнал
"Letters in Mathematical Physics"

1984

Процессы с участием волн разных типов представляют собой довольно распространенное явление и встречаются в гидродинамике, физике плазмы, физике твердого тела и ряде других разделов науки. Как правило, эти процессы описываются системами нелинейных эволюционных уравнений, исследование которых представляет серьезные трудности. Однако в ряде случаев, используя те или иные соображения, удается найти точные решения таких систем. В настоящей заметке с помощью идей, порождаемых методом обратной задачи рассеяния, найдены точные решения для двух систем, описывающих взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн.

1. При известных условиях взаимодействие на плоскости x , y длинной волны с пакетом коротких волн описывается следующей системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_l \frac{\partial u}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial x} |\phi|^2 = 0, \quad /1/$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} + i c_g \frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta u \phi + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \delta |\phi|^2 \phi, \quad /2/$$

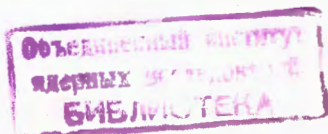
где u - профиль длинной волны, ϕ - комплексная огибающая пакета коротких волн, c_l - фазовая скорость длинной волны, движущейся в направлении оси y -ов, а c_g - групповая скорость пакета коротких волн, распространяющихся вдоль оси x -ов. Константы a , β , γ и δ имеют в каждом конкретном случае определенный смысл и являются параметрами системы. Существенно, что все константы c_l , c_g , a , β , γ и δ могут принимать только действительные значения. При $u = x$ система /1/, /2/ принимает вид, указанный в работе /1/. Следующая теорема определяет условия, при выполнении которых система /1/, /2/ обладает решениями указанного ниже вида.

Теорема 1. Если входящие в систему /1/, /2/ константы a , β , γ и δ все отличны от нуля, то существует следующее решение этой системы

$$u = \frac{a}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad \phi = b \frac{\exp(i \frac{\sigma}{\mu} z)}{\operatorname{ch} z} \exp[i[ky - (\mu^2 + \sigma^2)\gamma t]], \quad /3/$$

где

$$z = \mu(x + 2\omega t) + \nu(y - c_l t), \quad /4/$$



$$a = \frac{2\alpha\gamma\mu^2}{\alpha\beta - 2\delta\omega}, \quad |b|^2 = \frac{-4\gamma\mu^2\omega}{\alpha\beta - 2\delta\omega}, \quad /5/$$

$$\sigma = \frac{\omega}{\gamma} + \frac{c\epsilon}{2\gamma} - \frac{\nu}{\mu} \frac{c\ell}{2\gamma}, \quad /6/$$

параметры k , μ и ν принимают любые действительные значения кроме $\mu = 0$, а действительный параметр ω выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma\omega / (\alpha\beta - 2\delta\omega) < 0. \quad /7/$$

Доказательство. Подставляя выражения /3/ в уравнение /1/, с учетом /4/ получаем соотношение $2\omega a + a|b|^2 = 0$, которое выполнено согласно /5/. Следовательно, определенные посредством /3/ функции u и ϕ удовлетворяют уравнению /1/. Далее, подставляя /3/ в уравнение /2/, с помощью /4/ находим следующие условия обращения в нуль получающегося выражения $\beta a + \delta|b|^2 = 2\gamma\mu^2$, $2\mu\omega + \mu c\epsilon - \nu c\ell = 2\gamma\mu\sigma$, которые оказываются выполненными в силу /5/ и /6/. Таким образом, функции u и ϕ вида /3/ удовлетворяют также и уравнению /2/.

Замечание 1. Элементарный анализ неравенства /7/ показывает, что при $\gamma\delta < 0$ допустимые значения ω образуют интервал длины $|a\beta/2\delta|$, причем

$$\omega \in (0, \frac{a\beta}{2\delta}), \quad \text{если } a\beta\delta > 0, \quad /8/$$

$$\omega \in (\frac{a\beta}{2\delta}, 0), \quad \text{если } a\beta\delta < 0.$$

Наоборот, при $\gamma\delta > 0$ допустимые значения ω заполняют всю действительную ось за исключением отрезка длины $|a\beta/2\delta|$, причем

$$\omega \in [0, \frac{a\beta}{2\delta}], \quad \text{если } a\beta\delta > 0, \quad /9/$$

$$\omega \in [-\frac{a\beta}{2\delta}, 0], \quad \text{если } a\beta\delta < 0.$$

Отсюда следует, что при фиксированных γ , δ и $a\beta \rightarrow 0$ длина интервала допустимых значений ω в первом случае и длина отрезка запрещенных значений ω во втором случае стремятся к нулю. Далее, устремляя $\delta \rightarrow 0$, согласно /7/-/9/ получаем, что при $\delta = 0$ и $a\beta\gamma \neq 0$ множество допустимых значений ω образует полуось $\omega > 0$, если $a\beta\gamma < 0$, и полуось $\omega < 0$, если $a\beta\gamma > 0$.

Приведенные выше решения определяют асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ поведение длинной волны и пакета коротких волн после взаимодействия. Из равенств /3/, /4/ следует, что в результате взаимодействия длинной волны с пакетом коротких волн длинная волна изменила скорость и направление своего распространения, а пакет коротких волн занял строго согласованное с длинной волной расположение.

II. Существует другой путь для изучения взаимодействия на плоскости x , y длинной волны с пакетом коротких волн. Такую возможность дает использование связанной системы уравнений, состоящей из уравнения Кадомцева-Петвиашвили /2/ и нелинейного уравнения Шредингера, т.е. системы уравнений вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} (a \frac{\partial v}{\partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + 2\gamma v \frac{\partial v}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\psi|^2, \quad /10/$$

$$i\mu \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\nu \frac{\partial \psi}{\partial y} = a\nu\psi + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + c|\psi|^2\psi, \quad /11/$$

где параметры a , β , γ , δ , λ , μ , ν , a , b и c могут принимать только действительные значения. Следующие три теоремы содержат условия, при выполнении которых система уравнений /10/, /11/ имеет решения указанного ниже вида.

Теорема 2. Если входящие в систему /10/, /11/ константы a , γ , δ , b и c все отличны от нуля,

$$\Delta = \frac{b}{c} - 3\frac{a\delta}{c\gamma} > 0, \quad /12/$$

то существует следующее решение этой системы

$$v = \frac{A}{\text{ch}^2 z}, \quad \psi = \frac{B}{\text{ch} z} \exp[i(kx + my + nt)], \quad /13/$$

где

$$z = \sigma(x + \gamma y + \omega t), \quad /14/$$

$$A = \frac{6\sigma^2 \delta}{\gamma}, \quad /15/$$

$$|B|^2 = 2\sigma^2 \Delta, \quad /16/$$

$$k = \frac{\mu\omega + \nu\tau}{2b}, \quad /17/$$

$$\omega = -\frac{\beta}{a} - \frac{\gamma\lambda\Delta}{3a\delta} - \frac{4\delta}{a}\sigma^2 + \frac{\tau^2}{a}, \quad /18/$$

параметры σ и τ принимают любые действительные значения, кроме $\sigma = 0$, а параметры m и n принимают произвольные действительные значения, удовлетворяющие условию

$$\mu n + \nu m = (k^2 - \sigma^2)b. \quad /19/$$

Доказательство. Действительно, согласно /13/-/15/ имеем

$$\gamma v^2 + \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 4 \delta \sigma^2 v. \quad /20/$$

Подставим теперь выражения /13/ в уравнение /10/. С учетом равенств /14/ и /20/ получаем соотношение

$$(\alpha \omega + 4 \delta \sigma^2 - \tau^2 + \beta) A + \lambda |B|^2 = 0, \quad /21/$$

которое оказывается выполненным на основании /15/, /16/ и /18/. Таким образом, уравнение /10/ удовлетворено. Далее, подставим выражения /13/ в уравнение /11/. С помощью /17/ и /19/ находим, что получающееся выражение обращается в нуль, если справедливо условие $aA + c|B|^2 = 2b\sigma^2$, которое оказывается выполненным в силу /12/, /15/ и /16/. Следовательно, уравнение /11/ также удовлетворено.

Теорема 3. Если входящие в систему /10/, /11/ константы α , γ , δ , λ и b все отличны от нуля, $\mu^2 + \nu^2 > 0$, $c = 0$, а

$$b\gamma - 3a\delta = 0, \quad /22/$$

то существует следующее решение этой системы

$$v = \frac{A}{\text{ch}^2 z}, \quad \psi = \frac{B}{\text{ch} z} \exp[i(kx + my + nt)], \quad /23/$$

где

$$z = \sigma(x + \gamma y + \omega t), \quad /24/$$

$$A = \frac{6 \delta \sigma^2}{\gamma}, \quad /25/$$

$$|B|^2 = (\tau^2 - 4 \delta \sigma^2 - \alpha \omega - \beta) \frac{6 \delta \sigma^2}{\gamma \lambda}, \quad /26/$$

$$k = \frac{\mu \omega + \nu \tau}{2b}, \quad /27/$$

параметры σ , τ и ω принимают произвольные действительные значения, удовлетворяющие неравенству

$$(\tau^2 - 4 \delta \sigma^2 - \alpha \omega - \beta) \gamma \lambda \delta > 0, \quad /28/$$

а параметры m и n принимают любые действительные значения, удовлетворяющие условию

$$\mu n + \nu m = (k^2 - \sigma^2) b. \quad /29/$$

Доказательство. То, что выражения /23/ удовлетворяют уравнению /10/, проверяется почти дословным повторением соответствующей части доказательства теоремы 2. Действительно, с помощью /23/-/25/ убеждаемся в справедливости равенства /20/. Далее, подставляя выражения /23/ в уравнение /10/, с учетом равенств /20/ и /24/ получаем соотношение /21/, которое оказывается выполненным на основании /25/ и /26/. Подставим теперь выражения /23/ в уравнение /11/. В силу /27/ и /29/ находим, что получающееся в результате выражение обращается в нуль, если справедливо условие $aA = 2b\sigma^2$, которое оказывается выполненным согласно /22/ и /25/. Таким образом, оба уравнения /10/ и /11/ удовлетворены. Наконец, неравенство /28/ является условием разумности равенства /26/.

Теорема 4. Если входящие в систему /10/, /11/ константы α и a отличны от нуля, $\mu^2 + \nu^2 > 0$, $c = 0$, а

$$\Delta' = (\gamma b - a \delta) \lambda b > 0, \quad /30/$$

то существует следующее решение этой системы

$$v = \frac{A}{\text{ch}^2 z}, \quad \psi = B \frac{\text{sh} z}{\text{ch}^2 z} \exp[i(kx + my + nt)], \quad /31/$$

где

$$z = \sigma(x + \gamma y + \omega t), \quad /32/$$

$$A = \frac{6 b \sigma^2}{a}, \quad /33/$$

$$|B|^2 = \frac{36 \Delta' \sigma^4}{a^2 \lambda^2}, \quad /34/$$

$$k = \frac{\mu \omega + \nu \tau}{2b}, \quad /35/$$

$$\omega = -\frac{\beta}{a} - \frac{2 \tilde{\Delta}}{a} \sigma^2 + \frac{\tau^2}{a}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{a} (3b\gamma - a\delta), \quad /36/$$

параметры σ и τ принимают произвольные действительные значения, кроме $\sigma = 0$, а параметры m и n принимают любые действительные значения, удовлетворяющие условию

$$\mu n + \nu m = (k^2 - \sigma^2) b. \quad /37/$$

Доказательство. Согласно /30/-/34/ имеем

$$\gamma v^2 + \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda |\psi|^2 = 2\tilde{\Delta} \tau^2 v, \quad /38/$$

где $\tilde{\Delta}$ определено посредством равенства /36/. Подставим теперь выражения /31/ в уравнение /10/. С учетом равенств /32/, /36/ и /38/ убеждаемся, что выражения /31/ удовлетворяют этому уравнению. Далее, подставим выражения /31/ в уравнение /11/. С помощью равенств /33/, /35/ и /37/ находим, что выражения /31/ удовлетворяют также и уравнению /11/.

Замечание 2. Нелишне отметить, что неравенство /30/ может быть удовлетворено одновременно с выполнением условия /22/. Отсюда следует, что при $\epsilon = 0$, $\nu\gamma - 3\alpha\delta = 0$ и $\gamma\lambda > 0$ системе /10/, /11/ удовлетворяют как решения вида /23/, так и решения вида /31/.

В заключение отметим, что в работе /3/ найдены условия, при выполнении которых рассматриваемые здесь системы /1/, /2/ и /10/, /11/ допускают более детальное исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D.J. Stud.Appl.Math., 1977, vol.56, No.1, p.81-94.
2. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, т.192, №4, с.753-756.
3. Mel'nikov V.K. Lett.Math.Phys., 1983, vol.7, No.2, p.129-136.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 января 1984 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
D1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D2,4-83-179	Труды XV Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Мельников В.К.

P2-84-13

Точные решения задачи о взаимодействии на плоскости x, y длинной волны с пакетом коротких волн

Найдены точные решения двух систем нелинейных эволюционных уравнений, описывающих взаимодействие на плоскости x, y длинной и пакета коротких волн.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Mel'nikov V.K.

P2-84-13

Exact Solutions to the Problem of Interaction of a Long Wave with a Short-Wave Packet on the x, y Plane

Exact solutions are found for two systems of nonlinear evolution equations which describe interaction of a long wave with a short-wave packet on the x, y plane.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984