28/IV-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

2025/84

Р2-84-13

В.К.Мельников

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НА ПЛОСКОСТИ x, y ДЛИННОЙ ВОЛНЫ С ПАКЕТОМ КОРОТКИХ ВОЛН

Направлено в журнал
"Letters in Mathematical Physics"

1984

Процессы с участием волн разных типов представляют собой довольно распространенное явление и встречаются в гидродинамике, физике плазмы, физике твердого тела и ряде других разделов науки. Как правило, эти процессы описываются системами нелинейных эволюционных уравнений, исследование которых представляет серьезные трудности. Однако в ряде случаев, используя те или иные соображения, удается найти точные решения таких систем. В настоящей заметке с помощью идей, порождаемых методом обратной задачи рассеяния, найдены точные решения для двух систем, описывающих взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн.

1. При известных условиях взаимодействие на плоскости x, y длинной волны с пакетом коротких волн описывается следующей системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_\ell \frac{\partial u}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial x} |\phi|^2 = 0, \qquad /1/$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} + ic_g \frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta u \phi + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \delta |\phi|^2 \phi, \qquad /2/$$

где u - профиль длинной волны, ϕ - комплексная огибающая пакета коротких волн, c_ℓ - фазовая скорость длинной волны, движущейся в направлении оси y-ов, а c_g - групповая скорость пакета коротких волн, распространяющихся вдоль оси x-ов. Константы a, β, γ и δ имеют в каждом конкретном случае определенный смысл и являются параметрами системы. Существенно, что все константы c_ℓ, c_g, a, β, γ и δ могут принимать только действительные значения. При $y = x$ система /1/, /2/ принимает вид, указанный в работе /1/. Следующая теорема определяет условия, при выполнении которых система /1/, /2/ обладает решениями указанного ниже вида.

Теорема 1. Если входящие в систему /1/, /2/ константы a, β, γ и δ все отличны от нуля, то существует следующее решение этой системы

$$u = \frac{a}{\mathrm{ch}^2 z}, \quad \phi = b \frac{\exp(i \frac{\sigma}{\mu} z)}{\mathrm{ch} z} \exp\{i[ky - (\mu^2 + \sigma^2)\gamma t]\}, \qquad /3/$$

где

$$z = \mu(x + 2\omega t) + \nu(y - c_\ell t), \qquad /4/$$

$$a = \frac{2a\gamma\mu^2}{\alpha\beta - 2\delta\omega}, \quad |b|^2 = \frac{-4\gamma\mu^2\omega}{\alpha\beta - 2\delta\omega}, \tag{5}$$

$$\sigma = \frac{\omega}{\gamma} + \frac{c_g}{2\gamma} - \frac{\nu}{\mu}\,\frac{c\ell}{2\gamma}, \tag{6}$$

параметры k, μ и ν принимают любые действительные значения кроме $\mu = 0$, а действительный параметр ω выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma\omega/(\alpha\beta - 2\delta\omega) < 0. \tag{7}$$

Доказательство. Подставляя выражения /3/ в уравнение /1/, с учетом /4/ получаем соотношение $2\omega a + a|b|^2 = 0$, которое выполнено согласно /5/. Следовательно, определенные посредством /3/ функции u и ϕ удовлетворяют уравнению /1/. Далее, подставляя /3/ в уравнение /2/, с помощью /4/ находим следующие условия обращения в нуль получающегося выражения $\beta a + \delta|b|^2 = 2\gamma\mu^2$, $2\mu\omega + \mu c_g - \nu c\ell = 2\gamma\mu\sigma$, которые оказываются выполненными в силу /5/ и /6/. Таким образом, функции u и ϕ вида /3/ удовлетворяют также и уравнению /2/.

Замечание 1. Элементатный анализ неравенства /7/ показывает, что при $\gamma\delta < 0$ допустимые значения ω образуют интервал длины $|\alpha\beta/2\delta|$, причем

$$\omega \in \left(0, \frac{\alpha\beta}{2\delta}\right), \quad \text{если } \alpha\beta\delta > 0,$$
$$\omega \in \left(\frac{\alpha\beta}{2\delta}, 0\right), \quad \text{если } \alpha\beta\delta < 0. \tag{8}$$

Наоборот, при $\gamma\delta > 0$ допустимые значения ω заполняют всю действительную ось за исключением отрезка длины $|\alpha\beta/2\delta|$, причем

$$\omega \bar{\in} \left[0, \frac{\alpha\beta}{2\delta}\right], \quad \text{если } \alpha\beta\delta > 0,$$
$$\omega \bar{\in} \left[\frac{\alpha\beta}{2\delta}, 0\right], \quad \text{если } \alpha\beta\delta < 0. \tag{9}$$

Отсюда следует, что при фиксированных γ, δ и $\alpha\beta \to 0$ длина интервала допустимых значений ω в первом случае и длина отрезка запрещенных значений ω во втором случае стремятся к нулю. Далее, устремляя $\delta \to 0$, согласно /7/-/9/ получаем, что при $\delta = 0$ и $\alpha\beta\gamma \neq 0$ множество допустимых значений ω образует полуось $\omega > 0$, если $\alpha\beta\gamma < 0$, и полуось $\omega < 0$, если $\alpha\beta\gamma > 0$.

Приведенные выше решения определяют асимптотическое при $t \to \infty$ поведение длинной волны и пакета коротких волн после взаимодействия. Из равенств /3/, /4/ следует, что в результате взаимодействия длинной волны с пакетом коротких волн длинная волна изменила скорость и направление своего распространения, а пакет коротких волн занял строго согласованное с длинной волной расположение.

II. Существует другой путь для изучения взаимодействия на плоскости x, y длинной волны с пакетом коротких волн. Такую возможность дает использование связанной системы уравнений, состоящей из уравнения Кадомцева-Петвиашвили /2/ и нелинейного уравнения Шредингера, т.е. системы уравнений вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial t} + \beta\frac{\partial v}{\partial x} + 2\gamma v\frac{\partial v}{\partial x} + \delta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) = \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi|^2, \tag{10}$$

$$i\mu\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\nu\frac{\partial\psi}{\partial y} = av\psi + b\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + c|\psi|^2\psi, \tag{11}$$

где параметры α, β, γ, δ, λ, μ, ν, a, b и c могут принимать только действительные значения. Следующие три теоремы содержат условия, при выполнении которых система уравнений /10/, /11/ имеет решения указанного ниже вида.

Теорема 2. Если входящие в систему /10/, /11/ константы α, γ, δ, b и c все отличны от нуля,

$$\Delta = \frac{b}{c} - 3\frac{a\delta}{c\gamma} > 0, \tag{12}$$

то существует следующее решение этой системы

$$v = \frac{A}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad \psi = \frac{B}{\operatorname{ch} z}\exp[i(kx + my + nt)], \tag{13}$$

где

$$z = \sigma(x + \tau y + \omega t), \tag{14}$$

$$A = \frac{6\sigma^2\delta}{\gamma}, \tag{15}$$

$$|B|^2 = 2\sigma^2\Delta, \tag{16}$$

$$k = \frac{\mu\omega + \nu\tau}{2b}, \tag{17}$$

$$\omega = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\gamma\lambda\Delta}{3\alpha\delta} - \frac{4\delta}{\alpha}\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}, \tag{18}$$

параметры σ и τ принимают любые действительные значения, кроме $\sigma = 0$, а параметры m и n принимают произвольные действительные значения, удовлетворяющие условию

$$\mu n + \nu m = (k^2 - \sigma^2)b. \tag{19}$$

<u>Доказательство.</u> Действительно, согласно /13/-/15/ имеем

$$\gamma v^2 + \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 4\delta\sigma^2 v. \qquad /20/$$

Подставим теперь выражения /13/ в уравнение /10/. С учетом равенств /14/ и /20/ получаем соотношение

$$(\alpha\omega + 4\delta\sigma^2 - r^2 + \beta)A + \lambda|B|^2 = 0, \qquad /21/$$

которое оказывается выполненным на основании /15/, /16/ и /18/. Таким образом, уравнение /10/ удовлетворено. Далее, подставим выражения /13/ в уравнение /11/. С помощью /17/ и /19/ находим, что получающееся выражение обращается в нуль, если справедливо условие $aA + c|B|^2 = 2b\sigma^2$, которое оказывается выполненным в силу /12/, /15/ и /16/. Следовательно, уравнение /11/ также удовлетворено.

<u>Теорема 3.</u> Если входящие в систему /10/, /11/ константы α, γ, δ, λ и b все отличны от нуля, $\mu^2 + \nu^2 > 0$, $c = 0$, а

$$b\gamma - 3a\delta = 0, \qquad /22/$$

то существует следующее решение этой системы

$$v = \frac{A}{ch^2 z}, \quad \psi = \frac{B}{chz} \exp[i(kx + my + nt)], \qquad /23/$$

где

$$z = \sigma(x + ry + \omega t), \qquad /24/$$

$$A = \frac{6\delta\sigma^2}{\gamma}, \qquad /25/$$

$$|B|^2 = (r^2 - 4\delta\sigma^2 - \alpha\omega - \beta)\frac{6\delta\sigma^2}{\gamma\lambda}, \qquad /26/$$

$$k = \frac{\mu\omega + \nu r}{2b}, \qquad /27/$$

параметры σ, r и ω принимают произвольные действительные значения, удовлетворяющие неравенству

$$(r^2 - 4\delta\sigma^2 - \alpha\omega - \beta)\gamma\lambda\delta > 0, \qquad /28/$$

а параметры m и n принимают любые действительные значения, удовлетворяющие условию

$$\mu n + \nu m = (k^2 - \sigma^2)b. \qquad /29/$$

<u>Доказательство.</u> То, что выражения /23/ удовлетворяют уравнению /10/, проверяется почти дословным повторением соответствующей части доказательства теоремы 2. Действительно, с помощью /23/-/25/ убеждаемся в справедливости равенства /20/. Далее, подставляя выражения /23/ в уравнение /10/, с учетом равенств /20/ и /24/ получаем соотношение /21/, которое оказывается выполненным на основании /25/ и /26/. Подставим теперь выражения /23/ в уравнение /11/. В силу /27/ и /29/ находим, что получающееся в результате выражение обращается в нуль, если справедливо условие $aA = 2b\sigma^2$, которое оказывается выполненным согласно /22/ и /25/. Таким образом, оба уравнения /10/ и /11/ удовлетворены. Наконец, неравенство /28/ является условием разумности равенства /26/.

<u>Теорема 4.</u> Если входящие в систему /10/, /11/ константы α и a отличны от нуля, $\mu^2 + \nu^2 > 0$, $c = 0$, а

$$\Delta' = (\gamma b - a\delta)\lambda b > 0, \qquad /30/$$

то существует следующее решение этой системы

$$v = \frac{A}{ch^2 z}, \quad \psi = B\frac{shz}{ch^2 z} \exp[i(kx + my + nt)], \qquad /31/$$

где

$$z = \sigma(x + ry + \omega t), \qquad /32/$$

$$A = \frac{6b\sigma^2}{a}, \qquad /33/$$

$$|B|^2 = \frac{36\Delta'\sigma^4}{a^2\lambda^2}, \qquad /34/$$

$$k = \frac{\mu\omega + \nu r}{2b}, \qquad /35/$$

$$\omega = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{2\tilde{\Delta}}{\alpha}\sigma^2 + \frac{r^2}{\alpha}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{a}(3b\gamma - a\delta), \qquad /36/$$

параметры σ и r принимают произвольные действительные значения, кроме $\sigma = 0$, а параметры m и n принимают любые действительные значения, удовлетворяющие условию

$$\mu n + \nu m = (k^2 - \sigma^2)b. \qquad /37/$$

Доказательство. Согласно /30/-/34/ имеем

$$\gamma v^2 + \delta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda|\psi|^2 = 2\tilde{\Delta}\sigma^2 v, \qquad /38/$$

где $\tilde{\Delta}$ определено посредством равенства /36/. Подставим теперь выражения /31/ в уравнение /10/. С учетом равенств /32/, /36/ и /38/ убеждаемся, что выражения /31/ удовлетворяют этому уравнению. Далее, подставим выражения /31/ в уравнение /11/. С помощью равенств /33/, /35/ и /37/ находим, что выражения /31/ удовлетворяют также и уравнению /11/.

Замечание 2. Нелишне отметить, что неравенство /30/ может быть удовлетворено одновременно с выполнением условия /22/. Отсюда следует, что при $c = 0$, $b\gamma - 3a\delta = 0$ и $\gamma\lambda > 0$ системе /10/, /11/ удовлетворяют как решения вида /23/, так и решения вида /31/.

В заключение отметим, что в работе[3] найдены условия, при выполнении которых рассматриваемые здесь системы /1/, /2/ и /10/, /11/ допускают более детальное исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D.J. Stud.Appl.Math., 1977, vol.56, No.1, p.81-94.
2. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, т.192, №4, с.753-756.
3. Mel'nikov V.K. Lett.Math.Phys., 1983, vol.7, No.2, p.129-136.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 января 1984 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Мельников В.К. Р2-84-13

Точные решения задачи о взаимодействии на плоскости x,y длинной волны с пакетом коротких волн

Найдены точные решения двух систем нелинейных эволюционных уравнений, описывающих взаимодействие на плоскости x,y длинной и пакета коротких волн.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Mel'nikov V.K. P2-84-13

Exact Solutions to the Problem of Interaction of a Long Wave with a Short-Wave Packet on the x,y Plane

Exact solutions are found for two systems of nonlinear evolution equations which describe interaction of a long wave with a short-wave packet on the x,y plane.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984