объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-84-115

М.Бордаг

О КАНОНИЧЕСКОМ КВАНТОВАНИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Направлено в журнал "Nuclear Physics B"

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Формализм Гупта-Блейлера /или метод индефинитной метрики/ [1] для канонического квантования электродинамики является одним из фундаментальных методов квантовой теории поля. Его обобщения на неабелевы калибровочные поля, а именно, прием Фаддеева-Попова [2] и, позже, формализм Куго-Ойма [3] вместе с BRS-инвариантностью [4] играют для теории сильных и слабых взаимодействий ту же роль, что и сам формализм Гупта-Блейлера в квантовой электродинамике.

В последние десять лет появился все растущий интерес к квантовой теории поля с граничными условиями. Рассмотрим, например, модель мешков в квантовой хромодинамике /КХД/ [5] или теорию поля с температурой [6]. Есть и еще, на первый взгляд, простой пример - взаимодействие электромагнитного поля со сверхпроводящими телами. Одно из самых популярных явлений здесь - эффект Казимира [7]. Пока не рассматриваются радиационные поправки, трудностей не возникает, поскольку квантование можно проводить в кулоновской калибровке. Если, однако, рассматривать радиационные поправки, которые интересны как сами по себе [8], так и в связи с моделью мешков для вакуума КХД, окажется выгодным работать в ковариантной калибровке. И именно в этом случае возникают трудности /см. ниже/, которые наводят на мысль о том, что настоящее понимание метода Гупта-Блейлера еще неполно.

Цель настоящей работы - уточнить понимание метода Гупта-Блейлера в одном частном случае, когда электромагнитное поле взаимодействует со сверхпроводниками. Проблема здесь состоит в следующем. Как показано в [9], дополнительное условие Лоренца $\partial_x^\mu A_\mu^{(-)}(x)\,\Phi_{phys} = 0$ для физических состояний гарантирует тот факт, что фотоны с нефизической поляризацией не дают вклада в физические величины, за исключением энергии основного состояния. Если же мы рассматриваем эффект Казимира, то нас как раз интересует энергия основного состояния. Поскольку к основному состоянию Φ_0 дополнительное условие Лоренца не предъявляется, то два фотона с нефизическими поляризациями дают такой же вклад в энергию основного состояния, как два фотона с физическими поляризациями. В результате энергия оказывается, в случае ковариантной калибровки, в два раза больше, чем в случае кулоновской калибровки. Именно на это обстоятельство обращалось внимание в [9]. Там же предложено введение духов для компенсации нежелательных вкладов от фотонов с нефизической поляризацией.

В настоящей работе утверждается, что во введении духов в самом деле нет необходимости. Аналогичное утверждение уже было сделано в /5/, где проводилось квантование методом функционального интеграла. В нашей работе показано, что метод канонического квантования применим и в присутствии граничных условий, причем изменения, вносимые в него, не носят принципиального характера. Отсюда сразу следует, что духи в этом случае играют ту же роль, что и для безграничных условий, т.е. полностью выделяются и не дают вклада в физические величины, что противоречит утверждению /9/.

Далее мы показываем, что метод канонического квантования, развитый в настоящей работе, эквивалентен методу квантования при помощи функционального интеграла, примененному в /10/.

Проблема, с которой мы имеем дело при каноническом квантовании при введении граничных условий, заключается в следующем. Граничные условия можно записать в виде

$$n^\mu F^*_{\mu\nu}(x)|_{x\in S} = 0 \qquad \text{/сверхпроводник/} \qquad /1/$$

$$n^\mu F_{\mu\nu}(x)|_{x\in S} = 0 \qquad \text{/мешок/}. \qquad /2/$$

Здесь S - поверхность, на которой выполняются граничные условия, n^μ - нормальный вектор поверхности и $F_{\mu\nu}$ $(F^*_{\mu\nu})$ - тензор напряженностей /дуальный к нему/. Отметим, что граничные условия /1/ и /2/ калибровочно-инвариантны. Чтобы провести квантование в ковариантной калибровке, нужно ввести потенциалы $A_\mu(x)$. Главный вопрос сейчас - что следует из условия /1/ или /2/, каким условиям должны удовлетворять потенциалы.

На первый взгляд кажется, что достаточно подчинить потенциалы $A_\mu(x)$ таким условиям, которые, с одной стороны, обеспечивали бы выполнение условия /1/ или /2/, а с другой - приводили к однородной проблеме с граничными условиями /вспомним, что затем необходимо найти полное решение уравнений движения с граничными условиями для $A_\mu(x)$ /. Именно так поступили авторы /9/ и столкнулись с вышеназванными трудностями при вычислении энергии Казимира.

Имеется еще одно возражение против такого подхода. Вспомним, что как сама теория /КЭД/, так и граничные условия /1/ и /2/ калибровочно-инвариантны. Если ставить такие граничные условия для потенциала $A_\mu(x)$, которые лишь достаточны для выполнения /1/ или /2/, но не необходимы, то, в общем случае, теряется часть калибровочной инвариантности на поверхности S. Это, в свою очередь, приводит к тому, что в преобразовании $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_{x_\mu}\phi(x)$ функция $\phi(x)$ теперь должна удовлетворять некоторым условиям на поверхности S.

В действительности нет смысла /и необходимости/ в таком ограничении! Более того, граничные условия можно рассматривать как калибровочно-инвариантное взаимодействие с некоторым внешним полем, и ясно, что нет необходимости нарушать калибровочную инвариантность при учете этого взаимодействия. Если же вводятся дополнительные условия, нарушающие калибровочную инвариантность, то это надо понимать как введение некоторого калибровочно-неинвариантного взаимодействия, что, естественно, приведет и к другим затруднениям. В частности, тогда уже не удастся доказать сохранение тока $\partial^\mu_x j_\mu(x) = 0$ для $x \in S$, т.е. на поверхности. Поэтому можно ожидать, что процедура квантования, предложенная в /9/, хоть и дает правильный результат для энергии Казимира, в более сложных вопросах будет, видимо, приводить к некорректным результатам. Исходя из сказанного выше, для $A_\mu(x)$ следует выбирать такие граничные условия, которые были бы необходимы и достаточны для выполнения условия /1/ или /2/ и, следовательно, сохраняли полную калибровочную инвариантность. Именно так были учтены граничные условия в /10/ путем замены стандартной калибровочно-инвариантной меры DA в функциональном интеграле на меру $DA\,\delta(n^\mu F^*_{\mu\nu}(x)|_{x\in S})$, которая также калибровочно-инвариантна.

С учетом этих соображений в следующем разделе проводится каноническое квантование электродинамики в ковариантной калибровке с граничными условиями на некоторой поверхности S /отвечающими сверхпроводнику/. Для простоты возьмем S в виде двух бесконечно больших и тонких пластин. Они расположены параллельно друг другу, перпендикулярно третьей оси и пересекают ее в точках $x_3 = 0$ и $x_3 = a$. Затем будет доказано, что процедура Гупта-Блейлера хорошо работает в этом случае и является эквивалентной методу функционального интеграла, описанного в /5/.

2. ПРОЦЕДУРА КАНОНИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ

Отправной точкой служит лагранжиан КЭД, который в ковариантной калибровке $(\alpha = 1)$ имеет вид

$$L(x) = \frac{1}{2} A_\mu(x)\,\partial_x^2 g^{\mu\nu} A_\nu(x), \qquad /3/$$

соответствующее ему действие:

$$S(A) = \int d^4x\, L(x). \qquad /4/$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$n^\mu F^*_{\mu\nu}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0, a, \qquad /5/$$

где $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$, $F^*_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$.

На классическом уровне задача сводится к нахождению экстремума действия $S(A)$ /4/ в классе полей $A_\mu(x)$, удовлетворяющих условиям /5/. Отметим, что эти условия для $A_\mu(x)$ не являются обычными граничными условиями. Их следует рассматривать скорее как своего рода связи и, тем самым, мы имеем дело с вариационной задачей со связями. Действительно, варьируем потенциал $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \delta A_\mu(x)$, вариации $\delta A_\mu(x)$ не являются независимыми, а связаны условием /5/. В общем случае такие задачи могут быть решены путем введения полевых множителей Лагранжа и применением соответствующего, хорошо известного, формализма [13]. Фактически этот прием применялся и в [5] /метод функционального интеграла/, когда вводились вспомогательные поля B^{ia} /"живущие на пластинках"/.

Учитывая простоту граничных условий, в нашем случае лучше сначала разрешить условия /5/ в явном виде и только после этого приступить к варьированию действия. Чтобы разрешить условия /5/, введем следующий базис поляризаций $E^s_\mu(-i\partial_x)$:

$$E^{(1)}_\mu(-i\partial_x) = \begin{pmatrix}0\\ i\partial_{x_2}\\ -i\partial_{x_1}\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{-\partial^2_{x_\parallel}}},\qquad E^{2}_\mu(-i\partial_x) = \begin{pmatrix}-\partial^2_{x_\parallel}\\ -\partial_{x_0}\partial_{x_1}\\ -\partial_{x_0}\partial_{x_2}\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{-\partial^2_{x_\parallel}}\sqrt{-\partial^2_{x_0}+\partial^2_{x_\parallel}}},$$

$$E^{3}_\mu(-i\partial_x) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\qquad E^{0}_\mu(-i\partial_x) = \begin{pmatrix}-i\partial_{x_0}\\ -i\partial_{x_1}\\ -i\partial_{x_2}\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{-\partial^2_{x_0}+\partial^2_{x_\parallel}}}, \tag{/6/}$$

здесь $s = 0,1,2,3$ нумерует поляризации. Значок $\parallel$ указывает на направления x_1 и x_2, т.е. $x^2_\parallel = x^2_1 + x^2_2$. Поляризации /6/ удовлетворяют следующему соотношению ортогональности

$$E^s_\mu(-i\partial_x) g^{\mu\nu} E^t_\nu(-i\partial_x) = \tilde g^{st},$$

где $\tilde g^{st} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Нормировки в /6/ выбраны таким образом, чтобы корни на массовой поверхности /т.е. при $-\partial^2_{x_0} + \partial^2_{x_\parallel} = -\partial^2_{x_3}$ / были вещественными и чтобы операторы $E^s_\mu(-i\partial_x)$ были эрмитовыми.

Поясним смысл введенных поляризаций. Для этого перепишем условия /5/ в виде $n^\mu F^*_{\mu\nu}(x) = H_{\nu\mu}(\partial_x)A^\mu(x)$, где $H_{\nu\mu}(\partial_x) = 2\epsilon_{\xi\nu\alpha\mu}\partial^\alpha_x$, причем $H_{\nu\mu}(\partial_x)$ - проекционный оператор, и его областью значений является векторное пространство B. Это следует из тождеств

$$n^\mu H_{\mu\nu}(\partial_x) = 0,\quad \partial^\mu_x H_{\mu\nu}(\partial_x) = 0,\quad H_{\mu\nu}(\partial_x) = -H_{\nu\mu}(\partial_x). \tag{/7/}$$

Пространство B является подпространством четырехмерного векторного пространства потенциалов $A_\mu(x)$. Базис в пространстве B может быть построен при помощи операторов $H_{\mu\nu}(\partial_x)$. В качестве первого базисного вектора удобно выбрать $|1\rangle_\mu = H_{\mu 0}(\partial_x)$, а в качестве второго - $|2\rangle_\mu = H_{\mu\rho}(\partial_x) H^{\rho 0}(\partial_x)$ /с точностью до нормировки/. Как видно из /7/, эти базисные векторы ортогональны друг другу ${}_\mu\langle 1|g^{\mu\nu}|2\rangle_\nu = 0$, кроме того, они ортогональны векторам n^μ и ∂_x. Поскольку $H_{\mu\nu}(\partial_x)$ коммутирует с ∂^2_x, базисные векторы $|1\rangle_\mu$ и $|2\rangle_\mu$ могут быть выбраны в качестве двух направлений поляризации. Действительно, они совпадают, с точностью до нормировки, с $E^s_\mu(-i\partial_x)(s=1,2)$ и потому граничные условия действуют только на поляризации с $s = 1,2$. В дальнейшем поляризационный базис E^s_μ /6/ играет ту же роль, что и стандартный базис e^σ_μ /см., например, [11]/, который имеет два трансверсальных, один продольный и один временной фотон. Однако в базисе e^σ_μ граничные условия /5/ не являются диагональными, в то время как в базисе /6/ они диагональны.

Разложим потенциал $A_\mu(x)$ по базису /6/

$$A_\mu(x) = E^s_\mu(-i\partial_x)a_s(x),\quad a_s(x) = \tilde g_{ss'} E^{s'}_\mu(-i\partial_x) g^{\mu\mu'} A_{\mu'}(x). \tag{/8/}$$

Для вещественного поля $\overline{A_\mu(x)} = A_\mu(x)$ имеем $\overline{a_s(x)} = \eta_s a_s(x)$, где $\eta_s = 1$ для $s = 2,3$ и $\eta_s = -1$ для $s = 0,1$. Операторы $E^s_\mu(-i\partial_x)$ содержат четное для $s = 2,3$ и нечетное для $s = 0,1$ число производных, фактор i обеспечивает их эрмитовость. Следствием такой структуры операторов являются вышеуказанные правила сопряжения. Граничные условия имеют теперь простой вид

$$a_s(x)\big|_{x_3=0,a} = 0 \quad \text{для} \quad s = 1,2 \tag{/9/}$$

и действие S(A) /4/ записывается следующим образом:

$$S(a) = \frac{1}{2}\int d^4x\, \overline{a_s(x)}\, \partial^2_x \tilde g^{st} a_t(x). \tag{/10/}$$

Разложив потенциал $A_\mu(x)$, видим, что условия /9/ необходимы и достаточны для выполнения /5/. Варьируя амплитуды $a_s(x)$ следующим образом: $a_s(x) \to a_s(x) + \delta a_s(x)$, где $\delta a_s(x) = 0$ для $s = 1,2$, $x_3 = 0, a$, получаем из /10/ уравнения движения

$$\partial^2_x a_s(x) = 0 \begin{cases} \text{для всех } x & (s = 0, 3) \\ \text{для } x_3 \neq 0, a & (s = 1, 2). \end{cases} \tag{/11/}$$

Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L(x) = \frac{1}{2}\overline{a_s(x)}\, \partial^2_x \tilde g^{st} a_t(x). \tag{/12/}$$

Из выражения /12/* сейчас можно стандартным образом вывести канонический тензор энергии-импульса. При этом энергия имеет вид

$$p_0 = -\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \, \frac{\partial}{\partial x_\rho} \overline{a_s(x)} \, \tilde{g}^{st} \frac{\partial}{\partial x_\rho} a_t(x). \qquad /13/$$

Мы создали все предпосылки, чтобы стандартным образом провести каноническое квантование по методу Гупта-Блейлера. Для этого сначала найдем решение уравнений движения /11/. Оно имеет вид

$$a_s(x) = \int d(p) \sum_i [\psi_{s,i}(x,(p))\, a_{s,i}((p)) + \overline{\psi_{s,i}(x,(p))}\, \overline{a_{s,i}((p))}], \qquad /14/$$

где для s = 0,3 введены обозначения $(p) = (p_1, p_2, p_3)$, $p_k \in (-\infty, \infty)$ $(k = 1, 2, 3)$,

$$\psi_s(x,(p)) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{ip_\mu x^\mu} \qquad (p_0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2}}),$$

и $a_{s,i}((p)) = a_s((p))$ являются независимыми амплитудами. В случае s = 1,2 введем дополнительный индекс i = -1,0,+1, отвечающий $x_3 \le 0$, $0 \le x_3 \le a$, $a \le x_3$. При $i = \pm 1$ обозначаем $(p) = (p_1, p_2, p_3)$, $p_k \in (-\infty,\infty)$ $(k=1,2)$, $p_3 \in [0,\infty)$ и при $i = 0$ $(p) = (p_1, p_2, \omega_n)$, $p_k \in (-\infty,\infty)$ $(k=1,2)$, $\omega_n = \pi n/a$ $(n = 1,2,\ldots)$. Решения $\psi_{s,i}(x,(p))$ имеют вид

$$\psi_{s,-1}(x,(p)) = \theta(-x_3) \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{ip_\alpha x^\alpha} \sin p_3 x_3, \qquad (\alpha = 0, 1, 2),$$

$$\psi_{s,0}(x,(p)) = \theta(x_3)\,\theta(a - x_3) \frac{1}{2\pi\sqrt{a/2}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{ip_\alpha x^\alpha} \sin \omega_n x_3,$$

$$\psi_{s,1}(x,(p)) = \theta(x_3 - a) \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{ip_\alpha x^\alpha} \sin p_3 (x_3 - a),$$

где $p_0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2}}$ для $i = \pm 1$ и $p_0 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \omega_n^2}$ для i = 0. Амплитуды $a_{s,i}((p))$ имеют вид $a_{s,\pm 1}((p)) = a_{s,\pm 1}(p_1, p_2, p_3)$ и $a_{s,0}((p)) = a_{s,0}(p_1, p_2, \omega_n)$. Так как поле $A_\mu(x)$ - вещественно, мы имеем для независимых амплитуд

$$\overline{a_s((p))} = \eta_s a_s((-p)) \qquad (s = 0, 3)$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{a_{s,\pm 1}((p))} &= \eta_s a_{s,\pm 1}(-p_1, -p_2, p_3) \\ \overline{a_{s,0}((p))} &= \eta_s a_{s,0}(-p_1, -p_2, \omega_n) \end{aligned}\right\} (s = 1, 2).$$

Таким образом, имеем линейную суперпозицию четырех решений свободного волнового уравнения, два из которых удовлетворяют граничным условиям Дирихле при $x_3 = 0, a$, и два - без граничных условий.

Подставляя решение /14/ в выражение /13/, получаем выражение для энергии

$$p_0 = -\sum_{s=0}^{3} \sum_i \int d^3(p)\, p_0 \overline{a_{s,i}((p))}\, \tilde{g}^{st} a_{t,i}((p)). \qquad /15/$$

Здесь уместно следующее замечание.

Введем обозначения для отдельных вкладов в разложение /8/:

$$A_\mu^{(s)}(x) = E_\mu^s(-i\partial_x) a_s(x) \qquad \text{/суммирования по s нет!/}, \qquad /16/$$

тогда, очевидно, потенциал $A_\mu(x)$ запишется в виде $A_\mu(x) = \sum_{s=0}^{3} A_\mu^{(s)}(x)$, а решения примут вид

$$A_\mu^{(s)}(x) = \int d(p) \sum_i E_\mu^s(p) [\psi_{s,i}(x,(p))\, a_{s,i}((p)) + \eta_s \overline{\psi_{s,i}(x,(p)}\, \overline{a_{s,i}((p))}] \qquad /17/$$

/заметим, что $E_\mu^s(-p) = \eta_s E_\mu^s(p)$ /. Мы находимся сейчас на массовой поверхности, поэтому поляризации в /17/ записываются следующим образом:

$$E_\mu^1(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_\parallel^2}}, \qquad E_\mu^2(p) = \begin{pmatrix} p_\parallel^2 \\ p_1\sqrt{p_\parallel^2 + p_3^2} \\ p_2\sqrt{p_\parallel^2 + p_3^2} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{p_3\sqrt{p_\parallel^2}},$$

$$E_\mu^3(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_\mu^0(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\parallel^2 + p_3^2} \\ p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{p_3},$$

где p_3 для s = 1,2 и i = 0 следует заменить на ω_n. Соотношение ортогональности $E_\mu^s(p)\, g^{\mu\nu} E_\nu^t(p) = \tilde{g}^{st}$ останется в силе. Энергия p_0

---

*Отметим, что тензор энергии-импульса следует вывести именно из /12/, а не из /3/, поскольку в /3/ потенциалы не являются независимыми величинами, а связаны граничными условиями.

в терминах $A_\mu^{(s)}(x)$ имеет вид

$$p_0 = -\frac{1}{2}\int d^3\vec{x} \sum_{s=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\rho} A_\mu^{(s)}(x)\, g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\rho} A_\nu^{(s)}(x). \qquad /19/$$

Это выражение отличается от

$$p_0 = -\frac{1}{2}\int d^3\vec{x} \frac{\partial}{\partial x_\rho} A_\mu(x)\, g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\rho} A_\nu(x),$$

которое мы получим в случае безграничных условий!

Приступим теперь к квантованию. Поскольку процедура квантования по Гупту-Блейлеру хорошо известна, мы ограничимся рассмотрением специфических для нашего случае черт.

Заменим амплитуды $a_{s,i}((p))\ (a_{s,i}^*((p)))$ на операторы $\hat{a}_{s,i}^+((p))$ $(\hat{a}_{s,i}^-((p)))$ и установим правило сопряжения

$$(\hat{a}_{s,i}^-((p)))^\dagger = \eta_s \hat{a}_{s,i}^+((p)) \ (s = 1,2,3), \quad (\hat{a}_0^-((p)))^\dagger = -\eta_0 \hat{a}_0^+((p))^*. \qquad /20/$$

Тогда мы имеем $\hat{a}_s(x) = \hat{a}_s^+(x) + \eta_s \hat{a}_s^-(x)$ и потенциал $A_\mu(x)$ заменим на оператор

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{s=0}^{3} (\hat{A}_\mu^{(s)+}(x) + \hat{A}_\mu^{(s)-}(x)), \qquad /21/$$

где

$$(\hat{A}_\mu^{(s)-}(x))^\dagger = \hat{A}_\mu^{(s)+}(x) \qquad /s = 1,2,3/ \ /\text{эрмитов}/ \qquad /22/$$

$$(\hat{A}_\mu^{(0)-}(x))^\dagger = -\hat{A}_\mu^{(0)+}(x) \qquad /s = 0/ \ /\text{антиэрмитов}/.$$

Оператор энергии в симметричной форме дается выражением

$$p_0 = -\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{3}\sum_i \int d^3(p)\, [\hat{a}_{s,i}^+((p))\, \tilde{g}^{st}\, \hat{a}_{t,i}^-((p)) + \hat{a}_{s,i}^-((p))\, \tilde{g}^{st} \hat{a}_{t,i}^+((p))]. \qquad /23/$$

Согласно /23/, мы имеем канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{a}_{s,i}^+((p)), \hat{a}_{t,j}^-((p'))] = g^{st}\delta_{ij}\,\delta((p)-(p')), \ [\hat{a}_{s,i}^\pm((p)), \hat{a}_{t,j}^\pm((p))] = 0 \qquad /24/$$

и стандартную интерпретацию операторов $\hat{a}^\pm$ как операторов рождения и уничтожения.

Любое состояние Φ может быть получено путем применения операторов $\hat{a}^+$ к вакуумному состоянию Φ_0. Согласно методу индефинитной метрики, определяем $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}\eta$ / $\bar{\Phi}$ комплексно сопряженное к Φ состояние/ в качестве сопряженного к Φ состояния, где оператор η удовлетворяет $\eta^2 = 1$, $\eta\hat{a}_{s,i}^\pm = \hat{a}_{s,i}^\pm\eta$ /$s = 1,2,3$/ и $\eta\hat{a}_0^\pm = -\hat{a}_0^\pm\eta$. Тогда все операторы являются самосопряженными при введении скалярного произведения по правилу $\langle\ldots\rangle = \bar{\Phi}\ldots\Phi$.

*Знак минус здесь следует из метода индефинитной метрики.

Дополнительное условие, которое из пространства состояний Φ выделяет подпространство физических состояний $\Phi_{phys.}$, имеет вид

$$\partial_x^\mu \hat{A}_\mu^-(x)\Phi_{phys.} = 0. \qquad /25/$$

Используя /16/, /17/ и /18/, получаем для a_s условия

$$p_3(\hat{a}_3^-((p)) - \hat{a}_0^-((p))\Phi_{phys.} = 0. \qquad /26/$$

Таким образом, в случае $p_3 \neq 0$, мы имеем в физических состояниях одинаковое количество нулевых и третьих /в терминах E_μ^s / фотонов, а при $p_3 = 0$ дополнительного условия нет. Все физические состояния могут быть построены с помощью операторов $\hat{a}_{s,i}^+((p))$ /$s = 1,2$/, $\hat{b}^+((p)) = \hat{a}_3^+((p)) + \hat{a}_0^+((p))\ (p_3 \neq 0)$ и $\hat{a}_3^+((p))|_{p_3=0}$.
Как всегда, число операторов $b^+((p))$ не влияет на физические величины и может быть выбрано произвольно.

Уточним здесь, что мы понимаем под физическими или нефизическими фотонами. Если условия на границе не ставят, то две поперечные поляризации рассматриваются как физические, а продольная и временная - как нефизические /это, конечно, не единственный вариант/. При наличии граничных условий этого уже невозможно сделать, так как в терминах названных поляризаций оператор энергии, как легко проверить, недиагонален. Из дополнительного условия /26/ следует, что "фотоны" $\hat{a}_1^+$ и $\hat{a}_2^+$, отвечающие поляризациям E_μ^1 и E_μ^2 /6/, /либо формула /18/ - в импульсном представлении/, а также фотон $\hat{a}_3((p))|_{p_3=0}$ следует считать физическими. Естественным образом приходим к заключению о том, что деление полного числа степеней свободы в потенциале A_μ на физические и нефизические зависит от граничных условий.

Для завершения процедуры квантования осталось вычислить соответствующий пропагатор. Однако нужный нам пропагатор уже был выведен в /10/ методом функционального интеграла. Нам осталось лишь доказать, что пропагатор в /10/ совпадает с тем, что следует из процедуры канонического квантования, изложенной выше. Одновременно это совпадение доказывает эквивалентность двух процедур квантования.

Итак, рассмотрим причинный пропагатор ${}^sD_{\mu\nu}^c(x,y)$, выведенный в /10/. Он имеет вид

$${}^sD_{\mu\nu}^c(x,y) = D_{\mu\nu}^c(x-y) + \tilde{D}_{\mu\nu}^c(x,y),$$

где

$$D^c_{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-y)}}{-p^2-i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)$$

– вклад свободного пространства, а

$$\tilde{D}^c_{\mu\nu}(x,y)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{-i}{2\Gamma}\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{\Gamma^2}\right)e^{ip_a(x-y)^a}\sum_{i,j=1}^{2}h^{-1}_{ij}e^{i\Gamma(|x_3-a_i|+|y_3-a_j|)}$$

$$\tilde{D}^c_{\mu 3}=\tilde{D}^c_{3\nu}=\tilde{D}^c_{33}=0 \qquad (\mu,\nu=0,1,2) \quad (a=0,1,2).$$

– вклад от граничных условий. Здесь использованы следующие обозначения:

$$a_1=0,\quad a_2=a,\quad \Gamma=\sqrt{p_a p^a+i\epsilon} \qquad (a=0,1,2).$$

$$h^{-1}_{ij}=\frac{-1}{2i\sin\Gamma a}\begin{pmatrix} e^{-i\Gamma a}, & -1\\ -1, & e^{-i\Gamma a}\end{pmatrix}.$$

Выпишем проекции пропагатора на поляризации E^s_μ. Используя формулу /2.6/ работы [12], получим

$$E^s_\mu(-i\partial_x)E^t_\nu(i\partial_y)\,{}^sD^{c\mu\nu}(x,y)=$$

$$=\begin{cases} -{}^sD^c(x,y), & s=t=1,2\\ -D^c(x-y), & s=t=3\\ D^c(x-y), & s=t=0\\ 0, & s\neq t,\end{cases} \qquad /27/$$

где $D^c(x-y)\,({}^sD^c(x,y))$ – стандартный причинный пропагатор скалярной безмассовой частицы без граничных условий /с граничными условиями Дирихле при $x_3=0,a$ /. Пропагатор ${}^s\tilde{D}^c_{\mu\nu}(x,y)$ определим, в соответствии с процедурой канонического квантования, следующим образом:

$${}^s\tilde{D}^c_{\mu\nu}(x,y)=\overset{*}{\Phi}_0\,T(\hat{A}_\mu(x)\,\hat{A}_\nu(y))\,\Phi_0$$

и рассмотрим его проекции на поляризации E^s_μ:

$$E^s_\mu(-i\partial_x)\,E^t_\nu(i\partial_y)\,{}^s\tilde{D}^{c\mu\nu}(x,y)=\overset{*}{\Phi}_0\,T(\hat{a}_s(x)\,\eta_t\,\hat{a}_t(y))\,\Phi_0= \qquad /28/$$

$$=-\theta(x_0-y_0)\,[\hat{a}^+_s(x),\hat{a}^-_t(y)]-\theta(y_0-x_0)\,[\hat{a}^+_t(y),\hat{a}^-_s(x)].$$

Последнее выражение диагонально по s и t, как следует из /24/. Учитывая, что $\hat{a}_s(x)$ для $s=1,2$ удовлетворяет граничным условиям Дирихле при $x_3=0,a$ и что для $s=0,3$ граничные условия не накладывались, можно легко убедиться в том, что выражения /28/ и /27/ совпадают, и мы, следовательно, имеем ${}^sD^c_{\mu\nu}(x,y)$ = $={}^s\tilde{D}^c_{\mu\nu}(x,y)$ и т.д.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во втором разделе мы показали, что формализм канонического квантования по Гупту-Блейлеру для электродинамики в ковариантной калибровке с граничными условиями может быть сформулирован корректно вопреки утверждению [9]. Этот формализм эквивалентен развитому ранее в [10] подходу, на основе метода функционального интеграла, и, следовательно, дает правильное выражение для энергии Казимира.

Правильное выражение для энергии Казимира можно получить и непосредственно в операторном формализме, взяв вакуумное ожидание от выражения /23/. Вклад в энергию Казимира от физических поляризаций E^s_μ /$s=1,2$/ зависит от расстояния между зеркалами, в то время как нефизические поляризации вносят вклад, соответствующий свободному пространству Минковского, энергия которого, разумеется, бесконечна и нефизична. Этот результат можно интерпретировать иначе.

Предположим, что нефизические степени свободы не должны влиять на физические величины. Тогда вклад от свободного пространства Минковского, как зависящий от нефизических поляризаций, является нефизическим.

Главным соображением, использованным во втором разделе, при формулировке граничных условий на потенциал $A_\mu(x)$ было то, что граничные условия /5/ сохраняют калибровочную инвариантность, и, значит, для $A_\mu(x)$ нужно выбирать "минимальные" граничные условия, которые были бы не только необходимы, но и достаточны для выполнения условий /5/.

В настоящей работе рассматривается простейший случай, когда граничные условия заданы на двух параллельных, бесконечно протяженных и тонких пластинах. При рассмотрении более сложных конфигураций /например, сферы/ принцип "минимальности" граничных условий также остается в силе. Только в этом случае следует заменить базис поляризаций /6/ на другой, соответствующий геометрии. Это, однако, более сложная задача, поскольку только в случае параллельных пластин граничные условия коммутируют с гамильтонианом. Для более сложных геометрий лучше пользоваться методом функционального интеграла [10], который прямо обобщается на такие случаи, а также и на КХД /с граничными условиями "мешок"/.

Другим важным вопросом является инвариантность определенного формулой /26/ пространства физических состояний по отношению к включению взаимодействия /фермионы в КЭД, самодействие глюонов в КХД/. В [12] для одного частного случая имеются указания на то, что такая инвариантность есть. Там вычислялись радиационные поправки к энергии Казимира с использованием полученного здесь пропагатора. Полный ответ на вопрос об эквивалентности потребует дальнейших рассмотрений.

Автор благодарен профессору Д.Робашику и доктору В.Рубакову за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gupta S. Proc.Phys.Soc.Lond., 1950, A63, p.681; Bleuler K. Helv.Phys.Acta, 1950, 23, p.567.
2. Feynman R.P. Acta Phys.Pol., 1965, 24, p.697; Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, p.29.
3. Kugo T., Ojima I. Suppl.Progr.Theor.Phys., 1979, 66.
4. Becchi C., Rouet A., Stora R. Ann. of Phys., 1967, 98, p.287.
5. Chodos A. et al. Phys.Rev., 1974, D9, p.3471.
6. Gross D.J., Pisarsky R.D., Jaffe L.G. Rev.Mod.Phys., 1981, 53, p.43.
7. Casimir H.B.G. Proc.Kon.Ned.Akad.Wet., 1948, 51, p.793.
8. Peterson C., Hansson T.H., Johnson K. Phys.Rev., 1982, D26, p.415; Toms D.J. Phys.Rev., 1980, D21, p.928; Ford L.H., Yoshimura T. Phys.Lett., 1979, 70A, p.89; Chodos A., Thorn C.B. Phys.Lett., 1974, 53B, p.359.
9. Ambjørn J., Hughes R.J. Nucl.Phys., 1983, B217, p.336.
10. Bordag M., Robaschik D., Wieczorek E. JINR, E2-83-488, Dubna, 1983; Бордаг М., Вицорек Э., Робашик Д. ЯФ, 1984, 39, с.1053.
11. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
12. Bordag M., Robaschik D. JINR, E2-83-489, Dubna, 1983.
13. Дирак П. Принципы квантовой механики. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 февраля 1984 года.

Бордаг М. Р2-84-115
О каноническом квантовании электродинамики с граничными условиями

Рассмотрена квантовая электродинамика в ковариантной калибровке и показано, что в простом случае, когда граничные условия задаются двумя параллельными сверхпроводящими пластинами, применим формализм Гупта-Блейлера. Этот формализм дает правильное значение для энергии Казимира и эквивалентен развитому ранее формализму функционального интеграла для этой же проблемы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Bordag M. P2-84-115
On the Canonical Quantization of QED with Boundary Conditions

In the simple case of two parallel plates it is shown that in the presence of static superconductor boundary conditions the Gupta-Bleuler formalism of covariant gauge electrodynamics works well. It gives the correct result for the Casimir energy and is equivalent to the path-integral formalism developed earlier for the same problem.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984